

Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe | Technische Statistik

3. Auswerten von **Messreihen**



BOSCH
Technik fürs Leben





Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe
Technische Statistik

Heft 3 – Auswerten von Messreihen

Ausgabe 01.2016

2020-04-06 - SOCOS





Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Darstellung und Veranschaulichung von Daten	6
2.1	Urwertdiagramm.....	6
2.2	Histogramm	7
2.3	Wertestrahldarstellung und Punktdiagramm	13
2.4	Stratifizierung	14
2.5	Box Plot	15
3	Modellbildung	17
3.1	Glättung von Punktfolgen	18
3.2	Lineare Interpolation	19
3.3	Lineare Regression	21
3.4	Quadratische Regression.....	24
3.5	Interpolation durch Polynome	25
3.6	Statistische Modellbildung	27
4	Mathematische Verteilungen	29
4.1	Grundlegende Begriffe der Statistik	29
4.2	Normalverteilung	32
4.3	Vertrauensbereich von Überschreitungsanteilen	35
4.4	Lognormalverteilung.....	38
4.5	Logarithmisches Wahrscheinlichkeitsnetz	41
4.6	Stichprobenkenngößen.....	45
4.6.1	Kenngößen der Lage.....	46
4.6.2	Kenngößen der Streuung.....	47
4.6.3	Kenngößen der Form.....	48
4.6.4	Beispiele zu den Stichprobenkenngößen	50
5	Direkter und indirekter Schluss	53
6	Statistische Tests.....	58
6.1	Prinzipieller Ablauf eines statistischen Tests.....	58
6.2	z-Test	59
6.3	Fehlentscheidungen bei statistischen Tests	61
6.4	Vertrauensbereich von Mittelwerten (σ der Grundgesamtheit unbekannt)	63
6.4.1	t-Verteilung	63
6.4.2	Nomogramm zur Bestimmung des Vertrauensbereichs für μ	64



6.5	Zufallsstrebereich und Vertrauensbereich der Standardabweichung	66
6.6	Test auf Zufälligkeit.....	67
6.7	Ausreißertest nach Grubbs.....	68
7	Vergleich zweier Messreihen.....	69
7.1	F-Test	69
7.2	t-Test	70
7.2.1	t-Test für Stichproben mit gleichen Varianzen	70
7.2.2	t-Test für Stichproben mit ungleichen Varianzen	72
7.3	Differenztest	74
8	Verknüpfungen von Zufallsvariablen	75
9	Zerlegung von Mischverteilungen.....	77
10	Fehlerfortpflanzungsgesetz	82
11	Stichprobenplan für kontinuierliche Merkmale	83
12	Tabellen	87
	Literaturverzeichnis	104
	Formelzeichen und Begriffe	106
	Index.....	109



1 Einleitung

Statistik ist ein Teilgebiet der Mathematik, das der Aufgabe dient, Daten zu beschreiben, auszuwerten und zu beurteilen. Ihr Ziel ist letztlich die Vorbereitung von Entscheidungen.

Die Statistik wird gewöhnlich in einem Atemzug mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung genannt und mit dieser unter dem Oberbegriff Stochastik zusammengefasst. Dieser aus dem Griechischen stammende Begriff bedeutet so viel wie „Kunst des geschickten Vermutens“. Er bringt zum Ausdruck, dass der Anwender statistischer Methoden versucht, auf der Grundlage eines begrenzten Wissens um einen Sachverhalt eine der Situation angemessene Theorie aufzustellen, die ihm eine bestmögliche Entscheidung erlaubt.

Der Anwender durchläuft dabei oft mehrfach eine Folge von Schritten, die etwa folgendermaßen zusammengefasst werden können:

1. Beschreibung, Darstellung (Visualisierung) und Veranschaulichung von experimentell ermittelten oder „beobachteten“ Daten.
2. Konkretisierung einer „Vermutung“ über ein dem Datensatz zugrundeliegendes „einfaches“ mathematisches Modell unter Berücksichtigung der bei der Datensammlung vorliegenden Situation.
3. Überprüfung des Modells auf Verträglichkeit mit den vorliegenden Daten (Beobachtungen).
4. Entscheidungsfindung auf Grundlage des in 2. postulierten und nach 3. nicht widerlegbaren Modells.

In diesem Zusammenhang werden statistische Tests angewandt, um zu überprüfen, ob ein gewähltes Modell grundsätzlich geeignet ist, einen Datensatz zu beschreiben oder nicht. Dabei wird durch die Wahl einer (den Auswirkungen der im 4. Schritt getroffenen Entscheidung) angemessenen Irrtumswahrscheinlichkeit vorgegeben, wie groß die Abweichung der realen Daten von den entsprechenden Modelldaten in ihrer Gesamtheit sein darf, um das Modell noch als adäquat akzeptieren zu können. Ein solcher Test erfolgt selbstverständlich nur aufgrund rein mathematischer Gesichtspunkte. Dementsprechend kann er keine Aussage darüber machen, inwieweit es prinzipiell überhaupt sinnvoll ist, in einem konkreten Fall die physikalische Wirklichkeit durch ein fiktives mathematisches Idealbild zu beschreiben.

Ziel dieser Unterlage ist es, einige der im vorstehend beschriebenen Zusammenhang als wichtig erachteten Verfahren darzustellen und im Einzelfall auch damit verbundene Schwierigkeiten aufzuzeigen.



2 Darstellung und Veranschaulichung von Daten

Aufgrund der ständig besser werdenden Rechnerausstattung und des vielfältigen Angebots an preiswerter Statistiksoftware ist heutzutage kaum noch jemand gezwungen, Messdaten „von Hand“ auszuwerten. Selbstverständlich ist die leichte Verfügbarkeit leistungsfähiger Statistikprogramme grundsätzlich zu begrüßen, jedoch können diese den Anwender dazu verleiten, die Auswertung von Messdaten als rein statistisches Problem zu betrachten. Der Begriff „Auswerten“ wird dabei nur allzu leicht auf die Anwendung mathematischer Rechenverfahren beschränkt oder sogar mit dieser gleichgesetzt. Tatsächlich aber sollte „Auswerten“ als Folge von Denkprozessen verstanden werden, welche die ermittelten Messdaten unter Berücksichtigung des physikalisch-technischen Sachverhalts, in dessen Rahmen sie entstanden sind, bewerten und schließlich zu Entscheidungen über das weitere Vorgehen führen. Demzufolge würde die Absicht, die in diesem Sinne verstandene „Auswertung von Messreihen“ zu erklären, bedeuten, menschliches Denken und den Prozess der Erkenntnisgewinnung erklären zu wollen.

Die Abhandlung dieses eher philosophischen Themas kann natürlich nicht Ziel dieser Unterlage sein. Hier soll vielmehr eine Sammlung von graphischen Darstellungsmöglichkeiten und in sich abgeschlossenen statistischen bzw. allgemein mathematischen Einzelverfahren vorgestellt werden, die das „Auswerten“ unterstützen es aber niemals ersetzen können. Ansonsten wäre ein Expertensystem programmierbar, das beispielsweise nach Eingabe der im Rahmen eines Experiments gewonnenen Messdaten auf Knopfdruck eine Analyse dieser Daten durchführt und ohne Kenntnis des durch das Experiment untersuchten Sachverhalts sowie der dem Experiment zugrundeliegenden Fragestellung eine eindeutige Aussage (Antwort) liefert. Dies ist offenbar ein Widerspruch in sich. Im vorliegenden 2. Kapitel soll verdeutlicht werden, dass die Veranschaulichung von Daten ein wesentlicher und allzu oft vernachlässigter Bestandteil des Auswertens von Messreihen ist.

2.1 Urwertdiagramm

Betrachten wir dazu nachstehende Tabelle von 100 in zeitlicher Reihenfolge ermittelten Messwerten und stellen uns vor, wir sollten diesen Datensatz mit wenigen Worten beschreiben. Wie würde man vorgehen? Wäre es hilfreich, die Werte in den Taschenrechner einzugeben, um den Mittelwert und die Standardabweichung zu berechnen?

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
23,85	23,82	23,83	24,08	24,08	24,06	24,04	24,30	24,34	24,25
23,90	23,88	23,85	24,12	24,09	24,08	24,04	24,33	24,30	24,31
23,89	23,86	23,92	24,16	24,14	24,08	24,12	24,07	24,38	24,33
23,96	23,94	23,88	23,92	24,15	24,13	24,12	24,15	24,37	24,31
23,95	23,93	23,95	23,92	24,16	24,17	24,16	24,14	24,40	24,42
23,99	23,93	23,94	23,96	24,20	24,17	24,17	24,10	24,16	24,40
23,97	23,96	23,97	23,96	23,95	24,21	24,22	24,20	24,19	24,44
23,79	23,98	24,05	24,07	23,95	24,28	24,22	24,23	24,20	24,37
23,79	24,01	24,00	23,98	24,02	24,24	24,26	24,26	24,23	24,25
23,80	24,05	24,07	24,05	24,02	24,03	24,24	24,29	24,26	24,24

Tabelle 2.1



Selbst bei längerer Betrachtung der Werte in Tabelle 2.1 ist es nur schwer möglich, wesentliche Merkmale dieses Datensatzes herauszufinden. Demgegenüber sind beim Blick auf die folgende graphische Darstellung der Werte in ihrer zeitlichen Reihenfolge (Urwertdiagramm) charakteristische Eigenschaften wie z.B. Anstiegsverhalten, Periodizität, Größtwert und Kleinstwert unmittelbar zu erfassen.

Ein Bild sagt mehr als tausend Worte!

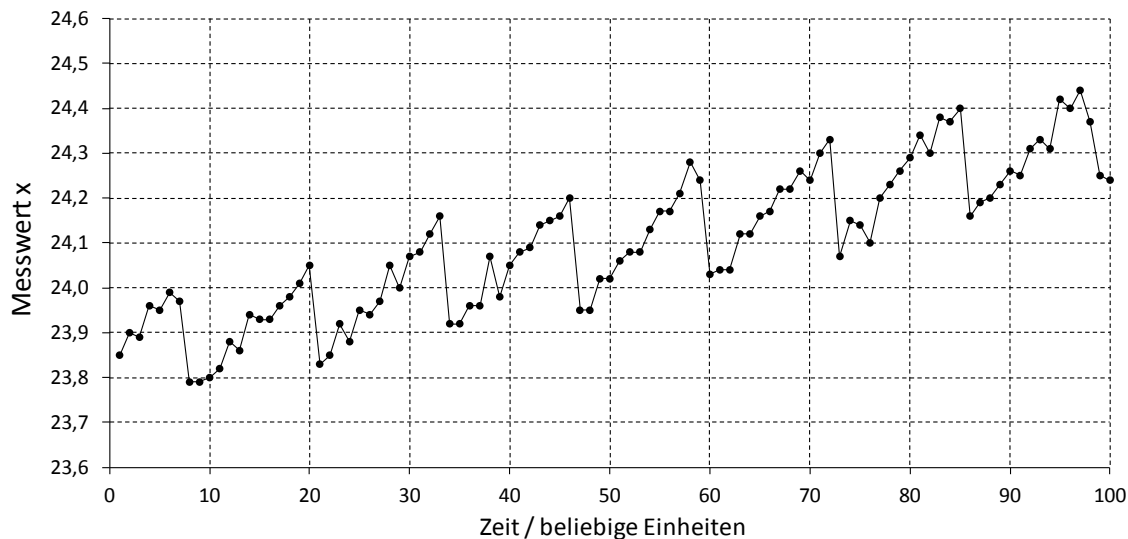


Bild 2.1: Urwertdiagramm des Datensatzes aus Tabelle 2.1

2.2 Histogramm

Teilt man die Zahlengerade (x-Achse) in einzelne aneinandergrenzende Bereiche auf, indem man deren Grenzen angibt, so spricht man von einer Klasseneinteilung. Durch Einsortieren der Werte eines Datensatzes in die einzelnen Klassen ergibt sich für jede Klasse eine Anzahl von Werten, die auf diese Klasse entfallen. Diese Zahl heißt absolute Häufigkeit.

Dividiert man die absoluten Häufigkeiten n_j jeweils durch die Gesamtzahl n aller Werte, so erhält man die relativen Häufigkeiten h_j . Eine Auftragung dieser relativen Häufigkeiten über den Klassen in Form aneinandergereihter Rechtecke heißt Histogramm. Das Histogramm vermittelt eine Vorstellung von der Werteverteilung.

Für das „Aussehen“ des Histogramms kann die Wahl der Klasseneinteilung von entscheidender Bedeutung sein. Es gibt jedoch für die Festlegung der Klasseneinteilung keine einheitliche starre Regel, sondern lediglich Empfehlungen, die nachstehend aufgeführt sind. Statistikprogramme benötigen zur Erstellung eines Histogramms selbstverständlich eine eindeutig vorgegebene mathematische Schrittfolge. Wie wir weiter unten sehen werden, entspricht das Ergebnis dieser Operationen jedoch nicht immer den Vorstellungen des Anwenders. Die Programme bieten daher in der Regel die Möglichkeit, beispielsweise die Anzahl der Klassen und die Klassenbreite manuell zu verändern. Letztlich muss man sich bei der Erstellung eines Histogramms an den individuellen Besonderheiten des vorliegenden Datensatzes orientieren.



Schrittfolge zur manuellen Erstellung eines Histogramms
aus n Einzelwerten x_i eines Datensatzes:

1. Wahl einer geeigneten Klasseneinteilung

Festlegung der Klassenzahl k

Faustregel: $25 \leq n \leq 100 \quad k = \sqrt{n}$
 $n > 100 \quad k = 5 \cdot \log(n)$

Die Klasseneinteilung sollte bei möglichst fester Klassenbreite so gewählt werden, dass sich „einfache Zahlen“ als Klassengrenzen ergeben. Die erste Klasse sollte nicht nach links, die letzte Klasse nicht nach rechts offen sein. Leere Klassen, d.h. solche, auf die kein Wert des Datensatzes entfallen, sind zu vermeiden.

2. Einsortieren der Werte x_i in die einzelnen Klassen

Bestimmung der absoluten Häufigkeiten n_j für $j = 1, 2, \dots, k$

3. Berechnung der relativen Häufigkeiten $h_j = \frac{n_j}{n}$ für $j = 1, 2, \dots, k$

4. Auftragung der relativen Häufigkeiten h_j (y-Achse) über den einzelnen Klassen der Klasseneinteilung (x-Achse)

Die Empfehlung, die Klassenbreite b gemäß $b = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k - 1}$ zu berechnen (x_{\min} bezeich-

net den Kleinstwert, x_{\max} den Größtwert des Datensatzes), hat meist Klassengrenzen mit mehreren Nachkommastellen zur Folge, was für die manuelle Histogrammerstellung un- zweckmäßig ist und darüber hinaus zu leeren Klassen führen kann. Im Rahmen eines Rechnerprogramms ist eine solche Festlegung jedoch durchaus brauchbar, da sie in Kom- bination mit einer automatischen, datenabhängigen Unterteilung und Beschriftung der Koordinatenachsen (Autoskalierung) sicherstellt, dass das Histogramm alle Werte bein- haltet und das Histogramm selbst vollständig auf dem Bildschirm wiedergegeben wird. Sie hat jedoch auch ihre Tücken. Beispielsweise kann ein „Ausreißer“, der wesentlich größer ist als alle übrigen Werte, dazu führen, dass die Klassenbreite sehr groß wird. In einem ungünstigen Fall kann dies zur Folge haben, dass dieser eine Wert der äußersten rechten Klasse zugeordnet wird, und alle übrigen Werte in der äußersten linken Klasse zu liegen kommen. Die Klassen dazwischen bleiben dann leer.



BEISPIEL 2.1:

Wir betrachten eine Stichprobe von 42 Teilen für deren Merkmal „Länge“ eine Toleranz $T = 0,1\text{mm}$ vorgegeben ist. Die in Tabelle 2.2 aufgeführten Einzelwerte sind Abweichungen des jeweiligen Längenmaßes vom Sollwert C (Mittenwert des Toleranzbereichs) in $1/100\text{mm}$. Sie wurden in aufsteigender Reihenfolge sortiert. Die Auflösung des verwendeten Messgeräts beträgt $0,002\text{mm}$, erfüllt also die im Rahmen der Messgerätefähigkeitsuntersuchung geforderte Bedingung $\text{Auflösung} \leq 5\% \cdot T$ (aktueller Wert s. [6]).

Abweichung vom Sollwert $C / 1/100\text{mm}$						
-3,8	-2,8	-2,6	-2,4	-2,2	-2,0	-1,8
-1,6	-1,6	-1,4	-1,2	-1,2	-1,0	-0,8
-0,8	-0,8	-0,6	-0,6	-0,4	-0,2	-0,2
0,0	0,0	0,2	0,2	0,4	0,6	0,6
0,8	0,8	1,0	1,2	1,2	1,4	1,6
1,6	1,8	2,0	2,4	2,6	2,8	3,2

Tabelle 2.2

Entsprechend der Faustregel ist $k = \sqrt{42} \approx 6,48$. Die Anzahl der Klassen sollte also entweder gleich sechs oder gleich sieben gewählt werden. Tabelle 2.3 gibt die von einem Rechnerprogramm nach manueller Eingabe der Klassenzahl $k=7$ erstellte Klasseneinteilung, sowie die jeweilige absolute bzw. relative Häufigkeit wieder. Als Klassenbreite berechnete das Programm den Wert $b = \frac{3,2 - (-3,8)}{7 - 1} = \frac{7}{6} \approx 1,166$.

Klasse	1	2	3	4	5	6	7
untere Klassengrenze	-4,383	-3,217	-2,050	-0,883	0,283	1,450	2,617
obere Klassengrenze	-3,217	-2,050	-0,883	0,283	1,450	2,617	3,783
absolute Häufigkeit	1	4	8	12	9	6	2
relative Häufigkeit	2,4 %	9,5 %	19,0 %	28,6 %	21,4 %	14,3 %	4,8 %
relative Summenhäufigkeit	2,4 %	11,9 %	30,9 %	59,5 %	80,9 %	95,2 %	100 %

Tabelle 2.3

Bild 2.2 zeigt das zugehörige Histogramm. Bei Beibehaltung der Klassenzahl sieben und manueller Festlegung der Klassenbreite auf 1,2 und der unteren Grenze der ersten Klasse auf -4,4 ergab sich das Histogramm nach Bild 2.3.

Die Bilder 2.4 und 2.5 zeigen die resultierenden Histogramme für die Wahl der Klassenzahl 6. Die Einstellung für die Klassenbreite ist in beiden Fällen $b = 1,4$, lediglich die untere Grenze der ersten Klasse wurde in der angegebenen Weise verändert. Beim Histogramm nach Bild 2.5 entspricht die obere Grenze der 5. Klasse dem Maximalwert der Tabelle 2.2. Die sechste Klasse bleibt daher leer.



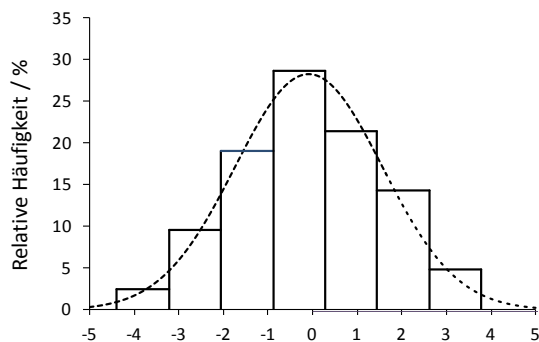


Bild 2.2: Klassenzahl: $k = 7$
Klassenbreite: $b = 1,166$
untere Grenze der 1. Klasse: $-4,383$

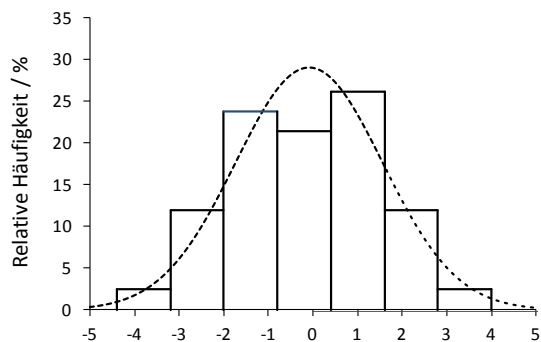


Bild 2.3: Klassenzahl: $k = 7$
Klassenbreite: $b = 1,2$
untere Grenze der 1. Klasse: $-4,4$

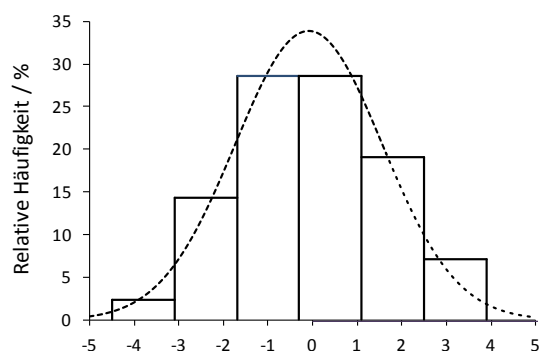


Bild 2.4: Klassenzahl: $k = 6$
Klassenbreite: $b = 1,4$
untere Grenze der 1. Klasse: $-4,5$

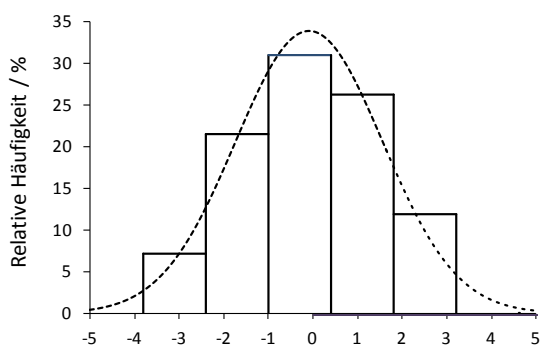


Bild 2.5: Klassenzahl: $k = 6$
Klassenbreite: $b = 1,4$
untere Grenze der 1. Klasse: $-3,8$

Es ist offenbar ein Irrtum anzunehmen, die Erzeugung eines Histogramms sei ein Vorgang mit einem eindeutigen Ergebnis. Die gezeigten Beispiele sind eher noch harmloser Natur.

Wählt man die Klassenbreite kleiner als die Auflösung des Messgeräts, so entstehen zwangsläufig „Lücken“ im Histogramm, d.h. leere Klassen.

Schließlich soll in Bezug auf die Bilder 2.2 bis 2.5 noch auf eine weitere Besonderheit hingewiesen werden.

Die auf eine Klasse eines Histogramms entfallende relative Häufigkeit entspricht der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Wert der untersuchten Grundgesamtheit in diese Klasse zu liegen kommt. Mathematisch ausgedrückt entspricht die relative Häufigkeit über einer Klasse einer Schätzung der Wahrscheinlichkeit, mit der die der Grundgesamtheit zugrundeliegende Zufallsgröße X Werte innerhalb der Klassengrenzen (der betrachteten Klasse) annimmt.

Die Summe der relativen Häufigkeiten aller Klassen eines Histogramms hat den Wert eins (100 %). Interpretiert man die Gesamtfläche eines Histogramms als Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsgröße X Werte innerhalb des durch das Histogramm überdeckten Bereiches auf der x -Achse annimmt, so muss diese Gesamtfläche ebenfalls den Wert eins haben.

Dies ist jedoch nur für die Klassenbreite $b = 1$ richtig, ansonsten entspricht die Gesamtfläche der Klassenbreite.



Dies hat zur Folge, dass die Histogrammflächen und die Flächen unter den Gaußschen Glockenkurven in Bild 2.3 und Bild 2.4 jeweils verschieden sind.

In der Praxis kann es also vorkommen, dass man zu zwei Messreihen des gleichen untersuchten Sachverhalts (z.B. eigene Messung und Kundenmessung) zwei Histogramme erhält, die wegen unterschiedlicher Klassenbreiten unterschiedliche optische Eindrücke vermitteln und einen direkten Vergleich erschweren oder gänzlich unmöglich machen.

Der wichtigste Aspekt bei der Erstellung eines Histogramms ist der damit einhergehende Verlust an Information über die Urwerte an sich und insbesondere deren zeitliche Reihenfolge. Um dies zu verdeutlichen geben wir mit den Bildern 2.6, 2.7 und 2.8 spezielle Wertefolgen wieder, die offenbar völlig verschiedene physikalische Ursprünge haben müssen. Wie sehen wohl die zugehörigen Histogramme aus?

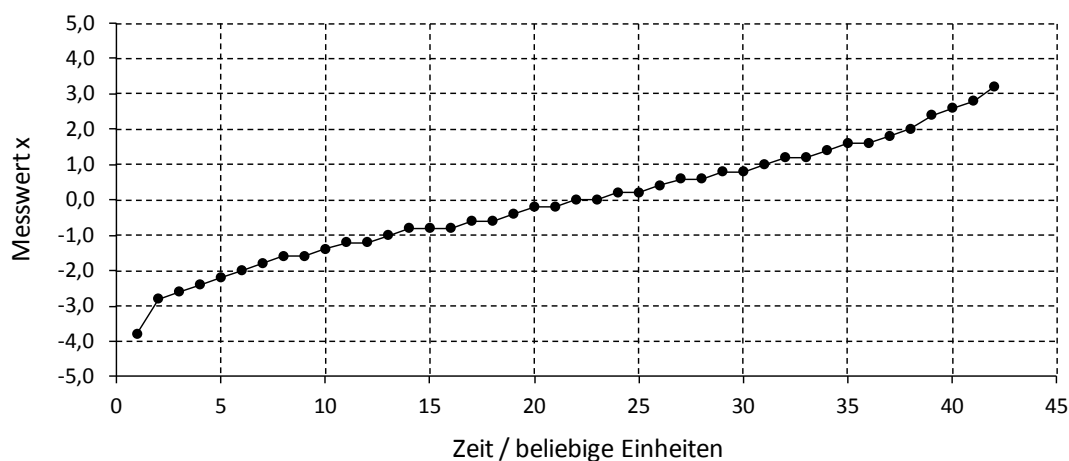


Bild 2.6: Urwertdiagramm zu Tabelle 2.2

Das verblüffende an diesen Bildern ist die Tatsache, dass die darin dargestellten Werte bis auf die zeitliche Reihenfolge alle dem Datensatz nach Tabelle 2.2 entsprechen und gemäß der Klasseneinteilung nach Tabelle 2.3 alle zum gleichen Histogramm (Bild 2.2) führen. Dieses Beispiel ist zugegebenermaßen konstruiert. Es zeigt jedoch auf frappierende Weise, wie bedeutsam die Darstellung einer Urwertfolge sein kann, wenn der Parameter Zeit bzw. die Rangfolge der Werte bei der Entstehungsgeschichte des Datenmaterials eine Rolle spielt.

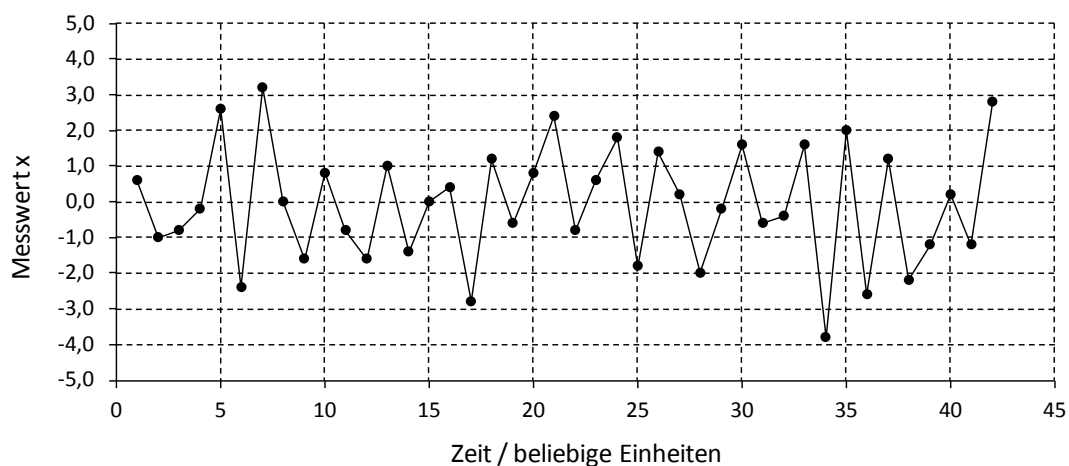


Bild 2.7: Urwertdiagramm zu Tabelle 2.2



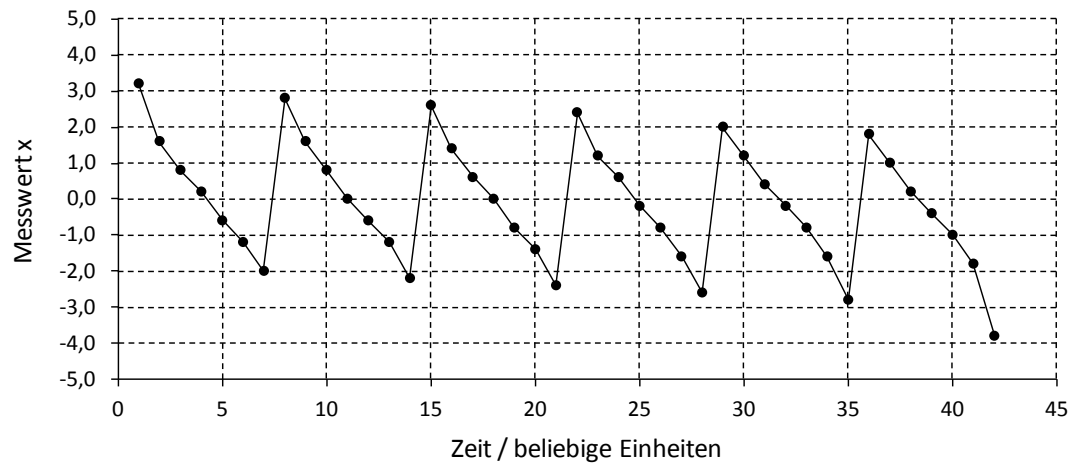


Bild 2.8: Urwertdiagramm zu Tabelle 2.2



2.3 Wertestrahldarstellung und Punktdiagramm

Die in Zusammenhang mit dem Histogramm genannten Schwierigkeiten lassen sich vermeiden, wenn man eine der folgenden Darstellungsmöglichkeiten wählt. In den Bildern 2.9 und 2.10 sind die Werte aus Tabelle 2.2 durch absolute Häufigkeiten über dem Wertestrahle veranschaulicht, wobei diese in Bild 2.9 durch Pfeile, in Bild 2.10 durch Kreise dargestellt sind. Beide Darstellungsarten ermöglichen im Gegensatz zu einem Histogramm die Rekonstruktion der Einzelwerte, wobei jedoch in allen drei Fällen die zeitliche Reihenfolge verloren geht. Sofern die Urwerte bei der Erfassung nicht gerundet wurden, lässt sich die Auflösung des Messgeräts unmittelbar aus dem kleinsten seitlichen Abstand der Pfeile bzw. Punkte zueinander abschätzen.

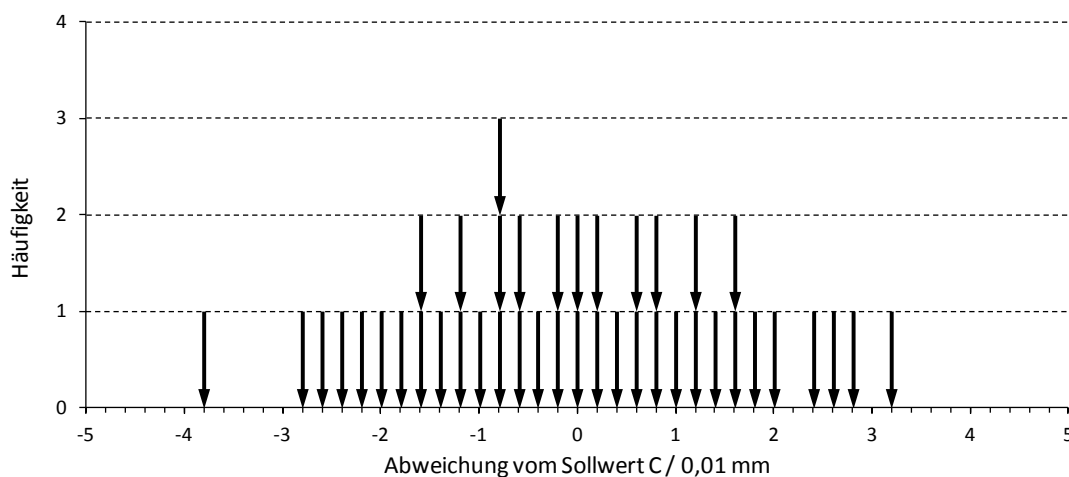


Bild 2.9: Schematische Darstellung der absoluten Häufigkeiten der Einzelwerte über dem Wertestrahle

Beim Punktdiagramm müssen wegen der Symmetrie der Kreise (Punkte) die Skalen der x-Achse und der y-Achse aufeinander abgestimmt sein, da ansonsten beispielsweise horizontal oder vertikal Lücken in der Darstellung auftreten, die Kreise zu klein werden oder überlappen. Dies benachteiligt diese Darstellungsform etwas gegenüber der Wertestrahldarstellung nach Bild 2.9.

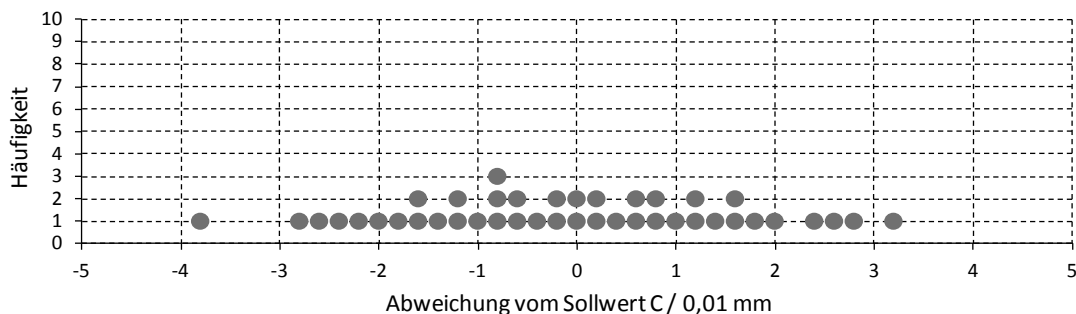


Bild 2.10: Punktdiagramm der Werte aus Tabelle 2.2



2.4 Stratifizierung

Der Begriff „Stratifizierung“ bedeutet so viel wie „Datentrennung“. Er soll daran erinnern, bei der Auswertung von Datenmaterial stets die Entstehungsgeschichte der vorliegenden Werte zu berücksichtigen. Eine geeignete Trennung (Gruppierung, Schichtung) von Messwerten liefert häufig wertvolle Hinweise auf den untersuchten Sachverhalt.

Als Beispiel sind in den Bildern 2.11 und 2.12 25 Mittelwerte von Fünferstichproben einer \bar{x} -s-Regelkarte dargestellt. Bei den Einzelwerten handelt es sich um Ergebnisse einer Trockenprüfung an Magnetventilen im Rahmen der ABS-Hydroaggregatefertigung.

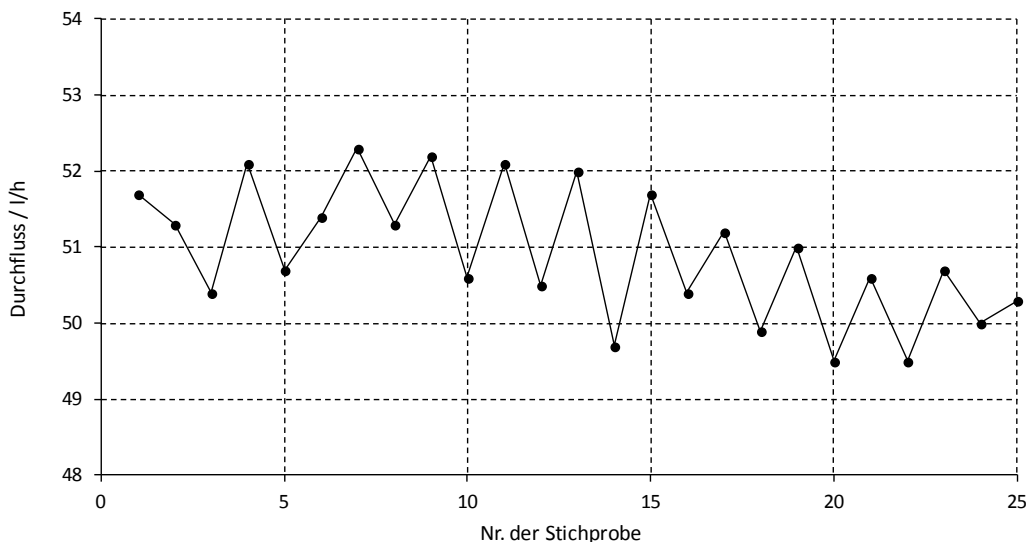


Bild 2.11: Schematische Darstellung eines Diagramms aus einer Qualitätsregelkarte

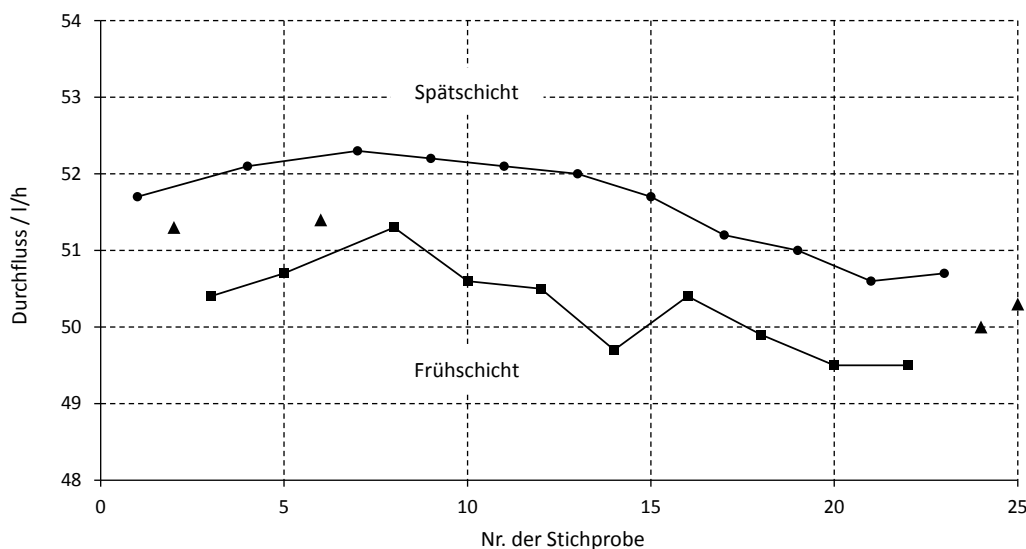


Bild 2.12: Schematische Darstellung eines Diagramms aus einer Qualitätsregelkarte (Trennung der Mittelwerte entsprechend Früh- und Spätschicht)

Berücksichtigt man die bei der Stichprobenentnahme auf der Regelkarte vermerkten Uhrzeiten und verbindet jeweils die während der Früh- bzw. der Spätschicht zu etwa gleichen Zeiten eingetragenen Punkte (Bild 2.12; die zu anderen Zeiten eingetragenen Punkte wurden ersichtlich ausgelassen), so offenbart sich ein deutlicher Unterschied. Aufgrund des Temperaturgangs der verwendeten Messapparatur wurden während der Spätschicht stets höhere Werte ermittelt als in der Frühschicht.



Stratifizierung ist ein elementares Werkzeug der Qualitätstechnik (vgl. [8]), das beispielsweise auch in den von Shainin (vgl. [7] und [21]) als Problemlösungsmethode u.a. empfohlenen Multi-Vari-Charts seinen Niederschlag findet.

Was eine „geeignete“ Datentrennung ist, und unter welchen übergeordneten Gesichtspunkten sie zu erfolgen hat, ist kein mathematisches Problem, sondern vielmehr eine Frage, die stets problemorientiert beantwortet werden muss.

2.5 Box Plot

Ein Box-Plot („Kasten-Zeichnung“) ist eine graphische Darstellung zur Veranschaulichung statistischer Eigenschaften eines Datensatzes. Meist werden innerhalb einer Darstellung mehrere „boxes“ wiedergegeben, die zu verschiedenen Datensätzen gehören. Sie ermöglichen einen schnellen visuellen Vergleich wesentlicher statistischer Merkmale dieser Datensätze ([11], [12], [21]).

Ein Beispiel für eine solche Darstellung zeigt das folgende Bild 2.13.

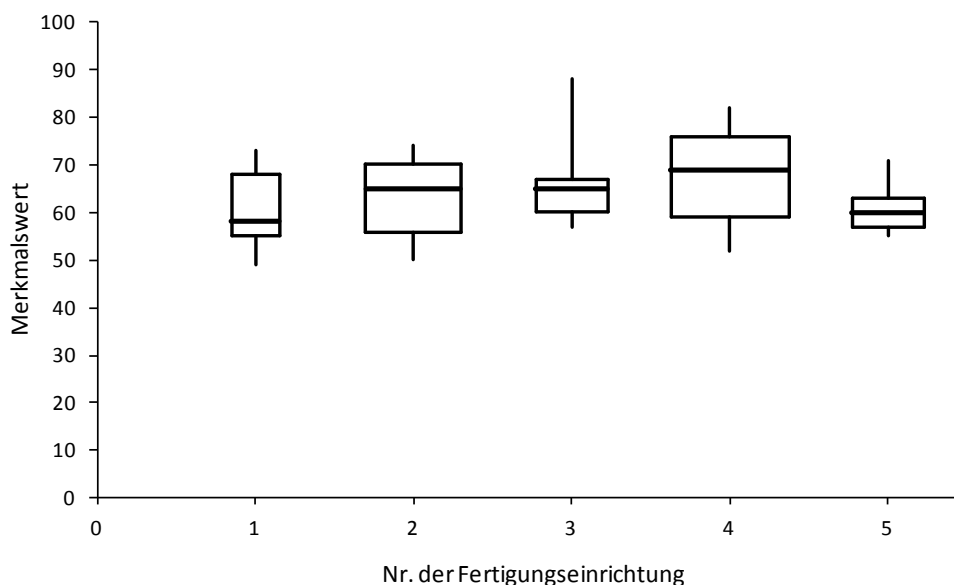


Bild 2.13: Box-Plot zu Merkmalswerten von Einspritzventilen, die auf verschiedenen Fertigungseinrichtungen hergestellt wurden.

Die einzelnen Merkmale jedes rechteckigen Kastens (box) haben folgende Bedeutung:

- Die Höhe der Box markiert einen Bereich (ein Intervall), in dem 50 % der Werte des Datensatzes liegen.
- Die Breite der Box kennzeichnet den Umfang der zugehörigen Stichprobe relativ zu den übrigen Stichprobenumfängen (relative Größe des Datensatzes).
- Die durchgezogene Linie innerhalb der Box entspricht dem Median (häufig wird zusätzlich der arithmetische Mittelwert als gestrichelte Linie eingezeichnet).
- Die senkrechten Linien oberhalb und unterhalb der Box verbinden diese mit den beiden Extremwerten (Größt- und Kleinstwert).

In der Literatur und bei Realisationen des Box-Plots in Statistikprogrammen sind häufig Varianten zu finden, die von diesen Festlegungen abweichen. Insbesondere lassen sich die Boxes auch horizontal über der x-Achse als Merkmalsachse darstellen.



Die von der Box ausgehenden Linien heißen „Whisker“, darum wird diese Darstellungsform auch Box-and-Whisker-Plot genannt.

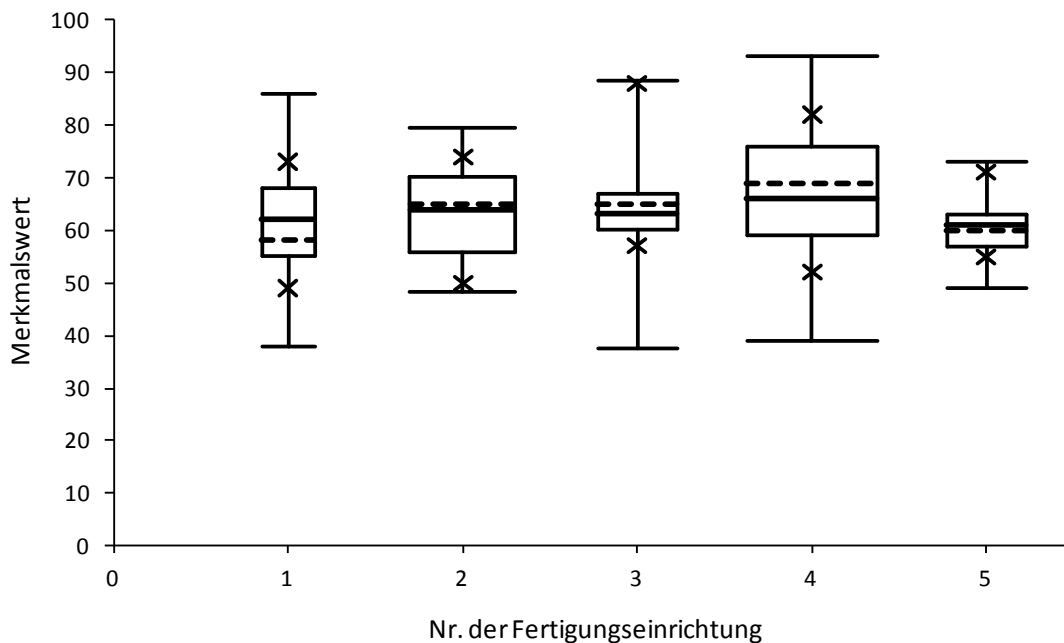


Bild 2.14: Box-Plot zu den Datensätzen, auf dem auch das Bild 2.13 basiert. Ein Vergleich der Bilder zeigt, dass der visuelle Eindruck trotz gleicher Datenbasis unterschiedlich sein kann und davon abhängt, nach welchen Konventionen die Darstellung erfolgt.

Die einzelnen Merkmale der Darstellung haben in diesem Fall folgende Bedeutung:

- Die Höhe der Box markiert einen Bereich (ein Intervall), in dem 50 % der Werte der Grundgesamtheit liegen, sofern diese normalverteilt ist.
- Die Breite der Box kennzeichnet den Umfang der zugehörigen Stichprobe relativ zu den übrigen Stichprobenumfängen.
- Die durchgezogene Linie innerhalb der Box entspricht dem arithmetischen Mittelwert, die gestrichelte Linie dem Median.
- Die senkrechten Linien kennzeichnen den $\bar{x} \pm 3s$ -Bereich.
- Die Sterne auf den senkrechten Linien oberhalb und unterhalb der Box markieren die beiden Extremwerte (Größtwert und Kleinstwert der Stichprobe).

Zusätzliche Darstellungsmöglichkeiten:

Will man Stichprobenergebnisse von unterschiedlich spezifizierten Merkmalen vergleichen, so ist es hilfreich, wenn die Toleranzen bzw. die Spezifikationsgrenzen normiert dargestellt werden. Der obere Grenzwert entspricht dann der Zahl +1 und der untere Grenzwert der Zahl -1. Anhand einer solchen Darstellung lässt sich recht gut die jeweilige Lage im Toleranzbereich und die relative Toleranzausnutzung beurteilen.

Manche Statistikprogramme bieten die Möglichkeit, bei der Darstellung nach Bild 2.14 innerhalb der Box zusätzlich Vertrauensbereiche des Mittelwerts oder des Medians durch (kleinere) Rahmen zu markieren.



3 Modellbildung

Die im Abschnitt 2 dargestellten Methoden der beschreibenden Statistik werden benutzt, um die gewonnenen Daten sozusagen der menschlichen Anschauung zugänglicher zu machen. Dabei steht der Wunsch im Vordergrund, die in den Einzelwerten enthaltene Information so aufzubereiten, dass sie mit wenigen Worten oder mit einer kleineren Anzahl von Daten beschreibbar wird.

Dies ist nicht unbedingt ein bewusst gesteuerter Vorgang. Trägt man etwa eine Wertefolge entsprechend der zeitlichen Reihenfolge ihres Auftretens als Punkte in einem Urwertdiagramm auf, so versucht man unbewusst wohl immer, charakteristische Merkmale (Maximum, Minimum, Anfangspunkt, Endpunkt, ungefähre „Mitte“) oder einfache Strukturen dieses Bildes zu entdecken. Dabei hängt es ganz von der „Anmutung“ des Bildes ab, worauf die Aufmerksamkeit gelenkt wird und welche Struktur erkannt wird.

Ein Datensatz mit nahezu identischen Werten liefert eine Darstellung von Punkten, deren Abstände von Punkt zu Punkt vergleichsweise klein sind (natürlich spielt hier die Skalierung eine Rolle) wodurch das geistige Auge geradezu gezwungen wird, eine Ausgleichsgerade durch die Punkte zu legen.

Gleiches gilt für „nichtlineare“ Punktfolgen. Die räumliche Nähe benachbarter Punkte erzwingt auch hier die Approximation durch „glatte“ Kurven. Man spricht deshalb gerne von erkennbaren Gesetzmäßigkeiten (Konstanz, Trend, Periodizität). Bereits hier findet eine unbewusste Vereinfachung statt, bei der sich das Auge durch wenige, nicht in diese Struktur passende Punkte („Ausreißer“) kaum beirren lässt. Nimmt deren Anzahl jedoch zu, d.h. nehmen die Abstände (zeitlich) benachbarter Punkte zu, so wird es i.a. auch schwieriger sein, eine Struktur in der Punktfolge zu entdecken und man wird geneigt sein, von einem chaotischen (zufälligen) „Verlauf“ oder „Verhalten“ zu sprechen.

Der Übergang zur Darstellungsform „Histogramm“ ist ein Schritt der Abstraktion, bei dem unter Verzicht auf einen Teil der ursprünglichen Information (die Einzelwerte und deren zeitliche Reihenfolge) versucht wird, anhand der absoluten oder relativen Häufigkeiten innerhalb einer strenggenommen willkürlichen Klasseneinteilung eine Ordnung zu finden.

Auch hier orientiert man sich wieder an dem „Aussehen“ des Histogramms, beispielsweise seiner Breite, Lücken (leeren Klassen), Unterschiede in den Säulenhöhen, Symmetrie und versucht, eine „erkennbare Gesetzmäßigkeit“ zu finden, d.h. der Gestalt der aneinandergrenzenden senkrechten Säulen in ihrer Gesamtheit eine einfache zweidimensionale Struktur (Rechteck, Dreieck, Trapez) zuzuordnen. Dies entspricht einer induktiven Denkweise.

Man versucht also letztendlich bei einer graphischen Auswertung, sich von den individuellen Messwerten zu lösen und Schlüsse auf die unbekannte und in vielen Fällen (Beispiel: Maschinen- und Prozessfähigkeitsuntersuchung) nicht real existierende Grundgesamtheit zu ziehen.



3.1 Glättung von Punktfolgen

Der oben angesprochenen Neigung des menschlichen „Auges“, Punktfolgen zu glätten, wird durch ein in diesem Abschnitt beschriebenes Verfahren Hilfestellung geleistet. Dies ist ein erster Schritt in Richtung einer häufig angestrebten Datenbeschreibung durch einfache mathematische Funktionen. Das Verfahren besteht einfach darin, jeden Punkt einer Punktfolge durch einen Mittelwert zu ersetzen, der aus seinen $2 \cdot m$ nächsten Nachbarn und ihm selbst berechnet wird. Der k -te Wert x_k^{alt} wird also durch

$$x_k^{\text{neu}} = \frac{1}{2 \cdot m + 1} \cdot \sum_{i=-m}^m x_{k+i}^{\text{alt}} = \frac{x_{k-m}^{\text{alt}} + x_{k-m+1}^{\text{alt}} + \dots + x_{k+m-1}^{\text{alt}} + x_{k+m}^{\text{alt}}}{2 \cdot m + 1} \text{ ersetzt.}$$

Da die ersten m Werte einer Folge von n Zahlen weniger als m „linke“ Nachbarn besitzen, werden diese m ersten Werte bei der Glättung unverändert gelassen. Gleiches gilt für die letzten m Werte der Zahlenfolge. Für den Laufindex k gilt daher

$$k = m + 1, m + 2, \dots, n - m.$$

Die Wirkungsweise einer solchen Glättung soll anhand von Bild 3.1 verdeutlicht werden.

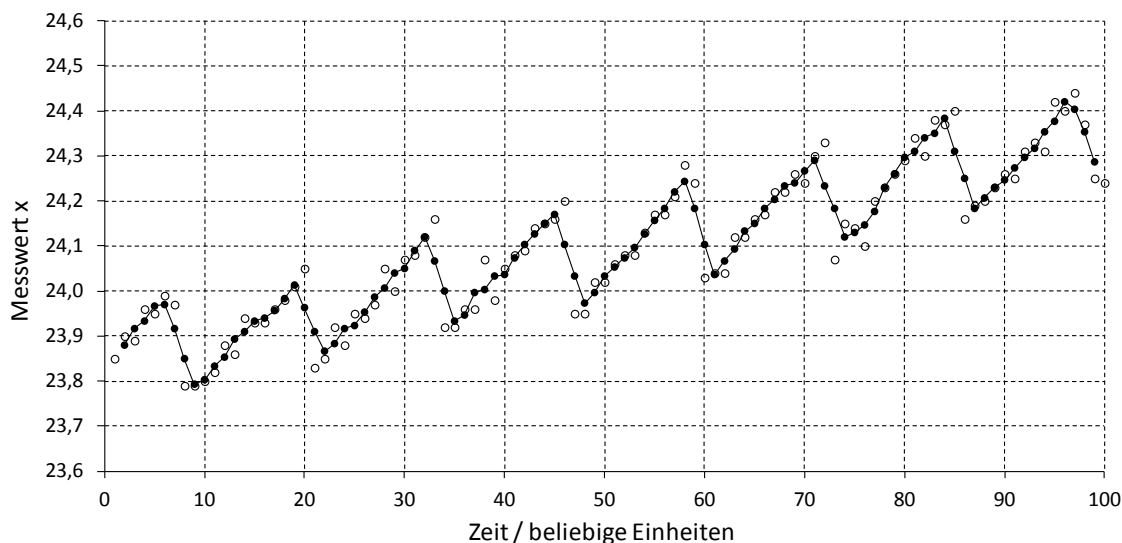


Bild 3.1: Ergebnis eines Glättungsalgorithmus. Offene Kreise: ursprüngliche Messwerte, ausgefüllte Kreise: „Messwerte“ nach der Glättung

Die offenen Kreise entsprechen den Punkten in der Darstellung von Bild 2.1. Die zugehörigen Werte aus Tabelle 2.1 wurden entsprechend der obigen Vorschrift mit $m = 1$ behandelt, d.h. der k -te Wert x_k^{alt} wurde durch $x_k^{\text{neu}} = \frac{x_{k-1}^{\text{alt}} + x_k^{\text{alt}} + x_{k+1}^{\text{alt}}}{3}$ ersetzt, mit

$k = 2, 3, \dots, 99$.

Es gibt sowohl für die Behandlung der Anfangs- und Endwerte der Zahlenfolge als auch für den Algorithmus selbst einige Varianten. Beispielsweise können bei der Mittelwertbildung Gewichtungsfaktoren benutzt werden, welche die Wirkung der vom k -ten Wert „weiter entfernt“ liegenden Nachbarn abschwächen. Die Vorgehensweise ähnelt der gleitenden Mittelwertbildung, bei der jedoch lediglich die vorangegangenen m Werte berücksichtigt werden können. Die „Filterwirkung“ der gleitenden Mittelwertberechnung wird gelegentlich verwendet, um bei kontinuierlich anfallenden Werten eines störungsbehafteten Messsignals eine stabile Anzeige zu erzeugen.



Aus Bild 3.1 ist ersichtlich, dass zwar die gewünschte Glättung der Punktfolge tatsächlich erreicht wird, diese aber andererseits eine Veränderung erfährt, die zu falschen Schlüssen führen kann. Beispielsweise wird die Steigung der rechten Flanke eines „Zahns“ gegenüber der ursprünglichen Steigung deutlich verringert (vgl. Bild 2.1).

Es ist somit festzustellen, dass durch die Glättung die ursprünglich in den Daten enthaltene Information verfälscht wird. Zudem kann niemals begründet werden, warum die „glättete“ Kurve die „richtigere“ d.h. die Wirklichkeit besser beschreibende Kurve sein sollte.

3.2 Lineare Interpolation

Die lineare Interpolation ist ein gebräuchliches Verfahren, um beispielsweise Zwischenwerte einer tabellierten Funktion zu bestimmen. Dabei wird der gekrümmte Kurvenverlauf der Funktion $y=f(x)$ zwischen zwei Stützstellen (Begriffserklärung in Abschnitt 3.5) x_1 und x_2 durch ein Stück einer Geraden angenähert, die durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ verläuft.

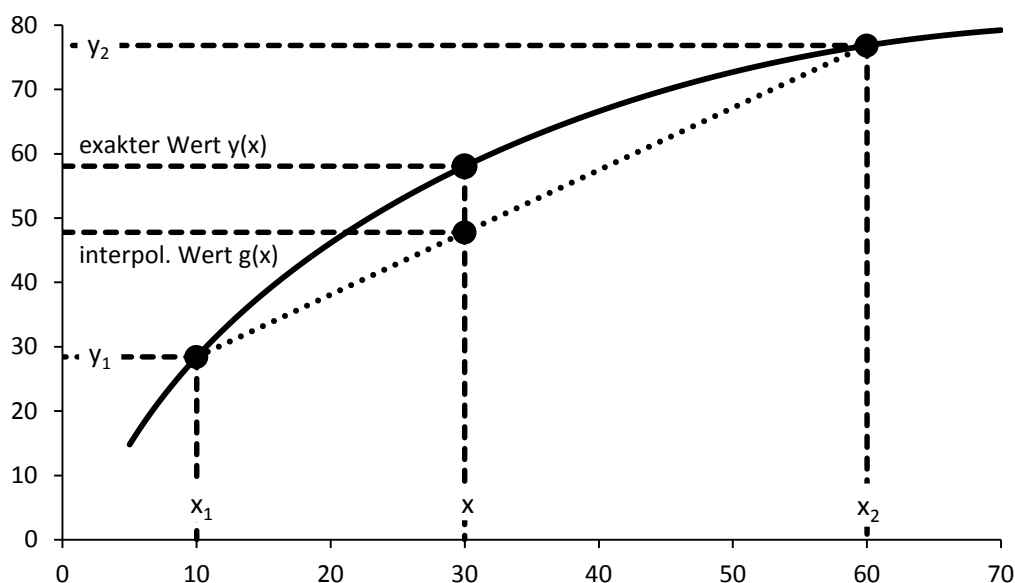


Bild 3.2: Lineare Interpolation

Aus der Verhältnisgleichung $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ergibt sich durch Auflösen nach y die Geradengleichung für die lineare Interpolation:

$$y = g(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Setzt man den interessierenden Wert x mit $x_1 \leq x \leq x_2$ in diese Geradengleichung ein, so erhält man den gesuchten Zwischenwert.



BEISPIEL 3.1:

Mit Hilfe einer Tabelle der Standardnormalverteilung soll ein Schwellenwert (Quantil) u zur Wahrscheinlichkeit $P = \Phi(u) = 99\%$ bestimmt werden. In der Tabelle sind die Werte von u nur in Schritten von 0,1 angegeben:

$$u = 2,1 \quad \Phi(u) = 0,9821$$

$$u = 2,2 \quad \Phi(u) = 0,9861$$

$$u = 2,3 \quad \Phi(u) = 0,9893$$

$$u = 2,4 \quad \Phi(u) = 0,9918$$

$$u = 2,5 \quad \Phi(u) = 0,9938$$

Der gesuchte Wert von u liegt offenbar zwischen 2,3 und 2,4.

Setzt man die Wertepaare $x_1 = 0,9893$, $y_1 = 2,3$ und $x_2 = 0,9918$, $y_2 = 2,4$ sowie $x = 0,99$ in die obige Gleichung ein, so erhält man den gewünschten Wert:

$$u = g(0,99) = 2,3 + \frac{2,4 - 2,3}{0,9918 - 0,9893} \cdot (0,99 - 0,9893) = 2,328.$$

Wie aus Bild 3.2 ersichtlich ist, setzt man bei Anwendung der linearen Interpolation voraus, dass die betrachtete Funktion sich im Bereich zwischen den Stützstellen x_1 und x_2 einigermaßen „anständig“ verhält, d.h., dass der Interpolationsfehler $y(x) - g(x)$ hinreichend klein ist.

Eine solche Abschätzung ist i.a. problemlos, wenn es sich wie im Beispiel um eine bekannte Funktion handelt und der Abstand der Stützstellen $x_2 - x_1$ klein genug ist. Aus den gewählten Formulierungen ist ersichtlich, dass die Angabe von konkreten Voraussetzungen zur Anwendbarkeit der linearen Interpolation für den allgemeinen Fall nicht möglich ist. Es muss im Einzelfall entschieden werden, was „anständiges Verhalten“ bzw. „hinreichend kleiner Interpolationsfehler“ jeweils bedeutet.

In Lehrbüchern zur Statistischen Versuchsplanung werden Verfahren beschrieben, bei denen anhand vorgegebener Versuchsanweisungen (orthogonale Felder) mehrere Einflussgrößen (Parameter) auf jeweils zwei Stufen variiert werden. Aus den erhaltenen Messergebnissen kann rein formal eine sogenannte (durch eine Multilinearform beschriebene) Antwortfunktion berechnet werden, von der man annimmt, dass sie den untersuchten physikalischen Sachverhalt in erster Näherung richtig beschreibt. Ohne zusätzliche Versuche mit Zwischeneinstellungen der Versuchsparameter kann jedoch nicht überprüft werden, ob diese Annahme gerechtfertigt ist oder nicht (vgl. [7]).

Konzentriert man sich in dem Fall auf einen der untersuchten Parameter, so entspricht das dabei vorliegende Problem der Situation nach Bild 3.2, wobei die beiden Werte y_1 und y_2 der unbekannten Funktion $y = f(x)$ an den Stützstellen x_1 und x_2 anhand der Versuchsergebnisse geschätzt werden. Die Berechnung theoretischer Zwischenwerte der Antwortfunktion durch lineare Interpolation birgt die Gefahr von Fehlinterpretationen, wenn das Modell „linearer Zusammenhang“ die Wirklichkeit nur unzureichend oder völlig falsch beschreibt.

Insbesondere ist die Berechnung von Zwischenwerten natürlich vollkommen unsinnig, wenn es sich bei den Stützstellen x_1 und x_2 um Werte eines diskreten Versuchsparameters handelt (beispielsweise Lieferant A, Lieferant B oder Maschine Nr. 1, Maschine Nr. 2).



3.3 Lineare Regression

In der Praxis stellt sich häufig das Problem, an die zu n Wertepaaren $(x_i; y_i)$ gehörigen Punkte in einem x-y-Diagramm eine Gerade anzupassen. Für die folgenden Überlegungen ist es dabei ohne Bedeutung, ob der zugrundeliegende physikalische Sachverhalt bekannterweise durch eine lineare Funktion beschreibbar ist, oder ob einfach die „Form“ der sich ergebenden „Punktwolke“ die Annäherung durch eine ausgleichende Gerade sinnvoll erscheinen lässt.

Ausgangspunkt für die Lösung dieses Problems ist die Forderung, dass die Summe der quadratischen Abweichungen an den Stellen x_i minimal wird:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - g_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + b \cdot x_i))^2 = \text{Min.}$$

Das Verfahren heißt darum auch Methode der kleinsten Quadrate. Die Steigung b und der Achsenabschnitt a der Ausgleichsgerade $y = g(x) = a + b \cdot x$ sollen berechnet werden.

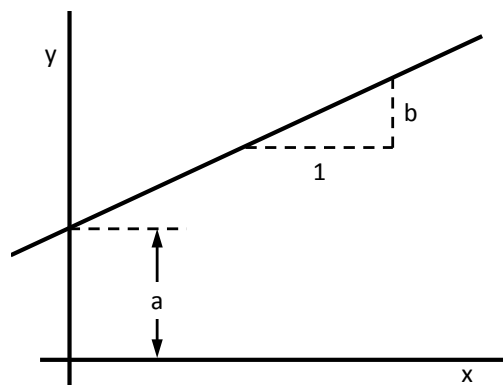


Bild 3.3

Die nachfolgenden Formeln für a und b ergeben sich, wenn man obige Quadratsumme jeweils partiell nach a und b ableitet und die Nullstellen der Ableitungen bestimmt:

$$b = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

\bar{x} und s_x^2 bezeichnen darin den Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$ bzw. die Varianz der x_i ,

$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i$ ist der Mittelwert der y_i . Die Größe b wird auch Regressionskoeffizient genannt. Der Ausdruck s_{xy} heißt Kovarianz und lässt sich auch mit der Formel

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \right) \text{ berechnen (vgl. Korrelation).}$$

Löst man den Ausdruck für den Achsenabschnitt $a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$ nach \bar{y} auf, so wird offensichtlich, dass die Ausgleichsgerade durch den Mittelpunkt $(\bar{x}; \bar{y})$ der Punktwolke verläuft: $\bar{y} = a + b \cdot \bar{x}$.



Wie bereits erwähnt, werden a und b so bestimmt, dass die Summe der senkrechten quadratischen Abweichungen der Messwerte y_i von den durch die Ausgleichsgerade gegebenen Werte $g_i = g(x_i)$ minimal wird. Es gibt jedoch Situationen, in denen unklar ist, ob jeweils der erste Wert oder der zweite Wert eines Wertepaares der x -Achse zugeordnet werden soll. Dann ist sowohl eine Auftragung der Punkte $(x_i; y_i)$ als auch eine Auftragung der Punkte $(y_i; x_i)$ möglich. Für diese beiden Fälle ergeben sich i.a. zwei unterschiedliche Ausgleichsgeraden, die sich unter einem bestimmten Winkel im Punkt $(\bar{x}; \bar{y})$ schneiden. Dieser Winkel wird umso kleiner, je weniger die Punkte „um die Ausgleichsgerade streuen“.

Die „Güte“ des vermuteten oder bekannten Zusammenhangs zwischen den Variablen Y und X kann mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten r beurteilt werden.

$$r = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{s_x \cdot s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

\bar{x} und \bar{y} bezeichnen die Mittelwerte, s_x und s_y die Standardabweichungen der x_i bzw. der y_i . s_{xy} ist die Kovarianz von X und Y .

r kann Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen. Ein Wert in der Nähe von $+1$ (-1) z.B. $0,9$ ($-0,9$) entspricht einer Punktwolke, die recht gut durch eine Ausgleichsgerade mit positiver (negativer) Steigung angenähert werden kann; man spricht dann von starker positiver (negativer) Korrelation.

Eine starke Korrelation bedeutet nicht zwangsläufig, dass Y direkt von X abhängig ist; sie kann sich durch Abhängigkeit beider Größen X und Y von einer dritten Größe Z ergeben (Scheinkorrelation).

Falls zwischen einer Größe Z und einer Größe U ein exponentieller Zusammenhang der Form $z = v \cdot u^w$ vermutet wird, so können die Konstanten v und w ebenfalls mit Hilfe der Kleinstquadratmethode berechnet werden. Logarithmiert man nämlich diese Gleichung, so ergibt sich eine Geradengleichung: $\log(z) = \log(v) + w \cdot \log(u)$.

Diese nimmt nach Umbenennung der einzelnen Terme die oben benutzte Form $y = a + b \cdot x$ an: $\log(z) = y$, $\log(v) = a$, $\log(u) = x$, $w = b$.

Bestimmt man also mit Hilfe der Wertepaare $(x_i = \log(u_i); y_i = \log(z_i))$ die Konstanten a und b , so kann v leicht berechnet werden: $v = 10^a$. w ist mit b identisch.

BEISPIEL 3.2:

An einem Luftmassenmesser wurde die Signalspannung U in Abhängigkeit von der durch einen Querschnitt strömenden Luftmasse m gemessen. Die vorliegenden 8 Messwerte sollen durch eine Kennlinienfunktion der Form $U = v \cdot m^w$ angenähert werden.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_i / \text{kg/h}$	15	30	60	120	280	370	480	640
U_i / V	2,2782	2,5531	2,8835	3,2739	3,9796	4,2574	4,5030	4,8251



Logarithmieren der 8 Wertepaare (U_i, m_i) und Auftragung der Paare $(\log(U_i), \log(m_i))$ in einem Koordinatensystem mit linearer Skalierung liefert die in Bild 3.4 gezeigte Darstellung. Die Regressionsgerade ist eingezeichnet.

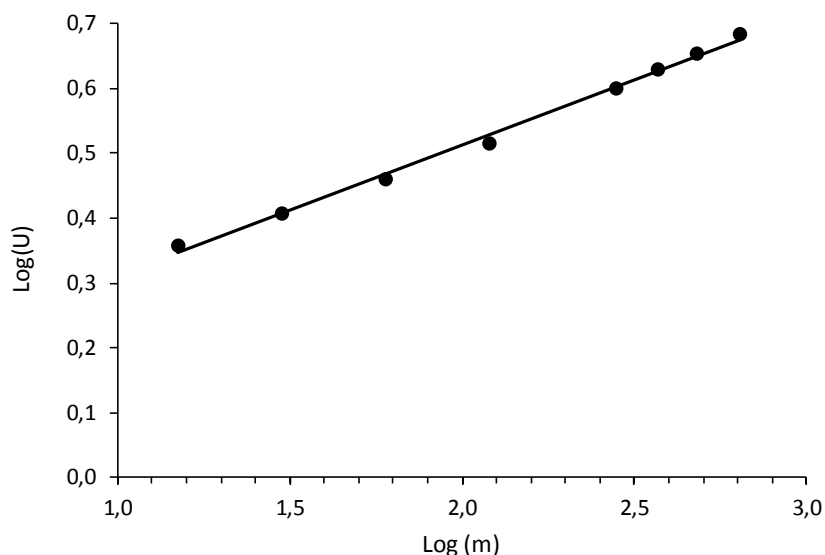


Bild 3.4: Lineare Regression mit Hilfe transformierter Messwerte

Für den Achsenabschnitt und den Regressionskoeffizienten ergeben sich die Werte $a=0,109$ und $b=0,202$.

Den Wert v findet man durch Rücktransformation: $v=10^a=10^{0,109}=1,285$.

Mit $w=b=0,202$ ergibt sich schließlich $U=1,285 \cdot m^{0,202}$.

In Bild 3.5 sind die ursprünglichen Messwerte sowie der Graph der Regressionsfunktion U eingezeichnet (durchgezogene Linie).

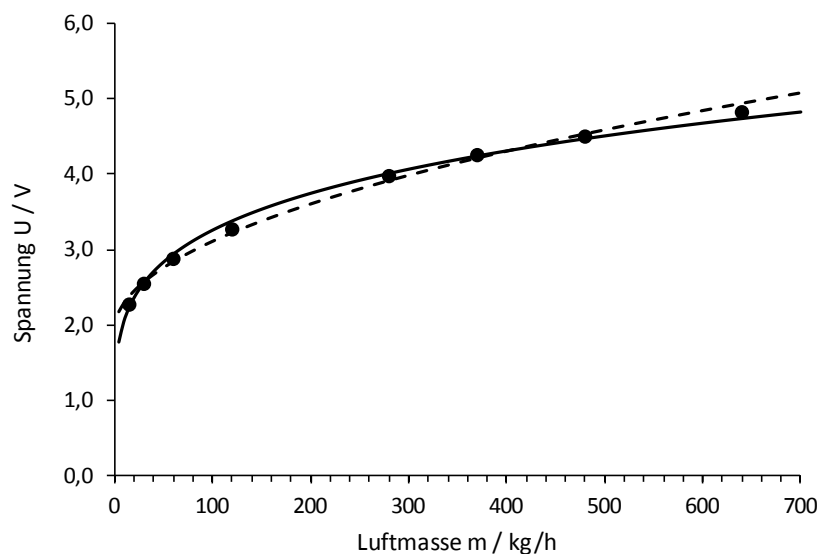


Bild 3.5: Darstellung der Urwerte und zweier Näherungskurven

Die ebenfalls in Bild 3.5 eingezeichnete gestrichelte Kurve ist der Graph der Funktion

$$U = 1,91 + 0,29 \cdot \sqrt{\frac{m}{5,9}}.$$



Offenbar werden die Messpunkte durch beide Kurven recht gut angenähert. Es ist allerdings nicht möglich, durch Beurteilung der „Güte“ der Annäherung (beispielsweise durch Vergleich der zugehörigen Quadratsummen) zu entscheiden, welcher der beiden Funktionsansätze der „bessere“ oder gar der „richtige“ ist, wenn nichts über die physikalischen Effekte im untersuchten Sensor und deren mathematische Beschreibung bekannt ist.

Hinzu kommt natürlich das Problem, dass sich bei Wiederholungsmessungen am selben Sensor oder bei Vergleichsmessungen an verschiedenen Sensoren des gleichen Typs immer wieder andere Punktfolgen und damit unterschiedliche Parameterwerte der Näherungsfunktionen ergeben können.

3.4 Quadratische Regression

Wenn bei einer experimentellen Untersuchung bekannt ist, dass kein lineares Verhalten vorliegen kann, so wäre es unsinnig, den entsprechenden Sachverhalt durch eine Geradengleichung beschreiben zu wollen. Weiß man jedoch, dass die Annahme einer quadratischen Funktion sinnvoll ist, oder wird dies durch die Form der Punktfolge in einem x-y-Diagramm nahegelegt, so führt dies zu dem Problem, die Koeffizienten a , b_1 und b_2 der Regressionsfunktion $y = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2$ zu bestimmen. Dies ist ebenfalls mit Hilfe der Kleinstquadratmethode möglich.

Wie im linearen Fall ist der Ausgangspunkt für die Lösung des vorliegenden Problems die Forderung, dass die Summe der quadratischen Abweichungen an den Stellen x_i minimal

$$\text{wird: } \sum_{i=1}^n (y_i - (a + b_1 \cdot x_i + b_2 \cdot x_i^2))^2 = \text{Min.}$$

Nach Berechnung der Hilfsgröße

$$K = n \cdot \left(\sum x_i^2 \right) \cdot \left(\sum x_i^4 \right) + 2 \cdot \left(\sum x_i \right) \cdot \left(\sum x_i^2 \right) \cdot \left(\sum x_i^3 \right) - \left(\sum x_i^2 \right)^3 - n \cdot \left(\sum x_i^3 \right)^2 - \left(\sum x_i \right)^2 \cdot \left(\sum x_i^4 \right)$$

sowie der Ausdrücke

$$\begin{aligned} A &= \left(\left(\sum x_i^2 \right) \cdot \left(\sum x_i^4 \right) - \left(\sum x_i^3 \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{K} & B &= \left(n \cdot \sum x_i^4 - \left(\sum x_i^2 \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{K} \\ C &= \left(n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{K} & D &= \left(\left(\sum x_i^3 \right) \cdot \left(\sum x_i^2 \right) - \left(\sum x_i \right) \cdot \left(\sum x_i^4 \right) \right) \cdot \frac{1}{K} \\ E &= \left(\left(\sum x_i \right) \cdot \left(\sum x_i^3 \right) - \left(\sum x_i^2 \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{K} & G &= \left(\left(\sum x_i \right) \cdot \left(\sum x_i^2 \right) - n \cdot \sum x_i^3 \right) \cdot \frac{1}{K} \end{aligned}$$

ergeben sich die gesuchten Koeffizienten der Regressionsparabel:

$$\begin{aligned} a &= A \cdot \sum y_i + D \cdot \sum x_i \cdot y_i + E \cdot \sum x_i^2 \cdot y_i \\ b_1 &= D \cdot \sum y_i + B \cdot \sum x_i \cdot y_i + G \cdot \sum x_i^2 \cdot y_i \\ b_2 &= E \cdot \sum y_i + G \cdot \sum x_i \cdot y_i + C \cdot \sum x_i^2 \cdot y_i \end{aligned}$$

Die Summationen erstrecken sich in allen Ausdrücken über $i=1, \dots, n$.



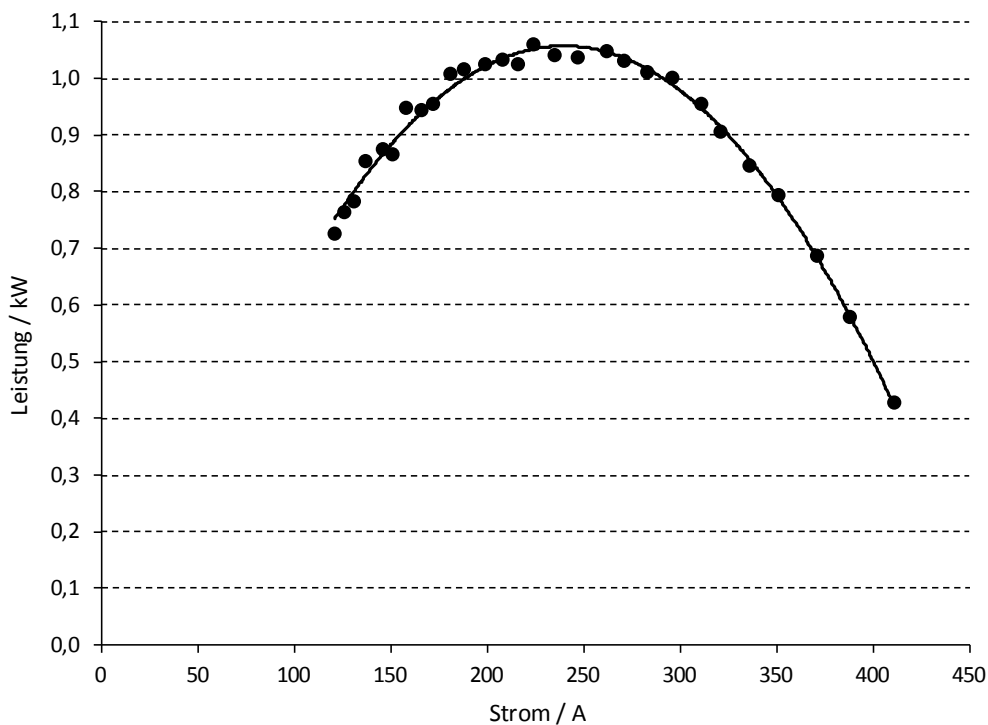
**Bild 3.6:** Quadratische Regression

Bild 3.6 zeigt ein Anwendungsbeispiel dieses Verfahrens. In der Darstellung ist die Antriebsleistung eines Starters über dem Strom aufgetragen. Die Leistung ergibt sich als Produkt aus Drehmoment und Drehzahl. Die Drehzahl nimmt in Abhängigkeit vom Strom näherungsweise linear ab (negative Geradensteigung), das Drehmoment hingegen steigt mit dem Strom näherungsweise linear an (positive Geradensteigung). Das Produkt aus Drehmoment und Drehzahl ist darum zwangsläufig näherungsweise eine nach unten geöffnete Parabel.

Im vorliegenden Beispiel ist die Wahl des Modells also aus der Kenntnis des physikalischen Zusammenhangs heraus begründbar.

3.5 Interpolation durch Polynome

Kennt man die Funktionswerte $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$ einer Funktion $y = f(x)$ für die Argumente $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_n$, so nennt man letztere auch Stützstellen, die Funktionswerte heißen dann Stützwerte.

Bei den in den Abschnitten 3.3 und 3.4 dargestellten Verfahren der linearen bzw. quadratischen Regression versucht man, eine Näherungsfunktion zu bestimmen, deren Werte an den Stützstellen den Stützwerten möglichst nahe kommen. Es ist selbstverständlich, dass wegen der „Einfachheit“ der gewählten Funktionenklasse - wenn überhaupt - nur in wenigen Punkten eine exakte Übereinstimmung der Näherungsfunktionswerte und Stützwerte erreicht wird.

Ist eine solche Übereinstimmung an allen Stützstellen erwünscht, so muss man entsprechend komplexere Funktionen zur Modellierung verwenden. Eine zu diesem Zweck häufig gewählte Funktionenklasse sind Polynome, also Ausdrücke der Form

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \quad n \text{ ganzzahlig, } n \geq 0$$

Ihre Wahl erscheint auf den ersten Blick günstig, da verschiedene mathematische Operationen wie Differenziation und Integration in diesem Fall problemlos anwendbar sind.



Nachteilig bei einem Ansatz dieser Form ist jedoch insbesondere bei großem n (Grad des Polynoms) der zur Bestimmung der Koeffizienten notwendige vergleichsweise hohe Rechenaufwand. Zudem können sich in den Bereichen zwischen den Stützstellen beträchtliche Abweichungen $P_n(x) - f(x)$ ergeben, wie sich durch Anwendung entsprechender Näherungsverfahren auf eine bekannte Funktion $y = f(x)$ zeigen lässt.

Man beachte, dass die in 3.3 und 3.4 gewählten Funktionen ebenfalls einem solchen Ansatz entsprechen.

In dieser Beziehung wesentlich zufriedenstellendere Ergebnisse lassen sich erzielen, wenn man zur Interpolation sogenannte kubische Splinefunktionen verwendet. Sie sind aus Polynomen dritten Grades ($n=3$) stückweise so zusammengesetzt, dass sie an den Stützstellen exakt mit den Messwerten übereinstimmen und zudem eine „glatte“ Kurve liefern.

Als Beispiel zeigt Bild 3.7 einen entsprechenden „glatten“ Kurvenverlauf durch die Punkte aus dem Bild 3.6.

Es geht in diesem 3. Abschnitt keineswegs darum, bis ins Detail die mathematischen Verfahren zur Kurvenapproximation zu beschreiben. Die entsprechenden Berechnungen sind i.a. ohnehin nur durch ein Rechnerprogramm in akzeptabler Zeit zu bewältigen. Vielmehr soll deutlich werden, dass man durch Anwendung numerischer Interpolationsverfahren prinzipiell beliebige Punktfolgen annähern oder sogar exakt beschreiben kann. Die Datenanalyse kann jedoch keine Aussage darüber liefern, welches der gewählten Modelle das beste oder das „richtige“ ist.

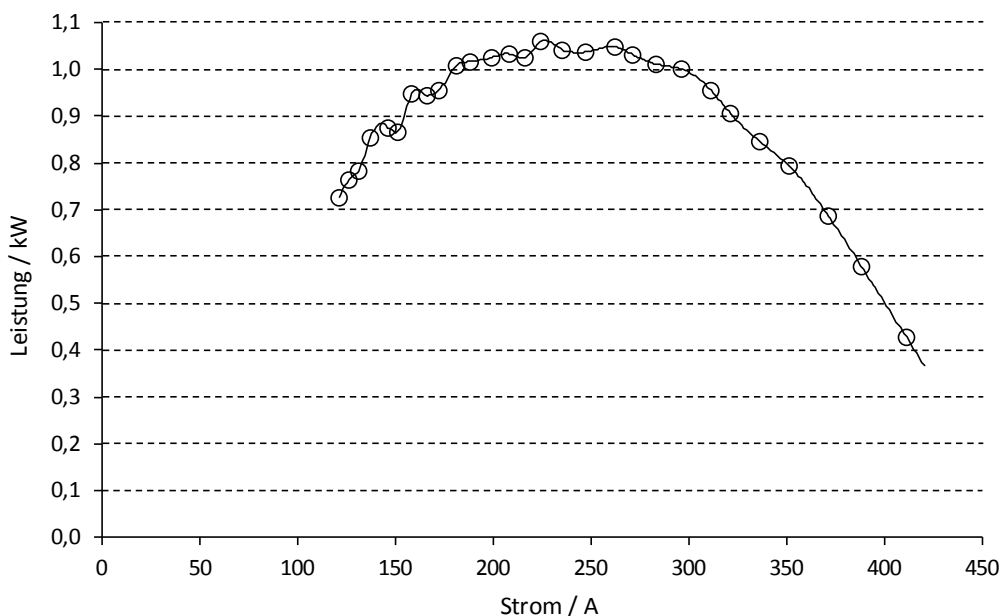


Bild 3.7: Interpolation durch eine Spline-Funktion (vgl. Bild 3.6)



3.6 Statistische Modellbildung

In den Abschnitten 3.3 und 3.4 wurden Verfahren erläutert, mit denen Messdaten ein mathematisches Modell in Form einer „einfachen“ Funktion zugeordnet wurde. Anhand der Bilder 3.4, 3.5 und 3.6 wird deutlich, dass man dabei geringfügige Abweichungen der Messpunkte von der Näherungskurve akzeptiert. Dies geschieht aus der Erfahrung heraus, dass (abgesehen vom Messfehler) auch bei scheinbar unveränderten Bedingungen, unter denen Messdaten gewonnen werden, einzelne Messwerte praktisch nie exakt reproduziert werden können. Hier kommt also eine zufällige Komponente ins Spiel, die Gegenstand einer statistischen Modellbildung ist.

Betrachten wir dazu noch einmal die Bilder 2.6, 2.7 und 2.8 in Abschnitt 2.2. In allen drei Fällen ist es möglich, die Messpunkte durch eine von der Zeit t abhängige Funktion $f(t)$ zu beschreiben. Durch die Punktfolge von Bild 2.6 kann man eine Ausgleichsgerade mit positiver Steigung legen (Bild 3.8a), bei Bild 2.8 kann man zur Annäherung eine periodische, stückweise lineare Funktion wählen (Bild 3.8c) und im Fall von Bild 2.7 ist eine zur Zeitachse parallele Gerade „passend“ (Bild 3.8b).

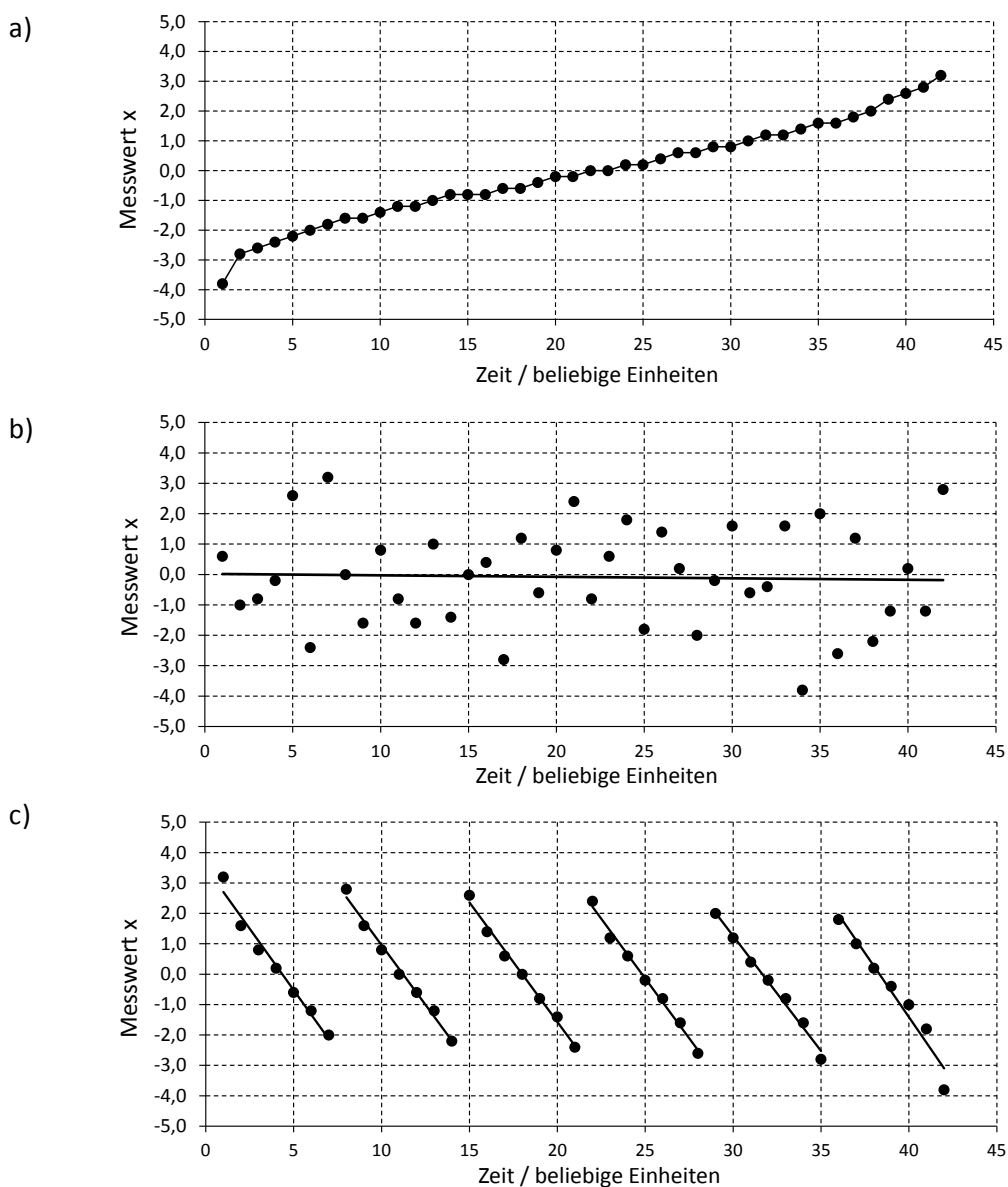


Bild 3.8: Punktfolgen aus den Bildern 2.6, 2.7 und 2.8 mit Ausgleichsgeraden



In den Fällen a) und c) ist die Abweichung der einzelnen Punkte von der Ausgleichsgeraden vergleichsweise klein, während sich im Fall b) beträchtliche Abweichungen ergeben. In allen drei Fällen zeigt diese Abweichung jedoch offenbar kein systematisches Verhalten sondern scheint zufälliger Natur zu sein.

Es ist also denkbar, die Messwerte x durch eine Funktion zu beschreiben, die eine zeitabhängige Komponente $f(t)$ sowie eine zufällige Komponente X , enthält:

$$x = f(t) + X$$

X ist eine sogenannte Zufallsvariable (vgl. Abschnitt 4.). Bei der Situation nach Bild 3.8 b) ist $f(t) = 0$, die Messwerte x sind also Werte der Zufallsvariablen X .

Das Histogramm von Bild 2.2 gibt einen Eindruck von der Verteilung dieser Zufallsvariablen.



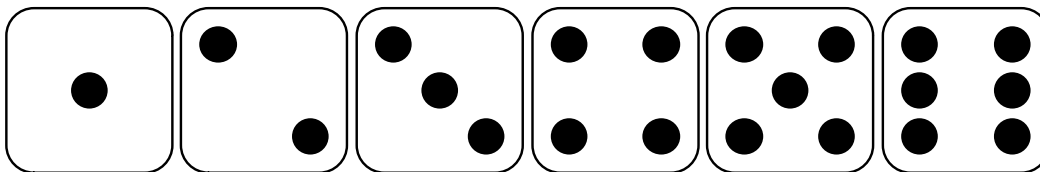
4 Mathematische Verteilungen

4.1 Grundlegende Begriffe der Statistik

Eine Einführung in grundlegende Verfahren der Statistik beginnt i. a. mit der Definition des Zufallsexperiments: ein Experiment mit nicht vorhersagbarem Ergebnis heißt Zufallsexperiment. Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments ist der Ereignisraum. Die Zufallsvariable ist eine Abbildung (oder Funktion), die jedem Element des Ereignisraums eine reelle Zahl zuordnet.

Diese Begriffe klingen zunächst etwas befremdlich. Sie werden jedoch anhand eines Beispiels schnell verständlich.

Der Wurf eines (regelmäßigen) Würfels ist ein Zufallsexperiment. Die Ergebnisse solcher Würfe sind durch die Symbole gegeben, die auf der obenliegenden Seite des Würfels sichtbar sind, sobald dieser zur Ruhe gekommen ist:



Die Menge dieser sechs Symbole (Wurfergebnisse, Ereignisse) ist der Ereignisraum. Die Zufallsvariable X („Augenzahl“) ordnet jedem Element dieser Menge eine reelle Zahl zu. X kann also die Werte 1, 2, ..., 6 annehmen.

Geht es bei einem Würfelspiel darum, eine möglichst hohe „Augenzahl“ zu erreichen, und hat etwa Spieler A bereits eine „4“ geworfen, so sind die Wurfergebnisse „5“ und „6“ für den Spieler B günstige Ereignisse (weil er gewinnt). Aus einer solchen Spielsituation heraus leitet sich schließlich die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit (nach Bernoulli und Laplace) ab:

$$P = \frac{\text{Anzahl aller günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}} = \frac{g}{m}$$

Die „günstigen“ bzw. „möglichen“ Fälle beziehen sich natürlich immer auf das gerade betrachtete „Experiment“. Im gegebenen Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn des Spielers B:

$$P = \frac{g}{m} = \frac{2}{6}.$$

Überträgt man diese statistischen Begriffe auf einen Fertigungsprozess, so entspricht die Herstellung bzw. Bearbeitung eines Rohstoffes oder Rohlings einem Zufallsexperiment. Alle möglichen Ergebnisse des Prozesses (gefertigte Teile) sind Elemente des Ereignisraums. Die Zufallsvariable ordnet jedem Element des Ereignisraums eine reelle Zahl zu, beispielsweise eine Maßzahl zum Merkmal Durchmesser mit der Maßeinheit mm.

Im Gegensatz zum Beispiel des Würfelspiels lässt sich in diesem Fall der Ereignisraum weder von vornherein (a-priori) anhand des Wissens um die Maschinenfunktionen sowie die Prozess- und Rahmenbedingungen vor einer Maschinenfähigkeitsuntersuchung beschreiben noch (a-posteriori, im Nachhinein) nach einer Maschinenfähigkeitsuntersuchung anhand einer endlichen Anzahl gemessener Merkmalswerte.



Die Elemente des Ereignisraums sind physikalisch gesehen natürlich nicht wirklich zufällig (dann wäre jede Fertigungsplanung sinnlos) und die Zufallsvariable Durchmesser kann lediglich rationale Werte zwischen null und einer durch die Maschinengröße bzw. die maximale Größe der Rohlinge gegebenen, endlichen, positiven Zahl annehmen. Zwei verschiedene Werte (Realisierungen) der Zufallsvariablen müssen sich dabei mindestens um die Auflösung des Messgeräts bzw. Messverfahrens unterscheiden.

Genaugenommen ist also nicht der Durchmesser der hergestellten Bauteile die Zufallsvariable, sondern der vom Messgerät im Augenblick der Ablesung angezeigte Messwert.

Wegen des nicht definierbaren Ereignisraums und der aufgrund der Maschinenfunktionen nicht gleichwahrscheinlichen Ereignisse kann die Wahrscheinlichkeitsdefinition nach Bernoulli und de Laplace $P = \text{Anzahl der günstigen Fälle} / \text{Anzahl aller möglichen Fälle}$ offenbar nicht angewendet werden. Es lässt sich jedoch anhand der Prozessenerfahrung mit einer „großen“ Anzahl produzierter Teile eine a-posteriori-Wahrscheinlichkeit bestimmen, beispielsweise in Form des Anteils von Merkmalswerten, der auf die j-te Klasse (also ein halboffenes Intervall) der Klasseneinteilung K (gegeben durch die Klassengrenzen) entfällt. Die mathematische Wahrscheinlichkeit wird also in diesem Fall einer relativen Häufigkeit gleichgesetzt (empirische Wahrscheinlichkeit). Sie ist folglich eine Zahl zwischen null und eins.

Entsprechend Tabelle 2.3 bzw. Bild 2.2 kann man beispielsweise für den dort betrachteten Prozess (unter Berücksichtigung der Ausführungen in Abschnitt 4.2) folgende beiden Aussagen machen:

- 92,8 % der Stichprobenwerte (Abweichungen vom Sollwert C) liegen zwischen $-3,217 \cdot \frac{1}{100} \text{ mm}$ und $+2,617 \cdot \frac{1}{100} \text{ mm}$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X (Abweichung vom Sollwert C) einen Wert im Intervall $[-0,03217 \text{ mm}; +0,02617 \text{ mm}]$ annimmt, ist 92,8 %.

Obwohl diese beiden Aussagen recht ähnlich erscheinen, gibt es jedoch einen wesentlichen Unterschied zwischen ihnen. Während die erste Aussage sich auf die konkret vorliegenden Messwerte bezieht, wird mit der zweiten Aussage bereits der Übergang zu einer fiktiven Zufallsgröße vollzogen, deren Realisationen die beobachteten Messwerte x_i sind.

Anhand der Tabelle 2.3 und Bild 4.1 wird verständlich, wie man zu der ersten Aussage gelangt. In der untersten Zeile der Tabelle 2.3 ist für jede Klasse die zugehörige Summenhäufigkeit angegeben. Diese Zahlen ergeben sich, wenn man die relativen Häufigkeiten von der ersten Klasse bis zu dieser Klasse (einschließlich) aufsummiert.

Die Angabe 59,5 % relative Summenhäufigkeit für die 4. Klasse bedeutet, dass unterhalb der oberen Klassengrenze der 4. Klasse 59,5 % der Werte des Datensatzes liegen ($2,4 \% + 9,5 \% + 19,0 \% + 28,6 \% = 59,5 \%$). Die gleiche Information ist dem Bild 4.1 zu entnehmen.

Zu der ersten der obigen beiden Aussagen gelangt man, indem man die relative Summenhäufigkeit der ersten Klasse von der relativen Summenhäufigkeit der sechsten Klasse subtrahiert ($95,2 \% - 2,4 \% = 92,8 \%$).



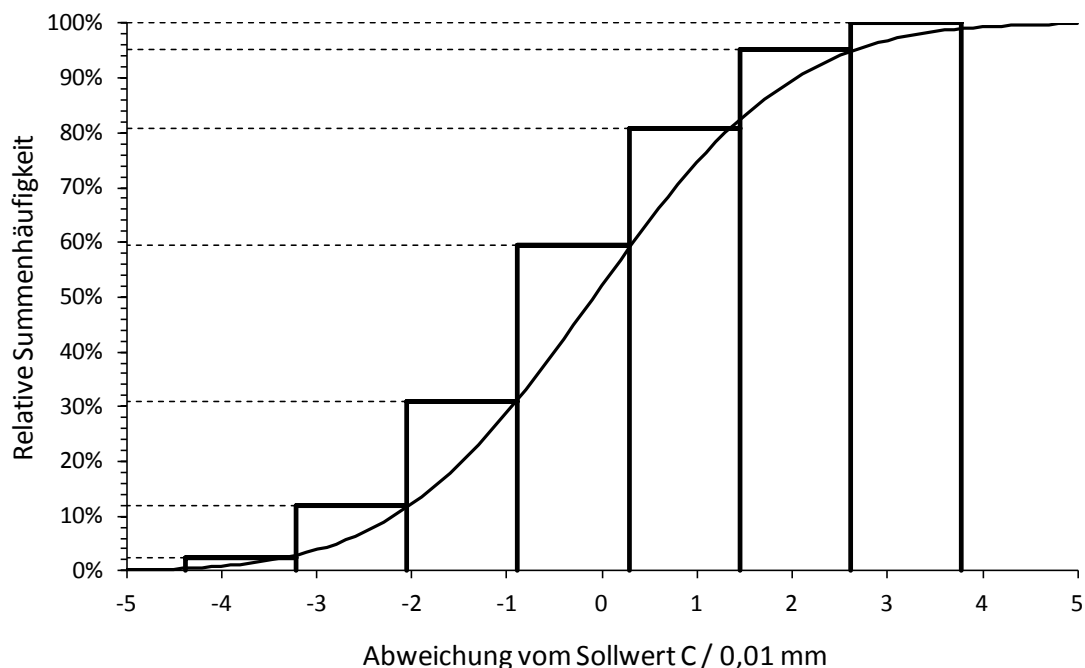


Bild 4.1: Darstellung der relativen Summenhäufigkeit (durchgezogene Linie: Normalverteilung)

Deutet man die Messwerte der Tabelle 2.2 als Realisationen einer Zufallsgröße X , so gibt die relative Häufigkeit einer Klasse die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Wert von X auf diese Klasse entfällt. Die relative Häufigkeit kann somit als Wahrscheinlichkeitsfunktion und ein Histogramm als graphische Darstellung dieser Funktion verstanden werden.

Eine Funktion $F(x)$, die zu jeder beliebigen reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit P angibt, mit der eine Zufallsvariable X Werte annimmt, die kleiner sind als x , heißt Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X .

Die Verteilungsfunktion ist also definiert durch die Gleichung $F(x) = P(X \leq x)$.

Dementsprechend ist die relative Summenhäufigkeit einer Verteilungsfunktion gleichzusetzen. Bild 4.1 zeigt eine graphische Darstellung dieser Verteilungsfunktion.

Ihr (und Tabelle 2.3) ist beispielsweise zu entnehmen:

$$F(2,617) = P(X \leq 2,617) = 95,2 \% \quad \text{und} \quad F(-3,217) = P(X \leq -3,217) = 2,4 \%$$

Daraus folgt unmittelbar die obige zweite Aussage:

$$P(-3,217 \leq X \leq 2,617) = F(2,617) - F(-3,217) = 95,2 \% - 2,4 \% = 92,8 \%$$

X ist in diesem Beispiel die Abweichung (in $\frac{1}{100}$ mm) vom Sollwert C (Mittenwert des Toleranzbereichs).

Vernachlässigt man alle Einschränkungen zur Messgröße X , die sich durch die Fertigungsbedingungen und das Messverfahren zwangsläufig ergeben und betrachtet X ausschließlich als reelle Zahl (Zufallsvariable), die beliebige Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann, so gelangt man schließlich zu einem rein mathematisch definierten Wahrscheinlichkeitsbegriff.



Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich durch Integration einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über einem Intervall. Der Begriff „Dichte“ erinnert dabei an die Analogie zwischen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Mechanik starrer Körper (siehe z.B. [13]).

Die durchgezogenen Kurven in Bild 2.2 bzw. Bild 4.1 stellen die Dichtefunktion (Bild 2.2) bzw. die Verteilungsfunktion (Bild 4.1) der Normalverteilung dar (siehe Abschnitt 4.1).

Der Übergang von „realen“ Messwerten zu einer fiktiven Zufallsgröße und deren Verteilung öffnet sozusagen das Tor zur induktiven Statistik, deren Begriffe und Verfahren Gegenstand der weiteren Abschnitte sind.

Es ist offensichtlich, dass man sich damit in eine in sich abgeschlossene Welt mathematischer Modelle begibt. Diese können dem Praktiker in vielen Fällen zur Auswertung und Beurteilung von Messreihen durchaus hilfreich sein. Andererseits sollte jedoch nicht vergessen werden, dass die aus diesen Modellen gewonnenen Aussagen stets modellgebunden sind, und deren unreflektierte Übertragung auf praktische Probleme zu völlig falschen Schlussfolgerungen führen können.

4.2 Normalverteilung

Wenn von einer Normalverteilung die Rede ist, assoziiert man diesen Begriff meist mit der Gaußschen Glockenkurve. Die Gaußsche Glockenkurve ist eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ der Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Die Normalverteilung gibt zu jedem Wert x die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen $-\infty$ und x annimmt. Man erhält die Verteilungsfunktion $F(x)$ der Normalverteilung, indem man über die oben angegebene Dichtefunktion integriert:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv.$$

$F(x)$ entspricht der Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve bis zum Wert x .

Die besondere Bedeutung der Normalverteilung in der Statistik ist durch den zentralen Grenzwertsatz begründet. Etwas frei formuliert besagt er, dass durch das zufällige Zusammenwirken (Addition) vieler unabhängiger Zufallsvariablen sich eine resultierende Zufallsvariable ergibt, die näherungsweise normalverteilt ist.

Betrachtet man in Zusammenhang mit einem Fertigungsprozess die Einflussgrößen („5M“) Mensch, Maschine, Material, Methode, Mitwelt (= Umgebung) formal als unabhängige Zufallsvariablen, so erklärt der zentrale Grenzwertsatz die Tatsache, dass man bei einer Prozessanalyse häufig eine Verteilung der Merkmalswerte der hergestellten Teile findet, die zumindest angenähert durch die Gaußsche Normalverteilung beschreibbar ist (dabei sei einmal von Prozessen mit systematischen Veränderungen der Prozessmittellage wie Trends und Chargensprünge abgesehen).

Die Normalverteilung ist durch die beiden Parameter μ (Mittelwert) und σ (Standardabweichung) eindeutig festgelegt. μ bestimmt die Lage der Verteilung auf der x -Achse, σ bestimmt ihre Breite (vgl. Bild 4.2).



Diese beiden theoretischen Parameter sind in einer konkreten Situation, bei der ein Datensatz durch eine Normalverteilung beschrieben werden soll, natürlich nicht bekannt, sondern müssen aufgrund der vorliegenden Daten (Stichprobe) geschätzt werden.

Die bestmöglichen Schätzungen $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}$ für μ und σ sind durch den arithmetischen

Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$ bzw. die Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ gegeben

(n = Stichprobenumfang).

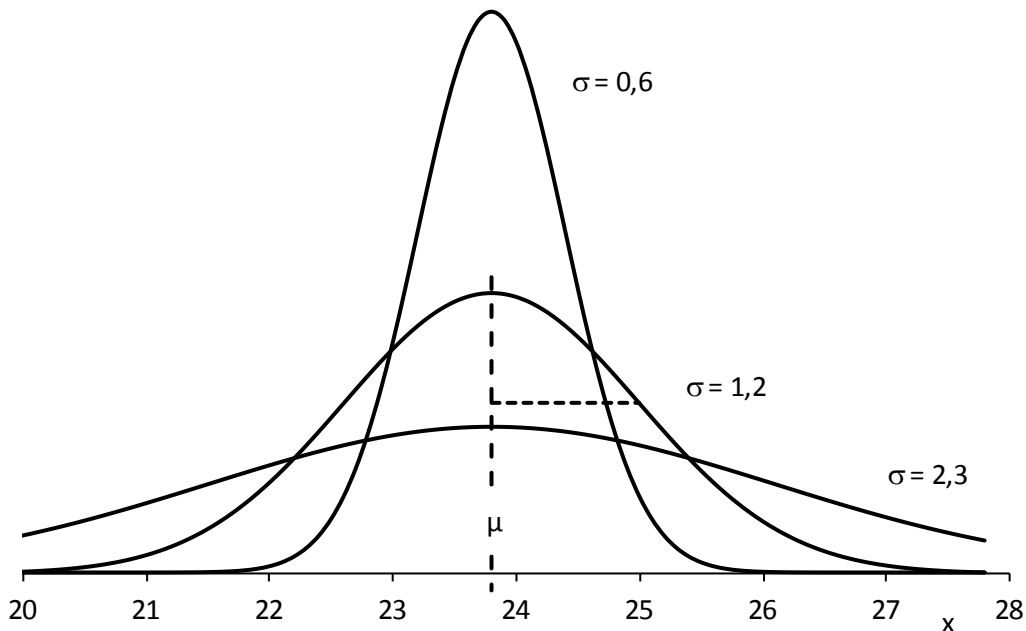


Bild 4.2: Dichtefunktionen der Normalverteilung mit $\mu = 23,8$ und den Standardabweichungen $\sigma = 0,6$, $\sigma = 1,2$ und $\sigma = 2,3$

Eine normalverteilte Zufallsgröße X mit Mittelwert $\hat{\mu}$ und Standardabweichung $\hat{\sigma}$ wird durch die Transformation $U = \frac{X - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$ in eine ebenfalls normalverteilte Zufallsgröße U überführt. Der Mittelwert von U ist null, ihre Standardabweichung ist eins. Die spezielle Normalverteilung $N(0,1)$ heißt Standardnormalverteilung.

Die Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsgröße U einen Wert zwischen $-\infty$ und u annimmt. $\Phi(u)$ entspricht dem Flächenanteil unter der Gaußschen Glockenkurve bis zum Wert u . Die Gesamtfläche unter der Glockenkurve hat den Wert eins. Die Werte für $\Phi(u)$ können der Tabelle entnommen werden.

Mit Hilfe der tabellierten Standardnormalverteilung können beispielsweise Überschreitungsteile einer beliebigen Normalverteilung bezüglich vorgegebener Grenzwerte berechnet werden.



BEISPIEL 4.1:

Für das Merkmal Prägemaß eines Ventilsitzes sind die Grenzwerte $UGW=0,63\text{ mm}$ und $OGW=0,71\text{ mm}$ vorgegeben.

Aus den Messwerten einer Stichprobe von 125 Ventilen ergaben sich der Mittelwert $\hat{\mu}=\bar{x}=0,674\text{ mm}$ und die Standardabweichung $\hat{\sigma}=s=0,0166\text{ mm}$.

Anhand dieser Werte sollen unter Voraussetzung einer Normalverteilung die Anteile der Grundgesamtheit berechnet werden, die den unteren Grenzwert unterschreiten bzw. den oberen Grenzwert überschreiten.

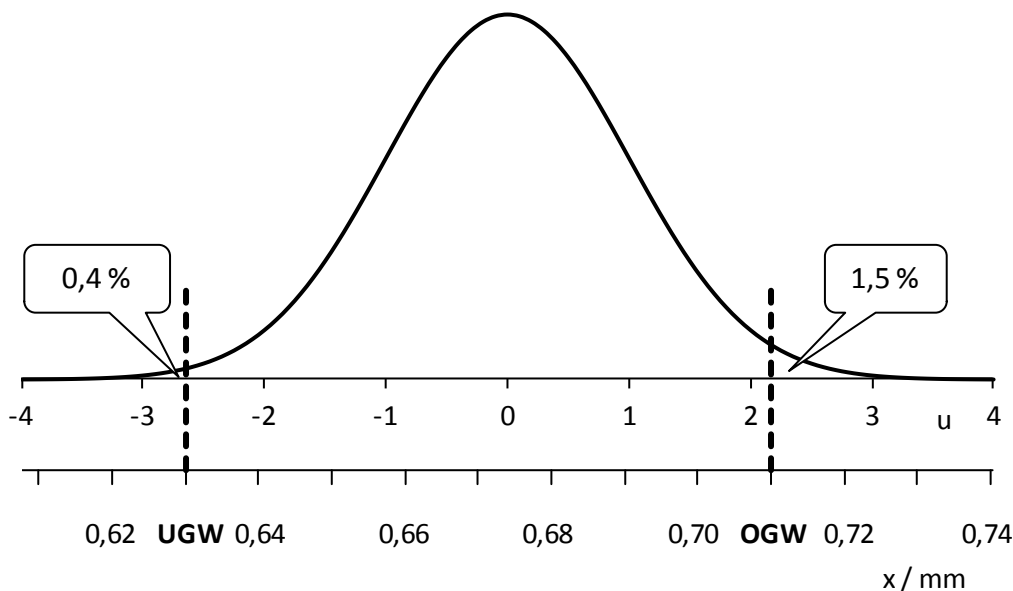


Bild 4.3: Skalentransformation zur Berechnung von Überschreitungsanteilen mit Hilfe der Standardnormalverteilung

In diesem Beispiel ergibt sich: $u = \frac{UGW - \bar{x}}{s} = \frac{0,63 - 0,674}{0,0166} = -2,65$.

Als Tabellenwert findet man: $\Phi(-2,65) = 0,004$.

Der Anteil aller X , die kleiner sind als $UGW=0,63\text{ mm}$, entspricht dem Anteil aller U , die den Wert $u = -2,65$ unterschreiten. Dies sind 0,4% der Grundgesamtheit.

Analog dazu ergibt sich: $u = \frac{OGW - \bar{x}}{s} = \frac{0,71 - 0,674}{0,0166} = 2,17$.

Tabellenwert: $\Phi(2,17) = 0,015$

Der Anteil aller X , die größer sind als $OGW=0,71\text{ mm}$, entspricht dem Anteil aller U , die den Wert $u = 2,17$ überschreiten. Dies sind 1,5% der Grundgesamtheit.



4.3 Vertrauensbereich von Überschreitungsanteilen

Die Schätzung von einseitigen oder zweiseitigen Überschreitungsanteilen mit Hilfe der Standardnormalverteilung beinhaltet mehrere „Fehlerquellen“. Die zur Berechnung von Überschreitungsanteilen verwendeten Größen \bar{x} und s sind Schätzungen der unbekannten Kenngrößen μ und σ der Normalverteilung. Von Stichprobe zu Stichprobe können sich trotz unveränderter Grundgesamtheit unterschiedliche Werte für \bar{x} und s ergeben.

Berechnet man nun wie in 4.2 beschrieben beispielsweise einen Überschreitungsanteil bzgl. des Grenzwerts OGW anhand der dimensionslosen Hilfsgröße $u = \frac{OGW - \bar{x}}{s}$, so ergibt sich wegen der Variationen von \bar{x} und s ein Streubereich für u und damit für den Überschreitungsanteil $p = 1 - \Phi(u)$.

Man könnte nun geneigt sein, die Grenzen der in den Abschnitten 6.4 und 6.5 behandelten Vertrauensbereiche für μ und σ in die Formel für u einzusetzen, das kleinstmögliche bzw. größtmögliche u zu berechnen, und so einen Vertrauensbereich für p zu bestimmen. Diese Vorgehensweise wäre statistisch gesehen jedoch nicht korrekt, da die beiden Schätzungen \bar{x} und s aus den gleichen Messwerten berechnet werden und somit keine voneinander unabhängigen Zufallsgrößen sind.

Der Vertrauensbereich für p wird stattdessen mit Hilfe der nichtzentralen t-Verteilung [18] bestimmt. Er lässt sich in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n und dem als Vielfaches der Standardabweichung s angegebenen Abstand des Mittelwerts \bar{x} von einem der Grenzwerte $a = UGW$ oder $a = OGW$ aus dem Nomogramm nach Bild 4.4 entnehmen.

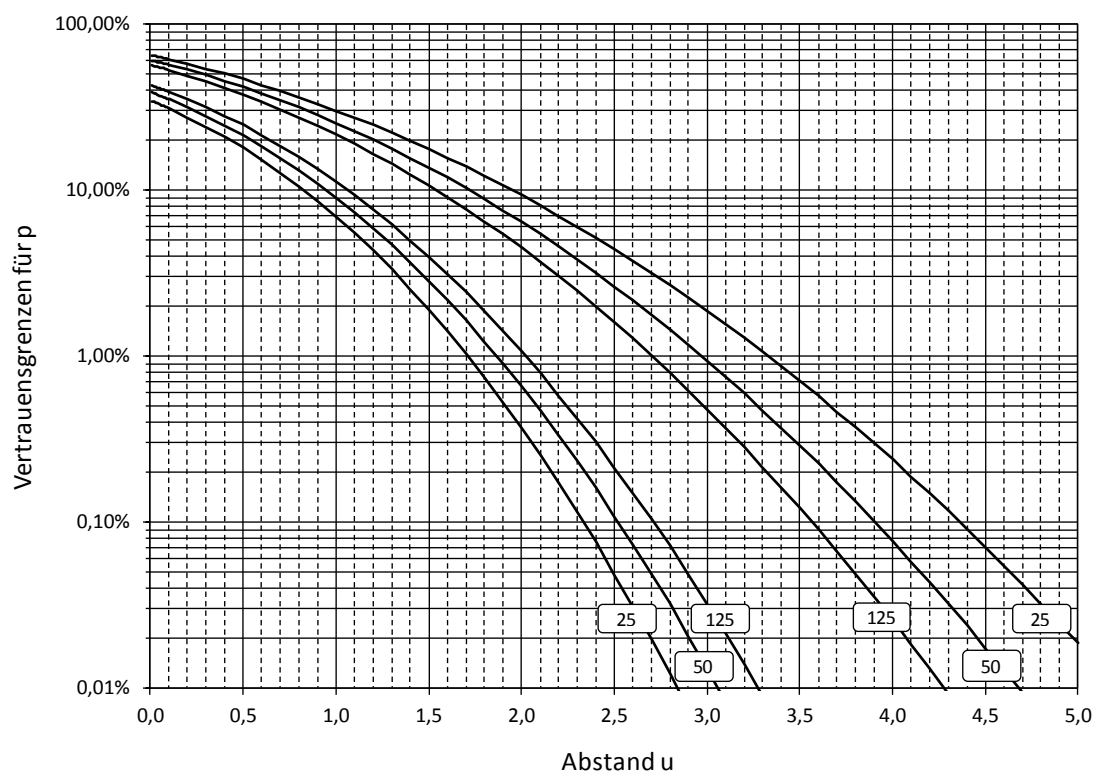


Bild 4.4: Darstellung zur Bestimmung von (zweiseitigen) 95%-Vertrauensgrenzen für den Überschreitungsanteil p bzgl. einer Grenze a . Stichprobenumfang n als Parameter.



Bei dem Beispiel aus Abschnitt 4.2 ist der Abstand des Mittelwerts vom oberen Grenzwert

$$u = \frac{a - \bar{x}}{s} = \frac{0,71 - 0,674}{0,0166} = 2,17. \text{ Der Stichprobenumfang ist } n = 125.$$

Nach Bild 4.4 ergibt sich als Vertrauensbereich für p näherungsweise das Intervall $[0,6\%; 3,2\%]$.

Im Zusammenhang mit der Statistischen Prozessregelung SPC (vgl. [5]) wird die Prozessfähigkeit in der Regel anhand des Kennwerts C_{pk} beurteilt.

C_{pk} ist der kleinere der beiden Werte $\frac{\bar{x} - \text{UGW}}{3 \cdot s}$ und $\frac{\text{OGW} - \bar{x}}{3 \cdot s}$.

Unter Voraussetzung einer normalverteilten Grundgesamtheit wird der C_{pk} -Wert meist unmittelbar mit einem zugehörigen Überschreitungsanteil p assoziiert. Ob diese Assoziation einen fertigungstechnischen Bezug hat oder nicht, sei dahingestellt. Der oben betrachtete Abstand u kann in diesem Fall auch in der Form $u = 3 \cdot C_{pk}$ angegeben werden. In ähnlicher Weise wie für p lässt sich also auch für C_{pk} ein Vertrauensbereich bestimmen. Dieser ist anhand des Bilds 4.5 oder der Tabelle 4.1 leicht zu ermitteln.

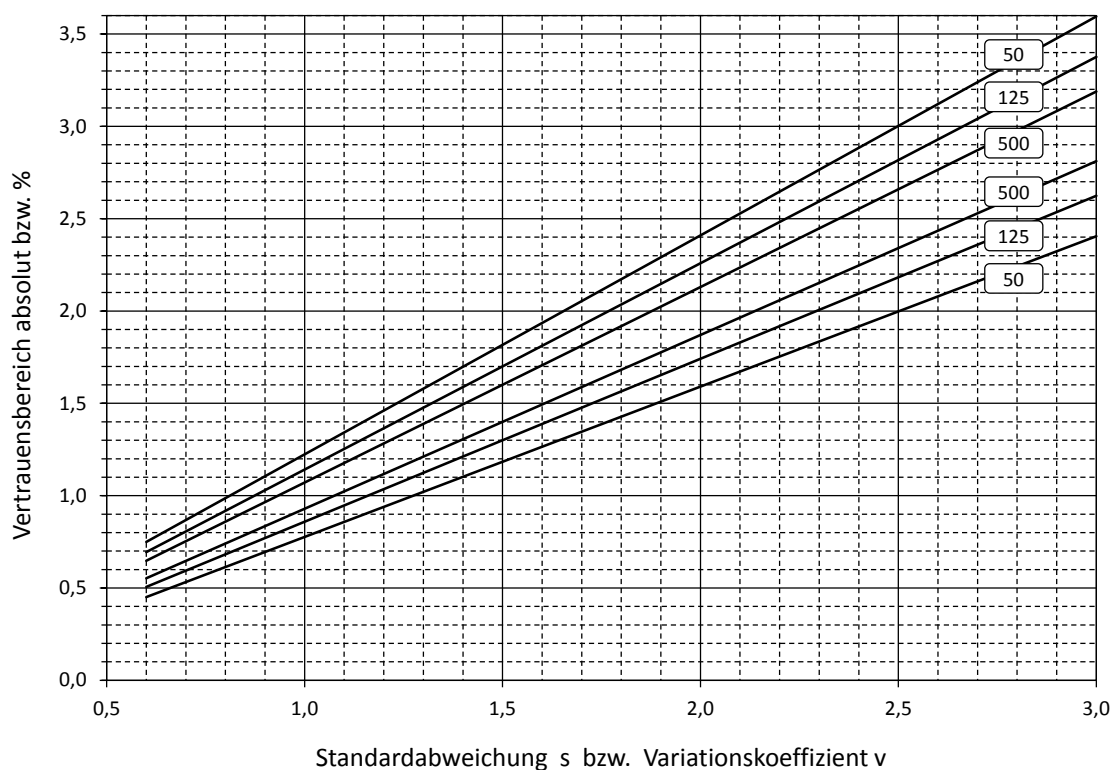


Bild 4.5: Darstellung zur Bestimmung von (zweiseitigen) 95%-Vertrauensgrenzen für C_{pk} . Stichprobenumfang n als Parameter.



	$\hat{C}_{pk} = 1,0$		$\hat{C}_{pk} = 1,33$		$\hat{C}_{pk} = 1,67$		$\hat{C}_{pk} = 2,0$	
n	C_{pk}^{unten}	C_{pk}^{oben}	C_{pk}^{unten}	C_{pk}^{oben}	C_{pk}^{unten}	C_{pk}^{oben}	C_{pk}^{unten}	C_{pk}^{oben}
50	0,78	1,22	1,04	1,62	1,31	2,03	1,57	2,43
60	0,80	1,20	1,07	1,59	1,34	2,00	1,60	2,40
70	0,82	1,18	1,09	1,57	1,36	1,98	1,63	2,37
80	0,83	1,17	1,10	1,56	1,38	1,96	1,66	2,34
90	0,84	1,16	1,12	1,55	1,40	1,94	1,68	2,32
100	0,85	1,15	1,13	1,53	1,41	1,93	1,69	2,31
110	0,85	1,15	1,14	1,52	1,43	1,91	1,71	2,29
120	0,86	1,14	1,14	1,52	1,44	1,90	1,72	2,28
130	0,87	1,13	1,15	1,51	1,45	1,89	1,73	2,27
140	0,87	1,13	1,16	1,50	1,45	1,89	1,74	2,26
150	0,88	1,13	1,16	1,50	1,46	1,88	1,75	2,25
200	0,89	1,11	1,19	1,47	1,49	1,85	1,78	2,22
500	0,93	1,07	1,24	1,42	1,56	1,78	1,86	2,14

Tabelle 4.1: Vertrauensgrenzen für C_{pk}

Die Darstellungen in den Bildern 4.4 und 4.5 sowie die Tabelle 4.1 wurden mit Hilfe der in [19] angegebenen Näherungsformeln berechnet.

Entsprechend [19] ergeben sich die Grenzen (zweiseitig, $P_A = 95\%$) des Vertrauensbereichs [C_{pk}^{unten} ; C_{pk}^{oben}] für C_{pk} wie folgt (s.a. [20]):

$$C_{pk}^{unten} = \hat{C}_{pk} \cdot \left(1 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{1}{9 \cdot n \cdot \hat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2 \cdot n}} \right)$$

$$C_{pk}^{oben} = \hat{C}_{pk} \cdot \left(1 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{1}{9 \cdot n \cdot \hat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2 \cdot n}} \right).$$

Darin ist \hat{C}_{pk} die mittels der Stichprobenkennwerte \bar{x} und s berechnete Schätzung des C_{pk} -Werts, und n ist der Gesamtstichprobenumfang. Normalverteilung der Grundgesamtheit wird vorausgesetzt.



4.4 Lognormalverteilung

Eine schiefe Verteilung ergibt sich oft dann, wenn ein Merkmal einen bestimmten Grenzwert nicht unter- (z.B. Rautiefe, Exzentrizität, Rundheit) bzw. überschreiten kann (z.B. Fördermenge, Härte).

Beispielsweise kann das Merkmal Oberflächenrauheit lediglich Werte größer null annehmen. Es ergibt sich eine asymmetrische, nullbegrenzte Kurve der Dichtefunktion, die rechts flach ausläuft. Logarithmiert man die Werte einer solchen Verteilung, so findet man, dass die logarithmierten Werte annähernd normalverteilt sind. Das Logarithmieren überführt den Zahlenbereich zwischen 0 und 1 in den Bereich $-\infty$ bis 0, der linke Teil der Verteilung wird also stark gestreckt, der rechte Teil stark gestaucht.

Definition:

Eine stetige Zufallsvariable X heißt logarithmisch normalverteilt (lognormalverteilt), wenn $\ln(X)$ normalverteilt ist.

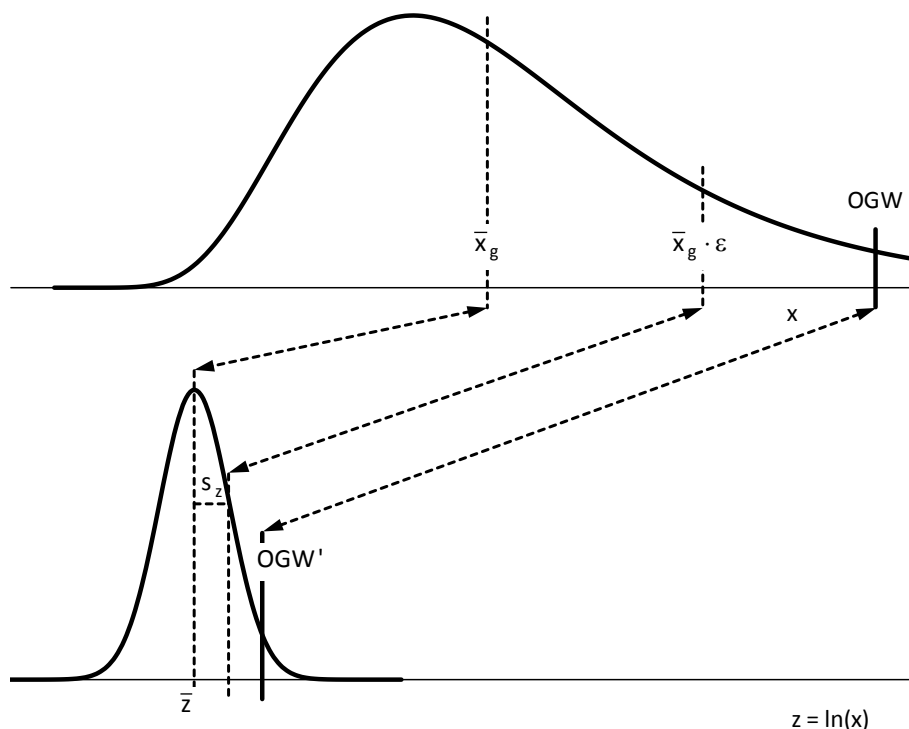


Bild 4.6: Veranschaulichung einer lognormalverteilten Zufallsgröße

Das Bild 4.6 soll verdeutlichen, dass die Transformation $z = \ln(x)$ logarithmisch normalverteilte Merkmalswerte x_i in normalverteilte Werte z_i überführt.

Der Ausdruck $\ln(\bar{x}_g) = \bar{z} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = \ln \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \right)$ definiert die Größe \bar{x}_g , den

geometrischen Mittelwert. Bei der Normalverteilung liegen unterhalb und oberhalb des Mittelwerts jeweils 50 % aller Werte. Dieser Sachverhalt bleibt bei der Rücktransformation $x = e^z$ unverändert. Die Größe \bar{x}_g entspricht daher dem Median der Lognormalverteilung, und es gilt: $\bar{x}_g = \tilde{x} = e^{\bar{z}}$.



In Abschnitt 4.2 wird beschrieben, wie im Falle der Normalverteilung auf relativ einfache Weise beispielsweise der Überschreitungsanteil bezüglich eines oberen Grenzwerts OGW bestimmt werden kann. Dazu werden neben OGW nur der Mittelwert \bar{x} und die Standardabweichung s benötigt.

Bei der Lognormalverteilung spielt der Streufaktor ε (epsilon) eine ähnliche Rolle wie s bei der Normalverteilung. Setzt man rein formal $s_z = \ln(\varepsilon)$ bzw. $\varepsilon = e^{s_z}$, so legt nachstehende Beziehung bereits eine Vermutung nahe, wie Streugrenzen der Verteilung berechnet werden können:

$$\bar{z} + u \cdot s_z = \ln(\bar{x}_g) + u \cdot \ln(\varepsilon) = \ln(\bar{x}_g \cdot \varepsilon^u).$$

Zwischen $\frac{\bar{x}_g}{\varepsilon}$ und $\bar{x}_g \cdot \varepsilon$ liegen 68,3 % aller Werte einer Lognormalverteilung

Zwischen $\frac{\bar{x}_g}{\varepsilon^2}$ und $\bar{x}_g \cdot \varepsilon^2$ liegen 95,4 % aller Werte einer Lognormalverteilung

Zwischen $\frac{\bar{x}_g}{\varepsilon^3}$ und $\bar{x}_g \cdot \varepsilon^3$ liegen 99,7 % aller Werte einer Lognormalverteilung

1. Bestimmung von Grenzwerten UGW bzw. OGW in der Weise, dass außerhalb des Bereichs $[\text{UGW}, \text{OGW}]$ jeweils $\alpha\%$ aller Werte liegen.

Berechnung des geometrischen Mittelwerts \bar{x}_g mit Hilfe des Mittelwerts \bar{z} der logarithmierten Merkmalswerte x_i :

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i), \quad \bar{x}_g = e^{\bar{z}}.$$

Berechnung des Streufaktors ε mit Hilfe der Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte x_i :

$$s_z = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \bar{z})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^n (\ln(x_i))^2 - n \cdot \bar{z}^2 \right]} \quad \varepsilon = e^{s_z}.$$

Entnahme der Größe u mit $\Phi(u) = 1 - \alpha$ bzw. der Größe $-u$ mit $\Phi(-u) = \alpha$ aus der Tabelle der Standardnormalverteilung.

$$\text{UGW} = \bar{x}_g \cdot \varepsilon^{-u} = \frac{\bar{x}_g}{\varepsilon^u} \quad \text{bzw.} \quad \text{OGW} = \bar{x}_g \cdot \varepsilon^u$$

2. Bestimmung eines Überschreitungsanteils bezüglich eines vorgegebenen Grenzwerts

Berechnung des geometrischen Mittelwerts \bar{x}_g und des Streufaktors ε mit Hilfe der logarithmierten Merkmalswerte x_i wie unter Punkt 1.



$$\text{Oberer Grenzwert gegeben: } \text{OGW} = \bar{x}_g \cdot \varepsilon^u \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{\ln\left(\frac{\text{OGW}}{\bar{x}_g}\right)}{\ln(\varepsilon)}$$

$$\text{Unterer Grenzwert gegeben: } \text{UGW} = \bar{x}_g \cdot \varepsilon^{-u} = \frac{\bar{x}_g}{\varepsilon^u} \quad \Leftrightarrow \quad u = -\frac{\ln\left(\frac{\text{UGW}}{\bar{x}_g}\right)}{\ln(\varepsilon)}$$

Entnahme des Überschreitungsanteils α mit $\alpha = 1 - \Phi(u)$ aus der Tabelle der Standardnormalverteilung.

Beispiel zu 2.:

Im Anschluss an einen Bördelprozess werden Drehmomentmessungen durchgeführt. Bei zehn geprüften Teilen ergaben sich die in der folgenden Tabelle angegebenen Messwerte x_i . Es soll der Anteil der Teile der Grundgesamtheit bestimmt werden, deren Merkmalswert den unteren Grenzwert $\text{UGW} = 400 \text{ N cm}$ unterschreitet.

Teil Nr.	$x_i / \text{N} \cdot \text{cm}$	$z_i = \ln(x_i)$
1	540	6,29
2	745	6,61
3	580	6,36
4	605	6,40
5	900	6,80
6	655	6,48
7	705	6,56
8	480	6,17
9	810	6,70
10	690	6,54

Es ergibt sich: $\bar{z} = 6,49$ und $s_z = 0,19$

und damit: $\bar{x}_g = e^{\bar{z}} = e^{6,49} = 659$, sowie $\varepsilon = e^{s_z} = e^{0,19} = 1,21$.

$$u = -\frac{\ln\left(\frac{\text{UGW}}{\bar{x}_g}\right)}{\ln(\varepsilon)} = -\frac{\ln\left(\frac{400}{659}\right)}{\ln(1,21)} = 2,62 \quad \alpha = 1 - \Phi(2,62) = 1 - 0,9956 = 0,0044$$

Der untere Grenzwert wird von 0,44% der Teile der Grundgesamtheit unterschritten.



4.5 Logarithmisches Wahrscheinlichkeitsnetz

Das logarithmische Wahrscheinlichkeitsnetz besitzt die gleiche Unterteilung der y-Achse wie das gewöhnliche Wahrscheinlichkeitsnetz (s. [1]), jedoch eine logarithmische Unterteilung der x-Achse.

Unter Verwendung eines logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetzes kann ein Datensatz auf einfache Weise im Hinblick auf eine Lognormalverteilung der Werte geprüft werden. Falls die Annahme einer Lognormalverteilung gerechtfertigt ist, können darüber hinaus die Parameter \bar{x}_g und ε sowie Überschreitungsanteile bzgl. gegebener Grenzwerte graphisch bestimmt werden.

Sofern die Anzahl der gegebenen Werte groß genug ist, erstellt man dazu ein Histogramm dieser Werte, bestimmt also die relativen Häufigkeiten von Werten innerhalb der Klassen einer Klasseneinteilung. Trägt man die gefundenen relativen Summenhäufigkeiten über der rechten Klassengrenze im Wahrscheinlichkeitsnetz auf, und ergibt sich dabei eine Folge von Punkten, die näherungsweise auf einer Geraden liegen, so kann man daraus schließen, dass die Werte des Datensatzes näherungsweise lognormalverteilt sind.

Ist die Anzahl n der vorliegenden Werte x_i für die Erstellung eines Histogramms nicht ausreichend, so kann man den Einzelwerten x_i durch folgende Vorgehensweise Summenhäufigkeiten zuordnen, so dass auch in diesem Fall eine Auftragung im logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetz möglich wird.

1. Die Werte x_1, x_2, \dots, x_n werden der Größe nach geordnet:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

Der kleinste Wert $x_{(1)}$ hat den Rang 1, der größte Wert $x_{(n)}$ den Rang n .

2. Jedem $x_{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) wird eine relative Summenhäufigkeit $H_i(n)$ zugeordnet:

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$$

$$H_1(n), H_2(n), \dots, H_n(n).$$

Die Summenhäufigkeit $H_i(n)$ zur Rangzahl i kann mit einer der Näherungsformeln

$$H_i(n) = \frac{i-0,5}{n} \quad \text{und} \quad H_i(n) = \frac{i-0,3}{n+0,4}$$

berechnet werden. Die Abweichung vom exakten Tabellenwert ist dabei unerheblich.

3. Darstellung der Punkte $(x_{(i)}, H_i(n))$ im Wahrscheinlichkeitsnetz.



Zur Demonstration dieser Vorgehensweise übernehmen wir die Werte des obigen Beispiels (Drehmomentmessung) und ordnen diese der Größe nach.

Rang i	$x_i / \text{N} \cdot \text{cm}$	$H_i (10)$
1	480	6,2 %
2	540	15,9 %
3	580	25,5 %
4	605	35,2 %
5	655	45,2 %
6	690	54,8 %
7	705	64,8 %
8	745	74,5 %
9	810	84,1 %
10	900	93,8 %

Die Punkte (x_i, H_i) werden in das logarithmische Wahrscheinlichkeitsnetz eingetragen.

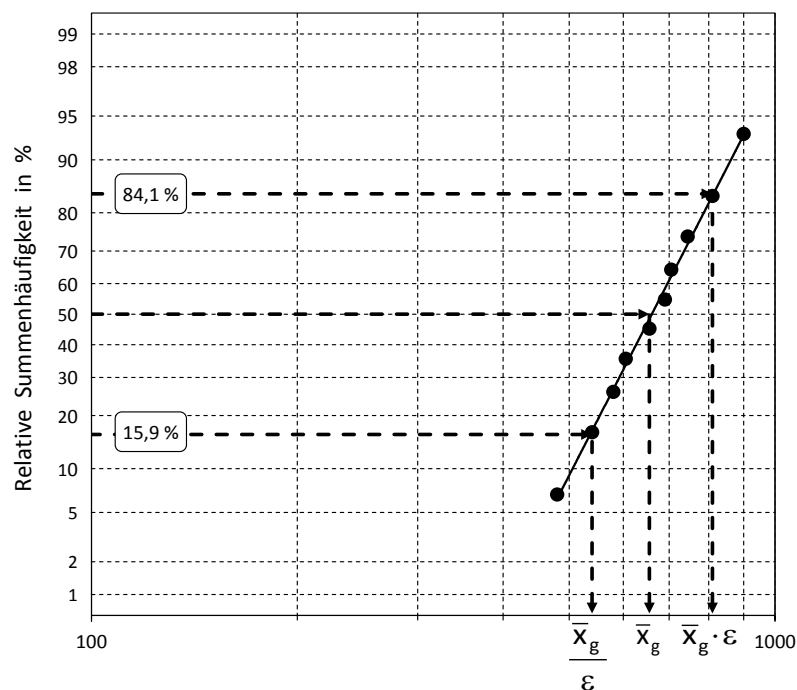


Bild 4.7: Auftragung der Messwerte im logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetz. x-Achse: Drehmoment in $\text{N} \cdot \text{cm}$

Legt man durch die Punkte eine Ausgleichsgerade, so können die Schätzwerte $\frac{\bar{x}_g}{\epsilon}$, \bar{x}_g und $\bar{x}_g \cdot \epsilon$ als Abszissenwerte zu den Ordinatenwerten 15,9%, 50% und 84,1% abgelesen werden.



In ähnlicher Weise können Schätzwerte für Über- bzw. Unterschreitungsanteile bzgl. einer vorgegebenen Grenze unmittelbar abgelesen werden, oder es können anhand vorgegebener Überschreitungsanteile Grenzwerte festgelegt werden. In allen Fällen sollte man sich jedoch im Klaren darüber sein, dass solche Schätzungen stets mit Unsicherheiten behaftet sind, die umso größer werden, je weniger Messwerte vorliegen. Insbesondere sollten „Extrapolationen“ durch Verlängerung der Ausgleichsgeraden über den von den Messpunkten abgedeckten Bereich hinaus vermieden werden.

Sonderfälle

Ist es nicht möglich, die Punkte im logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetz durch eine Gerade auszugleichen, wohl aber durch eine zur x-Achse hin gekrümmte Kurve, so ist möglicherweise nicht die Größe X lognormalverteilt, sondern $X - a$. In diesem Fall besitzt das Merkmal X eine natürliche Grenze $a > 0$, die nicht unterschritten werden kann (vgl. [10] S. 98).

Lassen sich die Punkte im logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetz gut durch eine von der x-Achse weg gekrümmte Kurve annähern, so ist möglicherweise $a - X$ lognormalverteilt. In diesem Fall besitzt das Merkmal X eine natürliche Grenze $a > 0$, die nicht überschritten werden kann. Beispiele solcher Merkmale mit einer natürlichen Obergrenze sind die Härte einer Metalloberfläche und die Zugfestigkeit (Abreißkraft) einer Schweißverbindung.

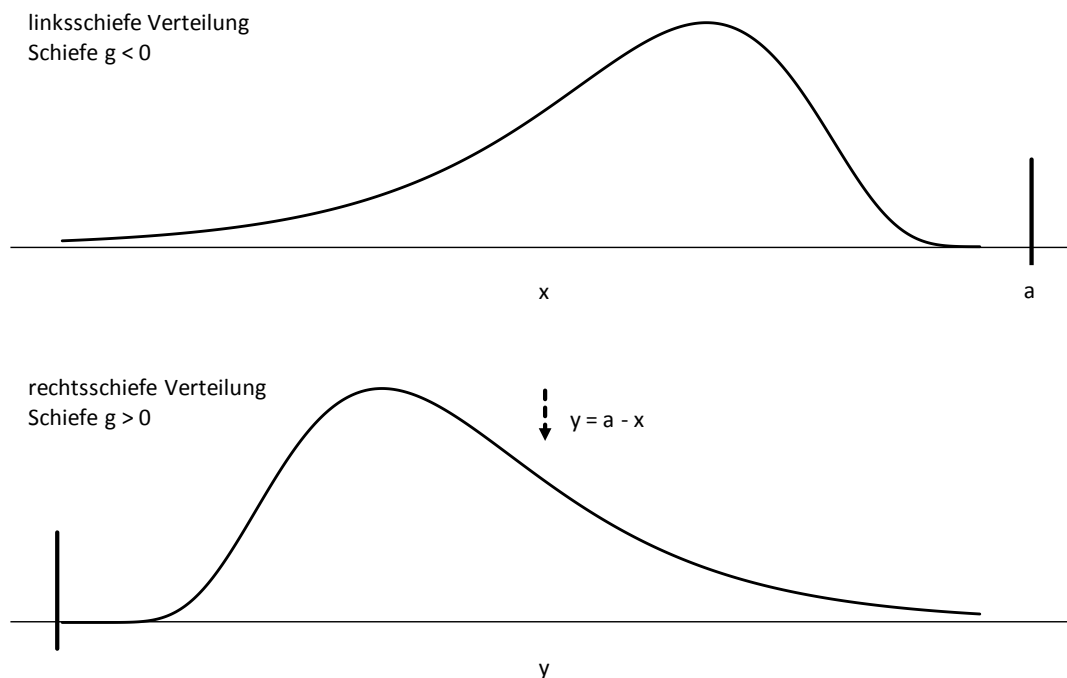


Bild 4.8: Transformation einer linksschiefen in eine rechtsschiefe Lognormalverteilung

In beiden Fällen stellt sich die Frage, wie die Größe a zu wählen ist. Sofern a nicht aufgrund des technischen Sachverhalts bekannt ist, muss ein Schätzwert für a bestimmt werden. Dazu werden an der Kurve im logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetz die Abszissenwerte (auf der x-Achse) x , x' und x'' zu den relativen Summenhäufigkeiten



$H=50\%$, $H'=15,9\%$ und $H''=84,1\%$ abgelesen. Damit wird schließlich der Schätzwert

$$\hat{a} = \left| \frac{x^2 - x' \cdot x''}{x' + x'' - 2 \cdot x} \right| \text{ berechnet.}$$

Durch die Transformation $Y = a - X$ bzw. $Y = X - a$ erhält man also eine lognormalverteilte Größe Y , auf die sich die Formeln des Abschnitts 4.4 anwenden lassen.

Falls in dieser Weise Grenzwerte für Y berechnet werden, müssen diese anschließend noch in Grenzwerte für X rücktransformiert werden.

ANMERKUNG:

In der Formel für die Dichtefunktion der Lognormalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

tritt der natürliche Logarithmus (zur Basis e) $\ln(x)$ auf. Dementsprechend ergeben sich die in Abschnitt 4.3 angegebenen Beziehungen $\bar{x}_g = e^{\bar{z}}$ und $\varepsilon = e^{s_z}$.

Verwendet man statt des natürlichen den dekadischen Logarithmus (zur Basis 10) $\log(x)$ sowie dessen Umkehrfunktion 10^x , so findet man die Ausdrücke $\bar{x}_g = 10^{\bar{z}}$ und $\varepsilon = 10^{s_z}$ (vgl. z.B. [17]).

Die x-Achse des logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetzes ist entsprechend dem dekadischen Logarithmus unterteilt. Diese Tatsache ist jedoch hinsichtlich der Vergleichbarkeit mit numerischen Berechnungen nach den Formeln aus Abschnitt 4.4 ohne Bedeutung, da bei der Berechnung von \bar{x}_g und ε stets eine Rücktransformation in das ursprüngliche Koordinatensystem erfolgt, und Berechnungen von Überschreitungsanteilen oder Grenzwerten nur mit Hilfe dieser beiden Größen durchgeführt werden.



4.6 Stichprobenkenngrößen

Stichprobenergebnisse (Einzelwerte) lassen sich in Form von

- Punktdiagrammen
- Stabdiagrammen
- Histogrammen und
- Summenkurven

zusammenfassen und anschaulich darstellen. Dabei geht allerdings die Information über die zeitliche Reihenfolge der Einzelwerte verloren. Aus den Einzelwerten lassen sich statistische Kenngrößen berechnen, welche die Verteilung der Stichprobenwerte charakterisieren.

Diese (empirischen) Kenngrößen sind Schätzwerte für die entsprechenden Kenngrößen der (theoretischen) Verteilung der Grundgesamtheit, aus der die Stichproben entnommen wurden (vgl. Tabelle 4.2).

Kenngröße	Grundgesamtheit	Stichprobe
der Lage:		
Median	50%-Wert	\tilde{x}
Arithmetischer Mittelwert	μ	\bar{x}
Geometrischer Mittelwert	μ_g	\bar{x}_g
der Streuung:		
Varianz	σ^2	s^2
Standardabweichung	σ	s
Streu faktor	ε	ε
Range	-	R
der Form:		
Schiefte	τ	g
Exzess	ε	e
Wölbung		g_w

Tabelle 4.2: Gebräuchliche Bezeichnungen der Kenngrößen für die Grundgesamtheit bzw. für die Stichprobe



4.6.1 Kenngrößen der Lage

Als Maßzahlen der mittleren Lage sind gebräuchlich:

Kenngröße	Berechnung
Median n ungerade	$\tilde{x} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$
n gerade	$\tilde{x} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$
Arithmetischer Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$
Geometrischer Mittelwert	$\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$

Tabelle 4.3: Kenngrößen der Lage

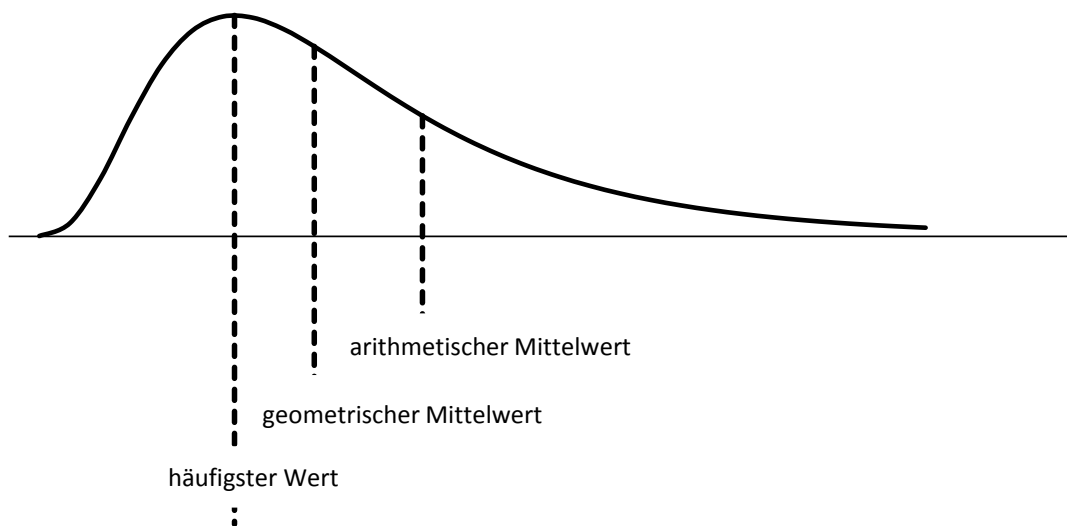


Bild 4.9: Kenngrößen der Lage bei einer Lognormalverteilung

Der Median (Zentralwert) ist derjenige Wert in einer Folge der Größe nach geordneter Einzelwerte, der die Folge halbiert. Aufgrund seiner Definition liegen stets gleich viele (50 %) Werte eines Datensatzes unterhalb und oberhalb des Medians (vgl. [3]).

Der häufigste Wert (das Dichtemittel) einer (stetigen, eingipfligen) Verteilung ist die Stelle, an der die Dichtefunktion ihr Maximum annimmt. Handelt es sich um eine diskrete Verteilung, so entspricht der häufigste Wert demjenigen mit der größten Wahrscheinlichkeit.



4.6.2 Kenngrößen der Streuung

Die Streuung ist ein Maß für die Abweichungen von Merkmalswerten bezogen auf den Mittelwert. Kenngrößen für die Streuung sind:

Kenngröße	Berechnung
Varianz	$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung	$s = \sqrt{s^2}$
Spannweite	$R = x_{\max} - x_{\min}$
Variationskoeffizient	$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \%$
Streufaktor	$\varepsilon = e^s$ $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \ln(\bar{x}_g))^2}$

Tabelle 4.4: Kenngrößen der Streuung

Eine ähnlich wichtige Bedeutung wie der arithmetische Mittelwert als Kenngröße der Lage hat die Standardabweichung als Kenngröße für die Streuung. Sie hat die gleiche Maßeinheit wie die Merkmalswerte und berechnet sich aus der Varianz.

Da die Spannweite aus nur zwei Werten berechnet wird, ist ihr Informationsgehalt grundsätzlich geringer als der der Standardabweichung.

Beim Variationskoeffizient wird das Ausmaß der Streuung der Einzelwerte auf die Größe des arithmetischen Mittelwertes bezogen. Der Variationskoeffizient wird beispielsweise im Zusammenhang mit der Angabe der Schadstoffkonzentrationen (HC, CO und NO_x) im Abgas von Verbrennungsmotoren benutzt. Die Größenordnungen der Mittelwerte dieser Konzentrationen unterscheiden sich stark voneinander. Die Beurteilung der Auswirkung von Verbesserungsmaßnahmen auf die Streuung der Einzelwerte der drei Schadstoffarten wird durch die Angabe der Variationskoeffizienten erleichtert, da diese direkt vergleichbar sind.

Der Streufaktor wird als Kenngröße der Streuung bei der Lognormalverteilung verwendet. Er wird aus der Standardabweichung der Logarithmen der Merkmalswerte berechnet (vgl. Abschnitt 4.4).



4.6.3 Kenngrößen der Form

Tabelle 4.5 gibt eine Übersicht über Kenngrößen für die „Form“ der zu den Messwerten gehörenden Verteilung. Genaugenommen denkt man bei der Verwendung des Begriffs „Form“ an die Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Verteilung. Der übliche Sprachgebrauch ist diesbezüglich meist sehr unpräzise.

Kenngröße	Berechnung
Schiefe	$g = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$
Wölbung	$g_w = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$
Exzess	$e = g_w - 3$

Tabelle 4.5: Kenngrößen der Form

Die Schiefe ist ein Maß für die Asymmetrie einer Verteilung. Liegt der steile Kurvenanstieg einer Verteilung links vom Mittelwert, so ist der Wert positiv (die Verteilung ist rechtsschief) im anderen Fall negativ (die Verteilung ist linksschief, vgl. Bild 4.8). Je größer der Betrag der Schiefe, desto unsymmetrischer ist die zugehörige Verteilung.

Einer untersuchten Grundgesamtheit liegt annähernd eine Normalverteilung zugrunde, wenn die in Tabelle 4.6 angegebenen Grenzwerte für die Schiefe g (abhängig vom Stichprobenumfang n) nicht überschritten werden.

Stichproben- umfang n	Grenzwerte für die Schiefe g , $P_A=95\%$
10	0,95
15	0,85
20	0,77
25	0,71
30	0,66
40	0,59
50	0,53
80	0,43
100	0,39
200	0,28
500	0,18
1000	0,13

Tabelle 4.6: Grenzwerte für die Schiefe g zum Stichprobenumfang n



Da der Abstand $x_i - \bar{x}$ mit der dritten Potenz im Ausdruck für die Schiefe auftritt, kann ein einzelner Ausreißer zu einer großen Schiefe führen, obwohl alle übrigen Werte annähernd normalverteilt sind.

Die Wölbung (Steilheit) und der Exzess sind Maße dafür, wie stark die Darstellung der Dichtefunktion einer Verteilung im Vergleich zur Dichtefunktion der Normalverteilung abgeflacht oder zugespitzt erscheint (siehe Bild 4.10).

Der Exzess ist gleich der Wölbung minus drei.

Die Wölbung der Normalverteilung hat den Zahlenwert drei, der Exzess dieser Verteilung ist demnach Null.

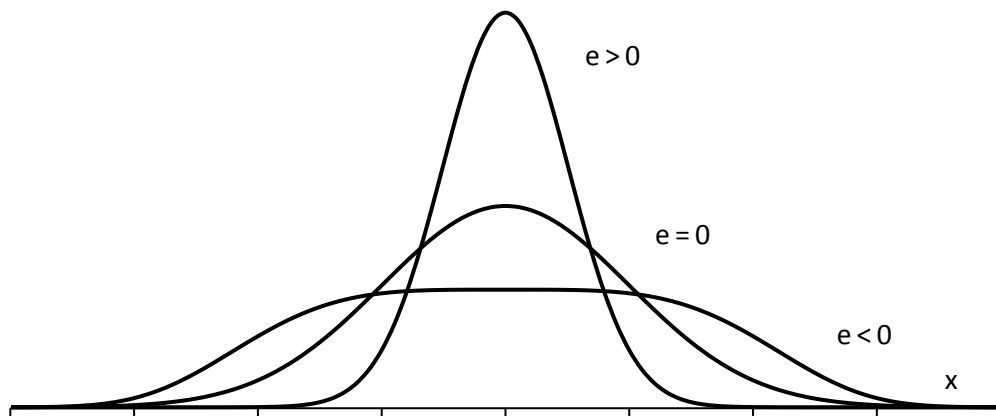
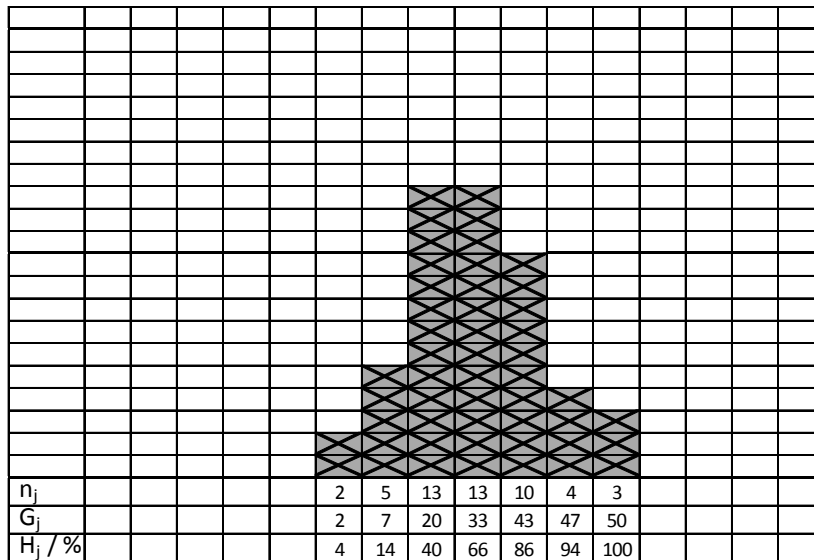


Bild 4.10: Darstellung der Dichtefunktionen dreier Verteilungen. Bei der Normalverteilung ist $e = 0$



4.6.4 Beispiele zu den Stichprobenkenngrößen

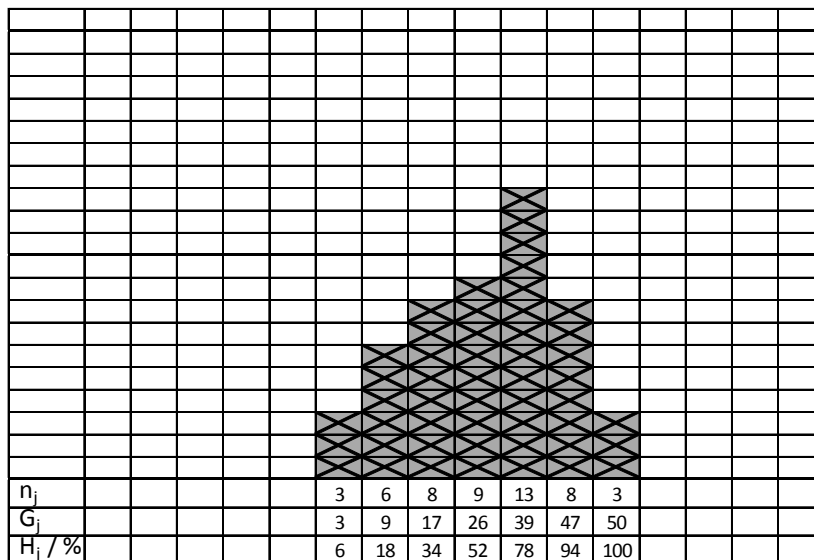
BEISPIEL 4.2:



$$\begin{aligned}
 m_1 &= 7,3 = \bar{x} \\
 m_2 &= 1,36 \\
 m_3 &= 0,53 \\
 m_4 &= 9,14 \\
 g &= 0,21 \text{ (Schiefe)} \\
 g_w &= 2,6 \text{ (Wölbung)} \\
 e &= -0,4 \text{ (Exzess)}
 \end{aligned}$$

Bild 4.11

BEISPIEL 4.3:

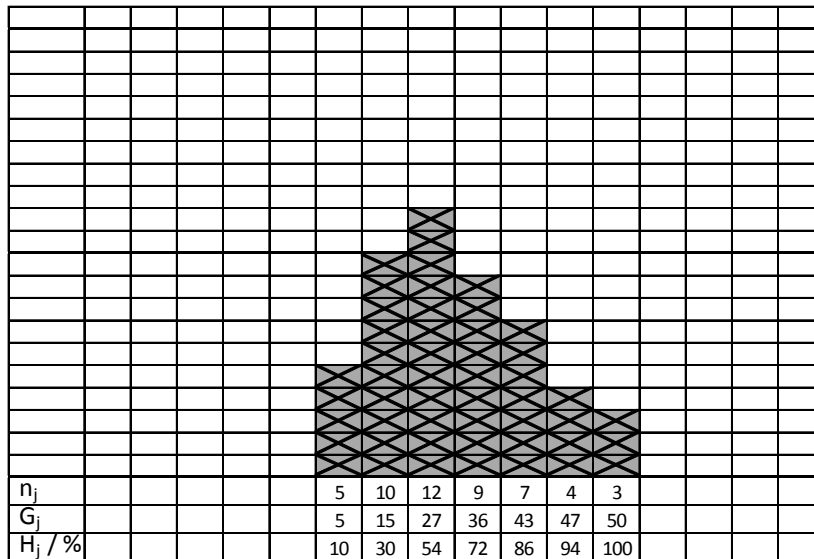


$$\begin{aligned}
 m_1 &= 9,2 = \bar{x} \\
 m_2 &= 0,0142 \\
 m_3 &= -2,42 \cdot 10^{-4} \\
 m_4 &= -4,0 \cdot 10^{-4} \\
 g &= -0,14 \text{ (Schiefe)} \\
 g_w &= 2,0 \text{ (Wölbung)} \\
 e &= -1,0 \text{ (Exzess)}
 \end{aligned}$$

Bild 4.12



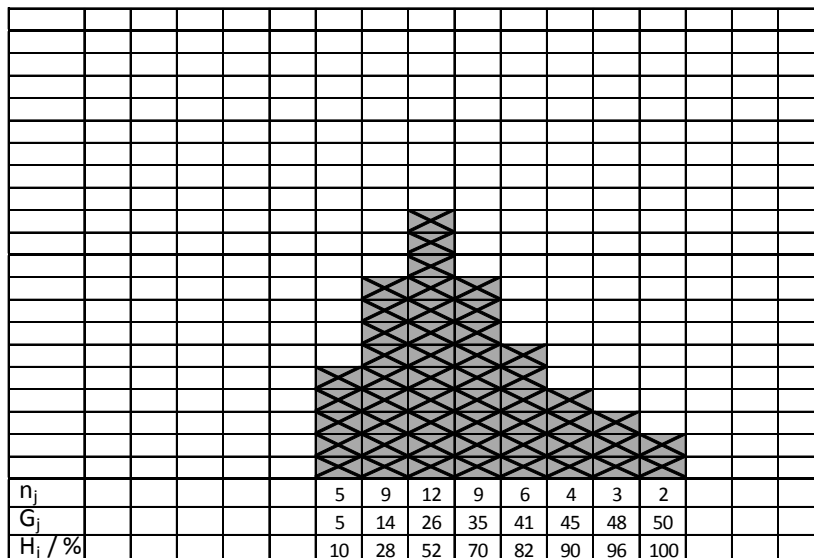
BEISPIEL 4.4:



$$\begin{aligned}
 m_1 &= 8,2 = \bar{x} \\
 m_2 &= 17,0 \\
 m_3 &= 12,67 \\
 m_4 &= 557 \\
 g &= 0,18 \text{ (Schiefe)} \\
 g_w &= 1,9 \text{ (Wölbung)} \\
 e &= -1,1 \text{ (Exzess)}
 \end{aligned}$$

Bild 4.13

BEISPIEL 4.5:



$$\begin{aligned}
 m_1 &= 6,7 = \bar{x} \\
 m_2 &= 3,4 \\
 m_3 &= 3,44 \\
 m_4 &= 30 \\
 g &= 0,55 \text{ (Schiefe)} \\
 g_w &= 2,6 \text{ (Wölbung)} \\
 e &= -0,4 \text{ (Exzess)}
 \end{aligned}$$

Bild 4.14



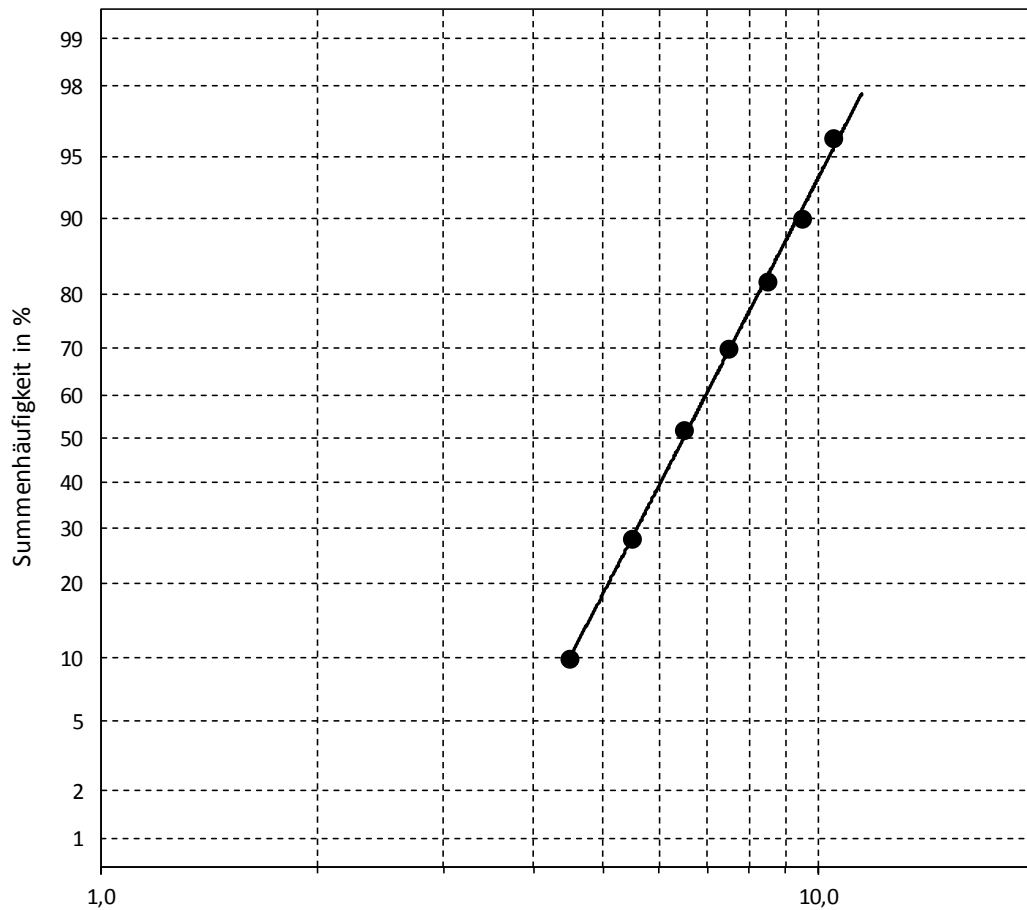
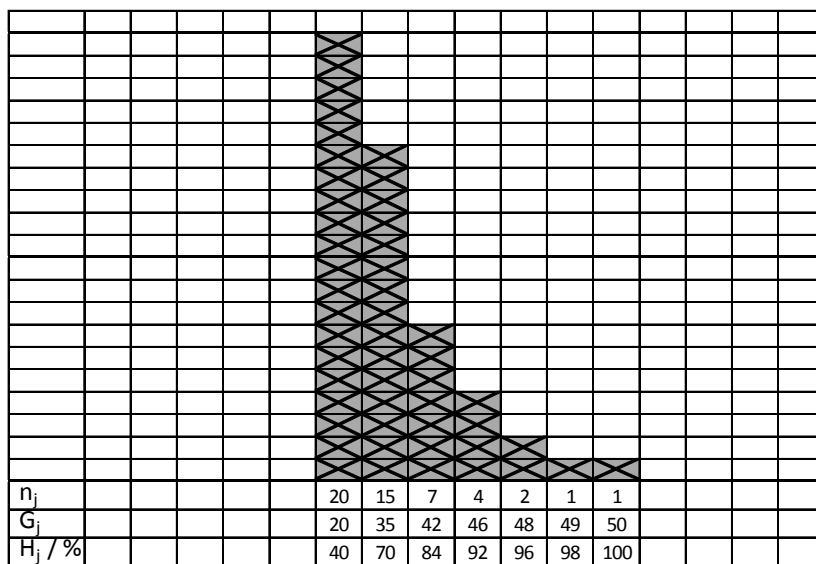


Bild 4.15: Auftragung der Punkte aus Beispiel 4.5 im logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetz. y-Achse: relative Summenhäufigkeit

BEISPIEL 4.6:



$$m_1 = 6,7 = \bar{x}$$

$$m_2 = 3,4$$

$$m_3 = 3,44$$

$$m_4 = 30$$

$$g = 0,55 \text{ (Schiefe)}$$

$$g_w = 2,6 \text{ (Wölbung)}$$

$$e = -0,4 \text{ (Exzess)}$$

Bild 4.16: Histogramm zu einem einseitig begrenzten Merkmal



5 Direkter und indirekter Schluss

Wie in Abschnitt 4 gezeigt wurde, behandelt die Statistik einerseits Verteilungen (statistische Modelle), durch die reale oder fiktive Grundgesamtheiten beschrieben werden können, andererseits Kenngrößen realer Stichproben.

Entsprechend den beiden möglichen Ausgangssituationen (Voraussetzungen) ergeben sich die folgenden grundsätzlich verschiedenen Schlussweisen:

1. Direkter (deduktiver) Schluss von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe

Voraussetzung: Die Verteilung der Grundgesamtheit und deren Kenngrößen (Parameter) sind bekannt (bzw. werden als bekannt angenommen).

Typische Anwendungen findet man im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Zusammenhang mit der Spieltheorie, aber auch bei Wahrscheinlichkeitsaussagen in der industriellen Praxis.

BEISPIELE:

- Gewinnchancen beim Roulettespiel
- Stichprobenpläne zur Prüfung diskreter Merkmale (Urnenmodell, vgl. [2])
- Berechnung von Überschreitungsanteilen bei der Toleranzrechnung

2. Indirekter (induktiver) Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit

Voraussetzung: Es liegen Einzelergebnisse einer Stichprobe vor, die einer Grundgesamtheit nach dem Zufallsprinzip entnommen wurde und somit als repräsentativ für die Grundgesamtheit betrachtet werden kann. Die Art der Merkmalsverteilung (Verteilungsfunktion) der Grundgesamtheit wird als bekannt angenommen.

BEISPIELE:

- Schätzung von Verteilungsparametern (Punktschätzung) oder deren Vertrauensbereichen (Intervallschätzung)
- Vergleich von Parametern (Testverfahren)

Die wichtigsten hierbei verwendeten Methoden und Tests werden in den folgenden Abschnitten erläutert. Als Kenngrößen werden bei diesen Verfahren nur der Mittelwert μ bzw. \bar{x} und die Standardabweichung σ bzw. s verwendet.



Verteilung von Stichprobenmittelwerten

Einen guten Einstieg in die Problematik des direkten und indirekten Schlusses gibt die Berechnung der Verteilung von Mittelwerten.

BEISPIEL 5.1: Längenmessung

Gegeben sei folgende Liste mit 50 Urwerten:

Länge /mm									
8,0	7,4	6,5	7,0	6,0	7,5	8,3	8,0	5,8	9,0
7,0	7,8	7,5	7,5	8,0	8,4	7,3	7,5	7,8	8,0
7,4	7,5	7,6	7,1	7,0	6,8	7,0	7,0	6,3	7,1
8,0	7,7	7,3	7,4	8,0	8,3	7,5	6,5	7,5	7,0
7,0	6,9	8,0	8,6	6,9	8,0	7,9	7,8	7,9	7,4

Berechnen wir, beginnend mit den ersten beiden Werten in der ersten Zeile (8,0 und 7,4), den Mittelwert aus 2, 3, 4, ..., n Werten mit $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$ so erhalten wir folgende Mittelwerte als

Funktion von n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
\bar{x}	8,00	7,70	7,30	7,23	6,98	7,07	7,24	7,34	7,17	7,35	7,32	7,36	7,37	7,38

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
\bar{x}	7,42	7,48	7,47	7,47	7,49	7,52	7,51	7,51	7,51	7,50	7,48	7,45	7,43	7,42

n	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
\bar{x}	7,38	7,37	7,39	7,40	7,40	7,40	7,41	7,44	7,44	7,42	7,42	7,41	7,40	7,39

n	43	44	45	46	47	48	49	50
\bar{x}	7,40	7,43	7,42	7,43	7,44	7,45	7,46	7,45

In Bild 5.1 sind diese Mittelwerte mit einem Punkt gekennzeichnet.

Beginnt man bei der Mittelwertberechnung mit dem letzten Wert (7,4) der Liste, dann erhält man die mit einem Kreuz gekennzeichneten Werte.

Der Mittelwert aus allen 50 Werten der Liste beträgt 7,45 mm. Im Beispiel ist der aus 20 Werten berechnete Mittelwert diesem Wert näher als der aus 10 Werten berechnete Mittelwert und dieser wiederum genauer als der aus 5 Werten berechnete Mittelwert. Dies gilt sowohl für die „Punktkurve“ als auch für die „Kreuzkurve“ (siehe Bild 5.1).

Je mehr Messwerte zur Mittelwertberechnung herangezogen werden, desto genauer ist der als Schätzwert für den wahren Mittelwert berechnete Wert. Dies ist eine statistische Gesetzmäßigkeit. Es lässt sich außerdem angeben, wie genau die Schätzwerte sind.



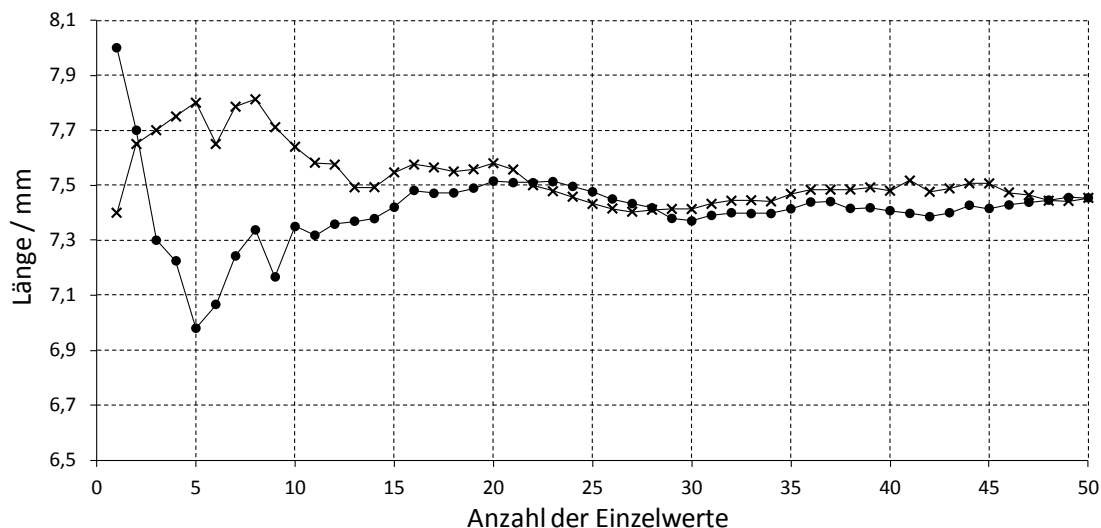


Bild 5.1: Schätzwerte für den Mittelwert

Wie in Bild 5.1 angedeutet, streuen die Schätzwerte um den Mittelwert der Grundgesamtheit. Das Ausmaß der Streuung ist ein Maß für die Genauigkeit der Schätzwerte bei verschiedenen n .

Eine Kenngröße für die Streuung der Mittelwerte ist die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$. Die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ errechnet sich aus der Standardabweichung σ der Einzelwerte der Grundgesamtheit nach der Formel:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

n ist die Anzahl der zur Berechnung der Mittelwerte \bar{x} herangezogenen Messwerte.

Stammen die n Einzelwerte aus einer beliebigen anderen Verteilung als der Normalverteilung, so ergibt sich dennoch als Verteilung der Mittelwerte (von jeweils n Werten) näherungsweise eine Normalverteilung (ab etwa $n=4$). Die Annäherung an die Normalverteilung ist umso besser, je größer der Stichprobenumfang n ist (Zentraler Grenzwertsatz der Statistik).

Demnach liegen 68,3 % aller Mittelwerte \bar{x} im Bereich zwischen $\mu - \sigma_{\bar{x}}$ und $\mu + \sigma_{\bar{x}}$. Diese Aussage entspricht einem direkten Schluss von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe.

Bezogen auf den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit kann die Aussage gemacht werden, dass der Mittelwert einer Stichprobe aus n Einzelwerten mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % zwischen $\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ und $\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ liegt.



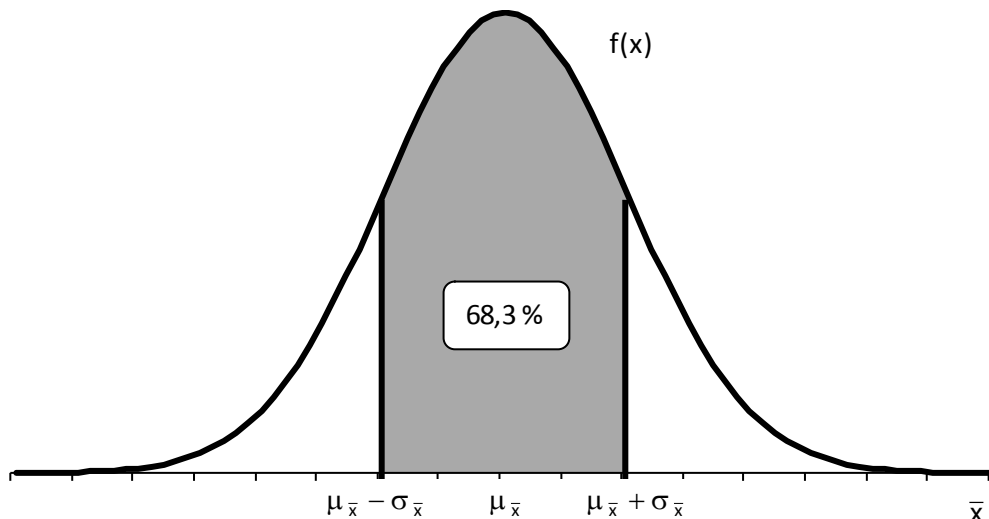


Bild 5.2: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der aus n Einzelwerten berechneten Mittelwerte \bar{x}

Mit Hilfe der Normalverteilung lässt sich zu jeder vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (Ausgawahrscheinlichkeit) ein solcher Zufallsstrebereich angeben. So gehören z.B. zu den Zufallsstregrenzen $\mu \pm \frac{2 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ und $\mu \pm \frac{3 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ die Ausgawahrscheinlichkeiten 95,4 % und 99,7 %.

Ebenso ist der umgekehrte Schluss (indirekte Schluss) möglich.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von z.B. 68,3 % gilt für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit: $\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, wobei \bar{x} der Mittelwert einer Stichprobe von n Einzelwerten ist. Beim indirekten Schluss spricht man vom Vertrauensbereich statt vom Zufallsstrebereich.

Mit den Ausgawahrscheinlichkeiten von 95,4 % und 99,7 % liegt μ innerhalb der jeweiligen Vertrauensbereiche $\bar{x} \pm \frac{2 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ und $\bar{x} \pm \frac{3 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$

Häufig benutzt man die in folgender Tabelle aufgeführten Ausgawahrscheinlichkeiten, verbunden mit dem jeweiligen Faktor u im Ausdruck $\bar{x} \pm u \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

P_A	Faktor u
90 %	1,64
95 %	1,96
95,4 %	2,0
99 %	2,58
99,7 %	3,0



Nehmen wir an, der Mittelwert der Grundgesamtheit hat im Beispiel 5.1 den Wert $\mu = 7,5 \text{ mm}$ und die Standardabweichung ist $\sigma = 0,5 \text{ mm}$.

Dann berechnet sich für eine Stichprobe mit 10 Werten der Zufallsstreuung von \bar{x} bei 95 % Aussagewahrscheinlichkeit zu

$$\mu \pm u \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7,5 \text{ mm} \pm 1,96 \cdot \frac{0,5 \text{ mm}}{\sqrt{10}} = 7,5 \pm 0,3 \text{ mm}.$$

Eine Stichprobe vom Umfang $n=10$ gehört mit 95 % Aussagewahrscheinlichkeit dann zur Grundgesamtheit mit den Kenngrößen $\mu=7,5 \text{ mm}$ und $\sigma=0,5 \text{ mm}$, wenn der zugehörige Schätzwert \bar{x} zwischen 7,2 mm und 7,8 mm liegt.

Die Aussagewahrscheinlichkeit von 95 % kann dann folgendermaßen interpretiert werden:

Würden derartige Stichproben zu 10 Messwerten bei ein und derselben Grundgesamtheit sehr oft durchgeführt, dann lägen in 95 % der Fälle die zugehörigen Schätzwerte \bar{x} tatsächlich innerhalb der Grenzen 7,2 mm und 7,8 mm, in 5 % der Fälle allerdings nicht.

Umgekehrt kann in Beispiel 5.1 bei unbekanntem μ mit Hilfe einer Stichprobe ein Mittelwert \bar{x} als Schätzwert berechnet werden, z.B. $\bar{x}=7,3$ aus 10 Werten.

Durch indirekten Schluss erhält man dann die Aussage, dass mit 95 % Aussagewahrscheinlichkeit μ innerhalb des Vertrauensbereiches $7,3 \text{ mm} \pm 1,96 \cdot \frac{0,5 \text{ mm}}{\sqrt{10}}$ liegt.

Je mehr Einzelwerte zur Schätzung herangezogen werden, desto kleiner wird der Vertrauensbereich.

Der Stichprobenumfang muss sich also an der geforderten Genauigkeit der Aussage orientieren.

In diesem Abschnitt wurde davon ausgegangen, dass die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit bekannt ist. Dies ist z.B. in der Fertigung der Fall, wenn σ aus allen gefertigten Teilen (Grundgesamtheit) ermittelt wurde.



6 Statistische Tests

6.1 Prinzipieller Ablauf eines statistischen Tests

1. Aufzählung der Voraussetzungen. Die Einzelwerte empirisch ermittelter Daten werden als Realisationen einer theoretischen Zufallsgröße betrachtet. Eine oder mehrere Eigenschaften dieser Zufallsgröße werden als bekannt vorausgesetzt.
2. Formulierung zweier einander ausschließender Aussagen, einer Nullhypothese H_0 und einer Alternativhypothese H_1 . Bei vergleichenden Tests können sich diese Hypothesen auch auf zwei oder mehrere Zufallsvariable (d.h. unter 1 genannte Datensätze) beziehen.
3. Berechnung einer Prüfgröße aus den vorhandenen Daten.
4. Wahl einer Irrtumswahrscheinlichkeit α . Ein statistischer Test ermöglicht keine mit absoluter Sicherheit richtige Entscheidung zwischen der Nullhypothese und der Alternativhypothese. Es muss eine kleine Wahrscheinlichkeit zugestanden werden, mit der die Testentscheidung falsch sein kann.
5. Vergleich der in 3. ermittelten Prüfgröße mit einem zur Irrtumswahrscheinlichkeit α gehörenden tabellierten Schwellenwert.

Testentscheidung: Ist die Prüfgröße größer als der Schwellenwert, so wird die Nullhypothese abgelehnt.

Beim zweiseitigen Test beinhaltet die Alternativhypothese zwei Fälle. Dementsprechend erfolgt der Vergleich der Prüfgröße dann mit einem unteren bzw. oberen Schwellenwert. Die Nullhypothese wird dann abgelehnt, wenn der obere Schwellenwert überschritten oder der untere Schwellenwert unterschritten wird.

Mathematisch gesehen ist der zentrale Bestandteil eines statistischen Tests eine Zufallsvariable mit bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilung. Diese Zufallsvariable kann entweder die in 1. angegebene Zufallsvariable selbst oder eine durch Verknüpfung mehrerer in 1. genannter Zufallsvariablen konstruierte Hilfsgröße sein.

Sofern die Nullhypothese richtig ist, würde die aus den Daten berechnete Prüfgröße, die sozusagen eine Realisation der betrachteten Zufallsvariablen ist, bei wiederholter Datengewinnung (Stichprobenentnahme) Werte annehmen, die in der überwiegenden Zahl der Fälle unterhalb eines durch die Irrtumswahrscheinlichkeit eindeutig bestimmten Schwellenwerts liegen. Eine Überschreitung der Schwelle käme also nur sehr selten vor.

Ist dies bei der tatsächlich betrachteten Stichprobe der Fall, so akzeptiert man dies nicht als einen der möglichen seltenen Fälle, sondern schließt daraus, dass die Nullhypothese falsch ist.

Je nach Formulierung der Alternativhypothese kann auch ein Intervall angegeben werden, das durch einen oberen und einen unteren Schwellenwert begrenzt ist.



6.2 z-Test

Als Beispiel für einen Test und die zugehörige Prüfgröße z dienen die Erkenntnisse des Abschnitts 5 über die Verteilung von Stichprobenmittelwerten bei bekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit.

Voraussetzungen für den z-Test:

- die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit ist bekannt
- die Verteilung der Grundgesamtheit ist eine Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

Wir nehmen an, dass eine Stichprobe vom Umfang n mit Mittelwert \bar{x} vorliegt. Es soll entschieden werden, ob diese Stichprobe aus einer Grundgesamtheit stammen kann, deren Mittelwert $\mu = \mu_0$ ist ([10] Vergleich des Erwartungswertes mit einem vorgegebenen Wert bei Normalverteilung).

Als Grundlage für den Test wird angenommen, dass μ tatsächlich gleich μ_0 ist, d.h. die Nullhypothese lautet $H_0: \mu = \mu_0$.

Falls die Nullhypothese falsch ist, so ist entweder $\mu < \mu_0$ oder $\mu > \mu_0$.

Wir setzen an dieser Stelle voraus, dass es uns im Augenblick egal ist, welcher dieser beiden Fälle bei Ablehnung der Nullhypothese zutrifft. Die Alternativhypothese ist deshalb:

$$H_1: \mu \neq \mu_0.$$

Im nächsten Schritt wird unter Verwendung des Stichprobenmittelwerts \bar{x} , des angenommenen Mittelwerts $\mu = \mu_0$ und der als bekannt vorausgesetzten Standardabweichung der

Mittelwerte $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ die Prüfgröße z ermittelt:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Der eigentliche Test besteht in einem Vergleich dieser Prüfgröße z mit einem unteren Schwellenwert $z_{\alpha/2}$ und einem oberen Schwellenwert $z_{1-\alpha/2}$ (Signifikanzgrenzen).

Nach Wahl einer (kleinen) Irrtumswahrscheinlichkeit α (z.B. 1 %) können $z_{\alpha/2}$ und $z_{1-\alpha/2}$ zur Aussagewahrscheinlichkeit $P_A = 1 - \alpha$ (z.B. $P_A = 99\%$) aus der Tabelle der Standardnormalverteilung entnommen werden. z entspricht dabei der Größe u in der Tabelle 12.1. Für $\alpha = 0,01 = 1\%$ ist $z_{\alpha/2} = z_{0,005} = -2,58$ und $z_{1-\alpha/2} = z_{0,995} = +2,58$.

Man sollte die Irrtumswahrscheinlichkeit α bereits vor Berechnung der Prüfgröße z festlegen und auch beibehalten. Ansonsten besteht die Gefahr, dass man beim Aufsuchen der Schwellenwerte in der Tabelle bereits auf die Prüfgröße z „schielt“ und durch spontane Änderung von α das Testergebnis beeinflusst.

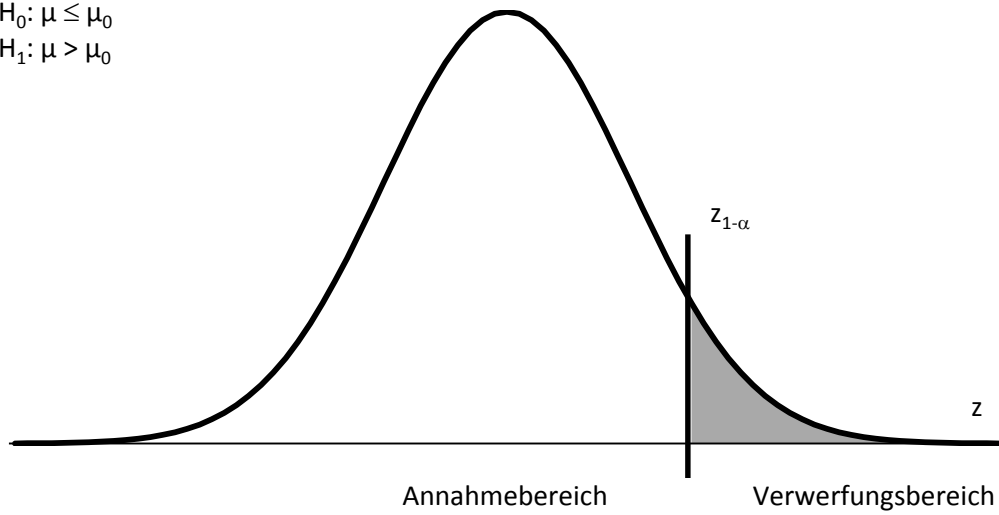
Testentscheidung:

Ist $z < z_{\alpha/2}$ oder $z > z_{1-\alpha/2}$, so wird H_0 abgelehnt, d.h. die Stichprobe kann mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α nicht aus einer Grundgesamtheit mit $\mu = \mu_0$ stammen.



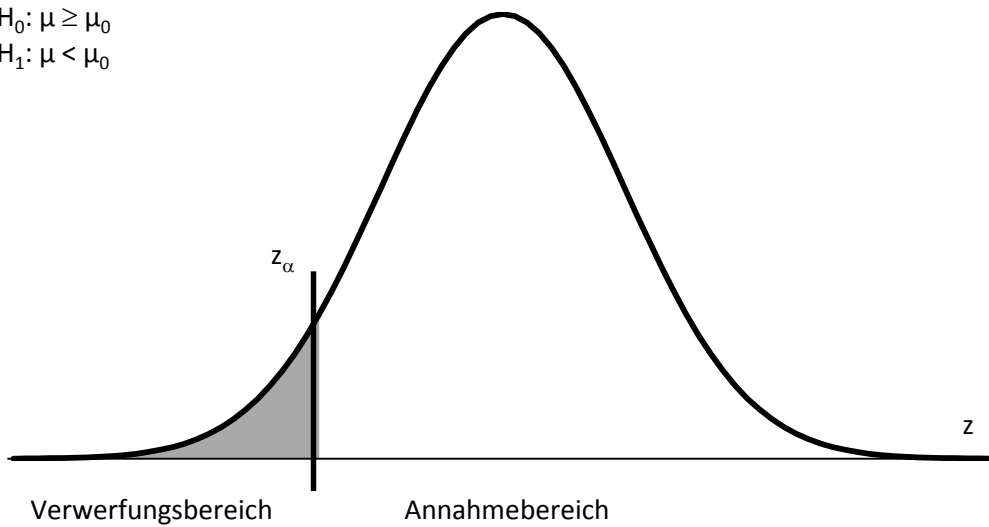
$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$



$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$



$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

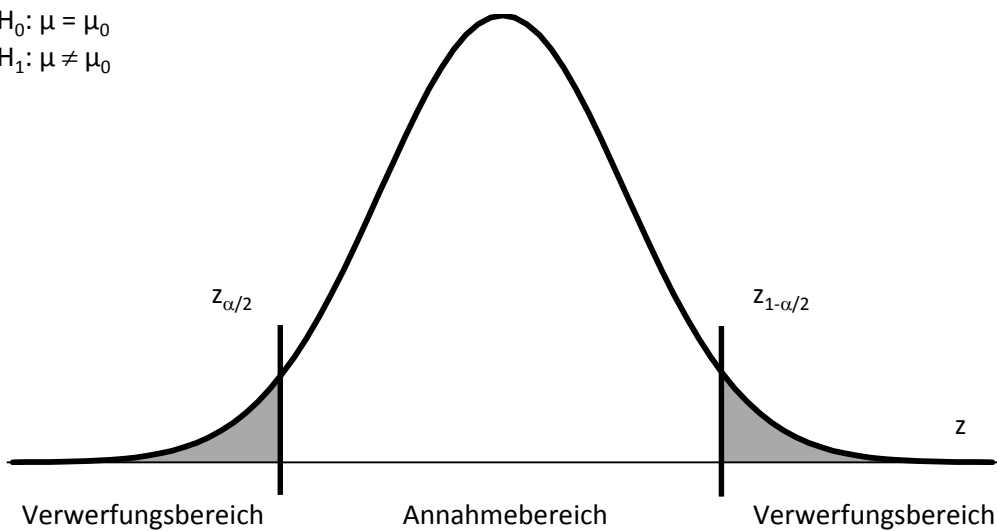


Bild 6.1: Darstellung der Annahme- und Verwerfungsbereiche beim einseitigen bzw. zweiseitigen Test



Der Test beruht darauf, dass die Verteilung der Prüfgröße z bekannt ist. Es ist eine Standardnormalverteilung. Es wird geprüft, ob der berechnete Wert z noch innerhalb des Zufallsstrebereichs liegt, der durch die Aussagewahrscheinlichkeit P_A bzw. die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1 - P_A$ gegeben ist. Wegen der Alternativhypothese $\mu \neq \mu_0$ müssen in Bezug auf α beide äußeren „Zipfel“ der Standardnormalverteilung berücksichtigt werden (Bild 6.1 unten). Man spricht deshalb in diesem Zusammenhang auch von einer zweiseitigen Fragestellung. Beim einseitigen Test wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn $z > z_{1-\alpha}$ (Bild 6.1 oben) bzw. $z < z_\alpha$ (Bild 6.1 Mitte).

BEISPIEL: Für $\alpha = 0,01 = 1\%$ ist $z_\alpha = z_{0,01} = -2,33$ und $z_{1-\alpha} = z_{0,99} = +2,33$.

Zusammenfassung:

Das vorstehende Beispiel beinhaltet alle wesentlichen Schritte eines statistischen Tests:

1. Formulierung einer Nullhypothese
2. Berechnung einer Prüfgröße, deren Verteilung bekannt ist
3. Wahl einer Irrtumswahrscheinlichkeit
4. Aufsuchen eines Schwellenwerts für die Prüfgröße in der Verteilungstabelle
5. Vergleich der Prüfgröße mit dem Schwellenwert, Testentscheidung.

6.3 Fehlentscheidungen bei statistischen Tests

Im Abschnitt 6.2 wird eine zweiseitige Fragestellung betrachtet, d.h. die Nullhypothese $H_0: \mu = \mu_0$ wird gegen die Alternativhypothese $H_1: \mu \neq \mu_0$ getestet.

Bei einer einseitigen Fragestellung lautet die Nullhypothese beispielsweise $H_0: \mu \leq \mu_0$ und die Alternativhypothese entsprechend $H_1: \mu > \mu_0$ (Bild 6.1 oben). Hintergrund dieses einseitigen Tests könnte beispielsweise die Frage sein, ob sich durch die Einführung einer Prozessänderung die Scherfestigkeit einer Lötverbindung gegenüber dem bisherigen Mittelwert erhöht (Alternativhypothese ist richtig) oder nicht (Alternativhypothese ist falsch).

Im Rahmen dieses Tests sind zwei Arten von Fehlentscheidungen möglich:

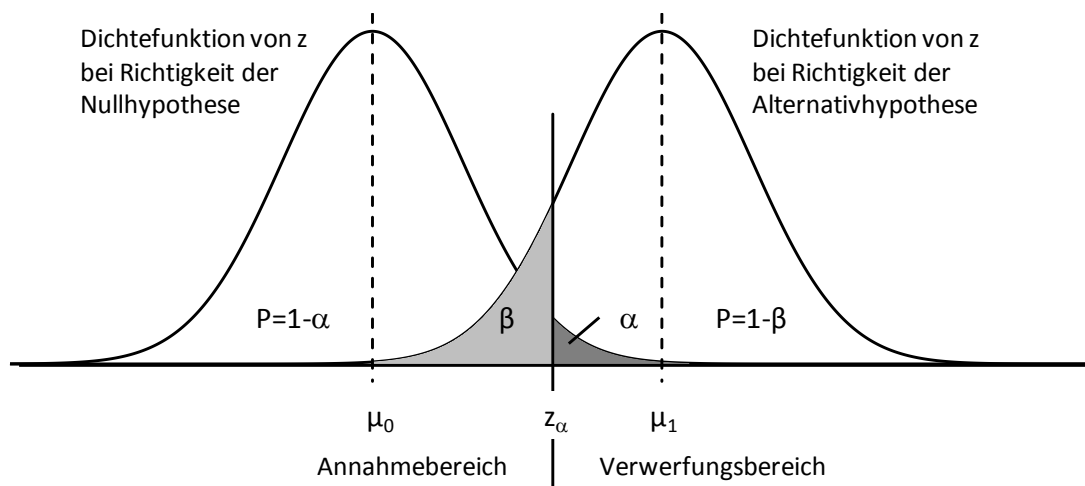
- Fehler 1. Art: Die Nullhypothese wird fälschlicherweise abgelehnt. Im genannten Beispiel bedeutet dies, dass man aufgrund des Testergebnisses eine Prozessänderung vornimmt, obwohl diese keinerlei Auswirkungen hat oder die Festigkeit sogar noch verringert. Die zugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit ist $\alpha = 1 - P_A$.
- Fehler 2. Art: Die Nullhypothese wird fälschlicherweise beibehalten. Dies bedeutet, dass man aufgrund des Testergebnisses auf eine Prozessänderung verzichtet, obwohl diese die Festigkeit wesentlich erhöhen würde. Die zugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit ist β .

Beide Fehlentscheidungen sind „unangenehm“. Im ersten Fall tätigt man unnötigerweise eine teure Investition, während man sich im zweiten Fall z.B. einen Wettbewerbsvorteil entgehen lässt.



Fehlerarten, Annahmewahrscheinlichkeiten und Risiken bei statistischen Tests:

Aufgrund des Testergebnisses angenommener Sachverhalt	unbekannter, wahrer Sachverhalt	
	H_0 ist richtig ($\mu \leq \mu_0$).	H_1 ist richtig ($\mu > \mu_0$).
H_0 ist richtig	Richtige Entscheidung! $P = 1 - \alpha$	Fehler 2. Art $P = \beta$
H_1 ist richtig	Fehler 1. Art $P = \alpha$	Richtige Entscheidung! $P = 1 - \beta$

**Bild 6.2:** Risiken bei einem statistischen Test (schematisch)

Die Wahrscheinlichkeit α für den Fehler 1. Art (Irrtumswahrscheinlichkeit) heißt in der statistischen Literatur Signifikanzniveau. Ein Testergebnis ist also „hochsignifikant“, wenn α sehr klein ist. Da diese Zuordnung im allgemeinen Sprachgebrauch leicht zu Missverständnissen führen kann, bezeichnet man stattdessen meist $P = 1 - \alpha$ als Signifikanzniveau und spricht von „hoher Signifikanz“, wenn z.B. $P = 1 - \alpha > 99\%$.

Die Festlegung in dieser Unterlage, ein Testergebnis ab $P = 95\%$ als signifikant und ab $P = 99\%$ als „hochsignifikant“ zu bezeichnen, erfolgt willkürlich. Sofern in konkreten Situationen die Folgen einer Fehlentscheidung sehr schwerwiegend sind (z.B. Gefährdung von Menschenleben), wird man erst bei Zahlen, die wesentlich größer als 99 % sind, von hoher Signifikanz sprechen.



6.4 Vertrauensbereich von Mittelwerten (σ der Grundgesamtheit unbekannt)

6.4.1 t-Verteilung

In der Regel ist die Standardabweichung σ einer Grundgesamtheit nicht bekannt. Der Vertrauensbereich des Mittelwerts μ der Grundgesamtheit lässt sich dann nicht mehr über die standardnormalverteilte Größe u (vgl. Abschnitt 4.2) berechnen, sondern muss mit Hilfe der Größe

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{s}$$

bestimmt werden, die der sogenannten Studentschen t-Verteilung unterliegt.

Die Darstellung der Dichtefunktion der t-Verteilung ist der der Normalverteilung (siehe Bild 6.3) sehr ähnlich. Beide sind symmetrisch, glockenförmig und besitzen einen Wertebereich von minus Unendlich bis plus Unendlich. Je kleiner der Stichprobenumfang n ist, um so flacher verläuft die Kurve, d.h. im Verhältnis zur Standardnormalverteilung ist die Wahrscheinlichkeit, in den Ausläufen einen t-Wert zu finden, etwas größer, und die Wahrscheinlichkeit, im zentralen Teil einen t-Wert zu finden, etwas geringer.

Bei großem Stichprobenumfang geht die t-Verteilung in die Normalverteilung über (d.h. die Größe t geht in u über).

Da im Ausdruck für t der Stichprobenumfang n enthalten ist, gibt es zu jedem n eine eigene t-Verteilung; man sagt, die t-Verteilung hat einen Freiheitsgrad f . Dieser entspricht dem um eins verminderten Stichprobenumfang: $f = n - 1$.

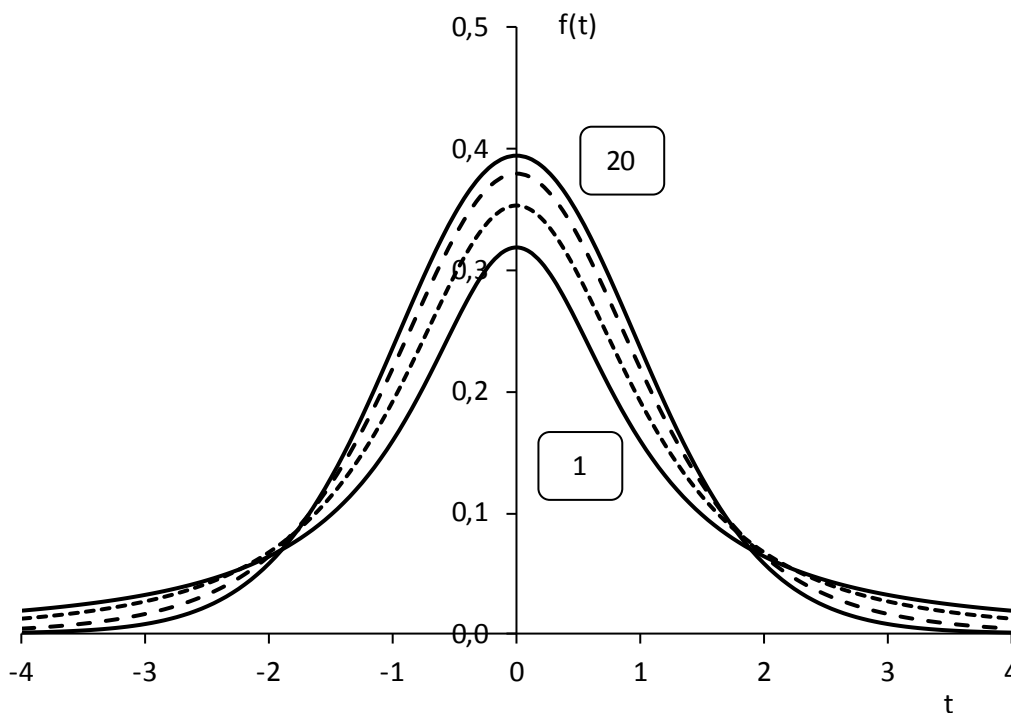


Bild 6.3: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der t-Verteilung für die Freiheitsgrade $f = 1, 2, 5, 20$. Für $f \rightarrow \infty$ geht die t-Verteilung in die Normalverteilung über.



Der gesuchte Vertrauensbereich für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit lässt sich in der Form

$$\bar{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

angeben. Hierin sind \bar{x} und s der aus der Stichprobe vom Umfang n berechnete Mittelwert bzw. die empirische Standardabweichung.

Die Größe t ist ein Wert der tabellierten t -Verteilung (Anhang, Tabelle 12.2) zum Freiheitsgrad $f = n - 1$ und der Aussagewahrscheinlichkeit P_A . Der obige Ausdruck bedeutet demnach, dass der unbekannte Mittelwert μ mit einer Wahrscheinlichkeit P_A (von z.B.

95 %) zwischen $\bar{x} - t_{n-1; 0,95} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ und $\bar{x} + t_{n-1; 0,95} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ liegt.

6.4.2 Nomogramm zur Bestimmung des Vertrauensbereichs für μ

Der Vertrauensbereich für μ kann auch mit Hilfe des in Bild 6.4 abgebildeten Nomogramms (Aussagewahrscheinlichkeit 95 %) ermittelt werden.

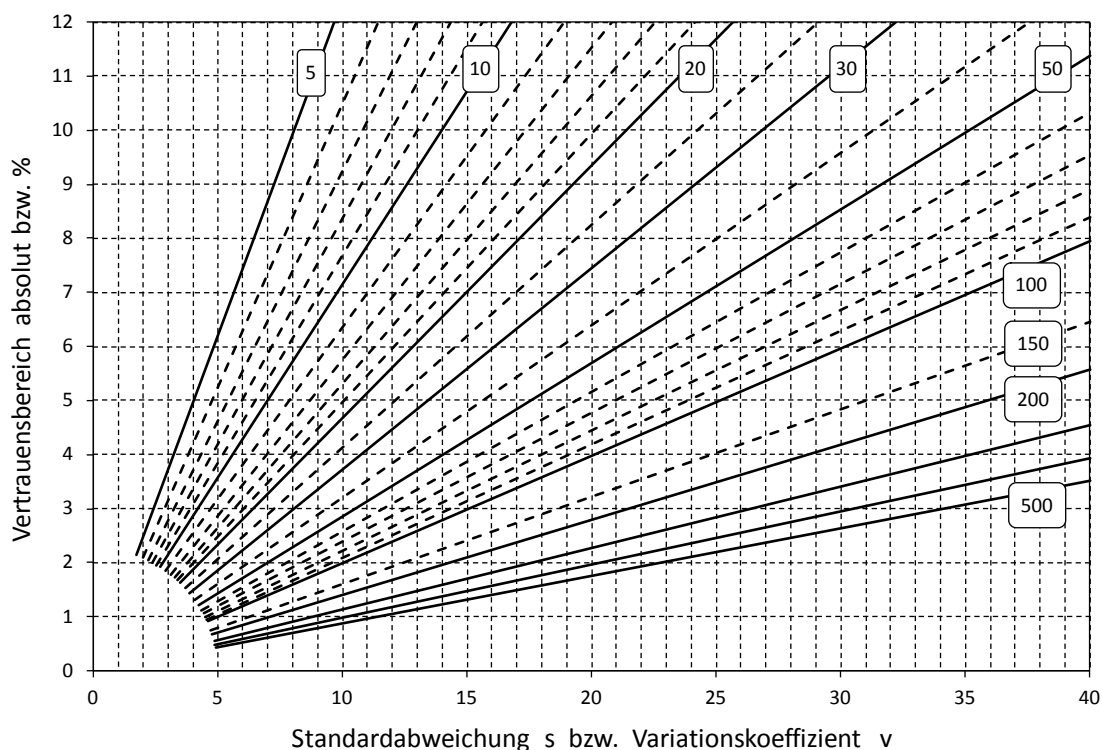


Bild 6.4: Vertrauensbereich für μ ; $P_A = 95\%$ (zweiseitig)

In Bild 6.4 ist jedem Abszissenwert s in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n der Ordinatenwert $t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ (er entspricht dem Abstand der Vertrauensgrenzen für μ vom Stichprobenmittelwert \bar{x}) zugeordnet.



Wählt man als Abszissenwert den Variationskoeffizienten $v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$, so erhält man wegen des Zusammenhangs $\frac{s \cdot t}{\bar{x} \cdot \sqrt{n}} \cdot 100\% = v \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot 100\%$ als Ordinatenwert den Vertrauensbereich für μ bezogen auf den Mittelwert \bar{x} . Dieser Wert wird auch relativer Fehler genannt. In beiden Fällen kann der Maßstab der Abszissen- und Ordinatenachse durch gleiche Kommaverschiebungen auf beiden Achsen den gegebenen Größenordnungen angepasst werden.

BEISPIEL 6.1:

Aus $n=25$ Messwerten einer Stichprobe wurden der Mittelwert $\bar{x}=44,0$ und die Standardabweichung $s=2,2$ berechnet.

In Bild 6.4 liest man beim Abszissenwert 22 und $n=25$ als Ordinatenwert 9 ab.

Berücksichtigt man die Kommastelle, dann ist $t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,9$.

Mit 95 % Aussagewahrscheinlichkeit ist also $43,1 \leq \mu \leq 44,9$.

Der Variationskoeffizient ist: $v = \frac{2,2}{44,0} \cdot 100\% = 5\%$.

Beim Abszissenwert 5 und $n=25$ liest man in Bild 12 als Ordinatenwert 2,1 ab.

Der relative Fehler beträgt somit $\pm 2,1\%$.

Mit Hilfe des Nomogramms in Bild 6.4 kann außerdem der Stichprobenumfang ermittelt werden, der erforderlich ist, um in einem vorgegebenen relativen Vertrauensbereich zu bleiben.

BEISPIEL 6.2:

Erwartet wird ein Stichprobenmittelwert $\bar{x}=1,2$ und eine Standardabweichung $s=0,029$.

Der Variationskoeffizient ist somit $v=2,4\%$.

Gesucht ist der Stichprobenumfang bei einem zugelassenen relativen Fehler von 0,5 % bei 95 % Aussagewahrscheinlichkeit.

Durch den zum Abszissenwert 24 und Ordinatenwert 5 gehörenden Punkt im Koordinatennetz geht die Gerade für $n=90$. Es ist somit eine Stichprobe von 90 Messwerten erforderlich.



6.5 Zufallsstreuung und Vertrauensbereich der Standardabweichung

Die beurteilende Statistik ermöglicht auch die Berechnung des Zufallsstreuereichs der empirischen Standardabweichung s bzw. des Vertrauensbereichs der Standardabweichung σ der Grundgesamtheit. Dies geschieht mit Hilfe der χ^2 -Verteilung (sprich: Chi-Quadrat-Verteilung), aus der die in der Tabelle 6.1 angegebenen Werte B_{unten} und B_{oben} errechnet wurden.

f = n - 1	n	P _A = 90%		P _A = 95%		P _A = 99%	
		B _{un}	B _{ob}	B _{un}	B _{ob}	B _{un}	B _{ob}
1	2	0,06	1,96	0,03	2,24	0,01	2,81
2	3	0,24	1,73	0,16	1,92	0,07	2,3
3	4	0,34	1,61	0,27	1,76	0,16	2,07
4	5	0,42	1,54	0,35	1,67	0,23	1,93
5	6	0,48	1,49	0,41	1,60	0,29	1,83
6	7	0,52	1,45	0,45	1,55	0,34	1,76
7	8	0,56	1,42	0,49	1,51	0,38	1,70
8	9	0,58	1,39	0,52	1,48	0,41	1,66
9	10	0,61	1,37	0,55	1,45	0,44	1,62
11	12	0,64	1,34	0,59	1,41	0,49	1,56
13	14	0,67	1,31	0,62	1,38	0,52	1,52
15	16	0,70	1,29	0,65	1,35	0,55	1,48
17	18	0,71	1,27	0,67	1,33	0,58	1,45
19	20	0,73	1,26	0,68	1,31	0,60	1,42
24	25	0,76	1,23	0,72	1,28	0,64	1,38
29	30	0,78	1,21	0,74	1,26	0,67	1,34
34	35	0,80	1,20	0,76	1,24	0,70	1,32
39	40	0,81	1,18	0,78	1,22	0,72	1,30
49	50	0,83	1,16	0,80	1,20	0,75	1,26
59	60	0,85	1,15	0,82	1,18	0,77	1,24
119	120	0,89	1,11	0,88	1,13	0,84	1,17

Tabelle 6.1: Faktoren zur Berechnung des Zufallsstreuereichs von s bzw. des Vertrauensbereichs von σ bei Aussagewahrscheinlichkeiten (zweiseitig) $P_A = 90\%$, $P_A = 95\%$ und $P_A = 99\%$. f ist die Zahl der Freiheitsgrade, n der Stichprobenumfang

Wenn die Standardabweichung der Grundgesamtheit bekannt ist oder hierfür ein hypothetischer Wert angenommen wird, so kann berechnet werden, in welchem Zufallsstreuereich die Standardabweichung s einer Stichprobe vom Umfang n mit vorgegebener Aussagewahrscheinlichkeit liegen muss, damit sie zu dieser Grundgesamtheit gehören kann.

Der Zufallsstreuereich für s ist gegeben durch

$$B_{\text{un}} \cdot \sigma < s < B_{\text{ob}} \cdot \sigma.$$



Ist σ unbekannt und will man wissen, in welchem Bereich um einen Schätzwert s das wahre σ mit vorgegebener Aussagewahrscheinlichkeit liegt, dann berechnet man den Vertrauensbereich für σ aus dem Schätzwert s und den Werten aus der Tabelle 6.1 in folgender Weise: $\frac{1}{B_{ob}} \cdot s < \sigma < \frac{1}{B_{un}} \cdot s$.

BEISPIEL 6.3:

Aus den $n=40$ Einzelwerten einer Stichprobe wurden der Mittelwert $\bar{x}=100$ und die Standardabweichung $s=24$ berechnet.

Mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95 % gilt dann:

$$\frac{1}{1,22} \cdot 24 < \sigma < \frac{1}{0,78} \cdot 24 \quad \text{also} \quad 20 < \sigma < 31.$$

Anders als bei den Vertrauensgrenzen für den Mittelwert sind hier die Abstände der Vertrauensgrenzen zum Schätzwert nicht gleich groß.

6.6 Test auf Zufälligkeit

Beim mehrfachen Wurf einer Münze erwartet man, dass sich die Wurfsergebnisse „Kopf“ (K) und „Zahl“ (Z) in unregelmäßiger Weise abwechseln. Insbesondere würde man eine Ergebnisfolge wie „... Z K K K K K K Z Z K ...“ als ungewöhnlich ansehen. Beim Münzwurf ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis („K“ bzw. „Z“) gleich 0,5.

Wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Würfe ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Folge von sieben „K“-Würfen $(0,5)^7 \approx 0,8\%$.

Eine solche Folge von identischen Symbolen nennt man Iteration. Die Ergebnisfolge „Z K K K Z K K K Z Z K“ besteht aus den 6 Iterationen (Z), (K K K), (Z), (K K K K), (Z Z) und (K), also 3 Iterationen von „K“ und 3 Iterationen von „Z“.

Gibt man eine Zahl n von Würfeln vor, so erwartet man, dass die Anzahl der Iterationen nicht zu groß, aber auch nicht zu klein ist. Im ersten Fall würden sich „K“ und „Z“ zu häufig (zu regelmäßig) abwechseln, im zweiten Fall dagegen zu selten.

Die Anzahl r der Iterationen des Symbols „K“ bzw. des Symbols „Z“ in einer Folge von n Münzwürfen ist eine Zufallsgröße. Die Zufälligkeit einer Folge von Wurfsergebnissen lässt sich mit Hilfe dieser Zufallsgröße r testen.

Ist die Gesamtzahl der Einzelergebnisse „K“ gleich n_1 und die Gesamtzahl der Einzelergebnisse „Z“ gleich n_2 , so lässt sich ein Bereich angeben, in dem r mit der Wahrscheinlichkeit $P_A = 1 - \alpha$ liegt (vgl. [10]).

Beim zweiseitigen Test wird die Nullhypothese H_0 : „Die Ergebnisfolge ist zufällig“ verworfen, wenn $r_{n_1; n_2; \alpha/2} < r$ oder $r > r_{n_1; n_2; 1 - \alpha/2}$.

Dieser Test lässt sich auch auf eine Folge von Messwerten anwenden, wenn man die Einzelwerte x_i ($i=1, 2, \dots, n$) durch folgende Vorschrift in eine Folge von Plus- und Minuszeichen umwandelt (\tilde{x} ist der Median der Messreihe):

- Ersetze x_i durch „+“, wenn $x_i > \tilde{x}$ und
- ersetze x_i durch „-“, wenn $x_i \leq \tilde{x}$.

Prüfgröße bei diesem sogenannten Run-Test ist dann die Anzahl r der Iterationen der Symbole „+“ und „-“. Eine detaillierte Beschreibung dieses Tests und die dazugehörige



Tabelle der kritischen Werte (untere und obere Grenze von r) findet man z.B. in [10] oder [11].

Bei dem ähnlichen Test nach Wallis und Moore wird die Folge von Plus- und Minuszeichen gebildet, indem man aus jeweils zwei aufeinanderfolgenden Werten die Differenz berechnet. Auch dieser Test ist in der angegebenen Literatur beschrieben.

Ein Test auf Zufälligkeit kann hilfreich sein, wenn Zweifel an der Unabhängigkeit von aufeinanderfolgenden Messwerten bestehen. Dies ist beispielsweise im Zusammenhang mit einer Prozessdatenanalyse oder einer Maschinenfähigkeitsuntersuchung denkbar.

Der Test wird z.B. dann ansprechen, wenn der Datensatz eine oder mehrere „Konzentrationen“ ähnlicher Werte enthält (Chargensprünge), ein Trend oder eine Periodizität vorliegt. Ein solcher Sachverhalt sollte in diesen Fällen jedoch ebenso anhand eines Urwertdiagramms (Abschnitt 2.1) erkennbar sein.

6.7 Ausreißertest nach Grubbs

Der Grubbs-Test setzt voraus, dass eine normalverteilte Grundgesamtheit vorliegt, deren Mittelwert und Standardabweichung unbekannt sind.

Zunächst wird aus allen vorliegenden n Stichprobenwerten der empirische Mittelwert \bar{x} und die Standardabweichung s berechnet.

Kommt der kleinste Stichprobenwert x_{\min} als Ausreißer in Betracht, so wird die Prüfgröße

$\frac{\bar{x} - x_{\min}}{s}$ berechnet, ist dagegen der größte Stichprobenwert x_{\max} ausreißerverdächtig,

so bildet man die Prüfgröße $\frac{x_{\max} - \bar{x}}{s}$.

Man entnimmt der Tabelle 12.5 den zur Aussagewahrscheinlichkeit $P_A = 1 - \alpha$ gehörenden kritischen Wert und vergleicht diesen mit der Prüfgröße. Ist die Prüfgröße größer als der kritische Wert, so liegt mit der Wahrscheinlichkeit P_A ein echter Ausreißer vor.

BEISPIEL 6.4:

Bei der Bestimmung der Festigkeit von 15 Drahtstücken wurden folgende Bruchlasten (N) gemessen: 76, 84, 82, 88, 89, 83, 72, 70, 82, 54, 82, 76, 88, 87, 78

Der Wert 54 N ist ausreißerverdächtig.

Aus den $n=14$ Werten (einschließlich des ausreißerverdächtigen Werts) ergeben sich

der Mittelwert $\bar{x} = 81,21 N$,

die Standardabweichung $s = 6,04 N$.

In Tabelle 12.5 findet man zu $n=14$ und $P_A=95\%$ den kritischen Wert 2,409.

Wegen $\frac{\bar{x} - x_{\min}}{s} = \frac{79,4 - 54}{9,12} = 2,785 > 2,409$ lautet das Testergebnis:

Der Messwert 54 N ist mit $P_A=97,5\%$ ein echter Ausreißer.

ANMERKUNG:

Zur Überprüfung der Voraussetzung (Normalverteilung) kann man die Einzelwerte mit Hilfe von Medianrängen in ein Wahrscheinlichkeitsnetz eintragen. In diesem Beispiel ist dabei bereits ersichtlich, dass die Punkte mit Ausnahme des zu dem Ausreißerwert gehörenden Punkts recht gut durch eine Gerade approximierbar sind.



7 Vergleich zweier Messreihen

7.1 F-Test

Bei der Auswertung zweier Messreihen, die z.B. vor bzw. nach einer Verfahrensänderung durchgeführt wurden, kann sich ein deutlicher Unterschied der beiden empirischen Varianzen s_1^2 und s_2^2 ergeben.

Die Frage, ob dieser Unterschied zufällig ist, oder ob er auf die Verfahrensänderung zurückzuführen ist, kann mit Hilfe des F-Tests beantwortet werden.

Dazu berechnet man zunächst das Verhältnis der beiden Varianzen:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

s_1^2 ist die größere der beiden Varianzen und steht über dem Bruchstrich. n_1 ist der zu s_1^2 gehörende Stichprobenumfang.

Anschließend vergleicht man die Prüfgröße F mit den Tabellenwerten $F(95\%)$ und $F(99\%)$ zu den Freiheitsgraden $f_1 = n_1 - 1$ und $f_2 = n_2 - 1$ (Tabelle 12.3, zweiseitig).

Testergebnis:

Falls ist der Unterschied der beiden Varianzen statistisch
$F \geq F(99\%)$	hochsignifikant
$F(99\%) > F \geq F(95\%)$	signifikant
$F(95\%) > F$	nicht signifikant

BEISPIEL 7.1:

Im Rahmen einer vergleichenden Untersuchung wurden Bruchlasten (N) von Drahtstücken aus zwei verschieden behandelten Chargen ermittelt.

Die statistischen Kenngrößen der Messreihen sind:

$$\text{Charge A: } \bar{x}_A = 82,3 \text{ N} \quad s_A^2 = 18 \text{ N}^2 \quad n_A = 10$$

$$\text{Charge B: } \bar{x}_B = 90,0 \text{ N} \quad s_B^2 = 128 \text{ N}^2 \quad n_B = 12$$

Während die Mittelwerte auf den ersten Blick ähnlich sind, erscheint die Abweichung der Varianzen recht groß.

$$\text{Man errechnet: } F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{128 \text{ N}^2}{18 \text{ N}^2} = 7,1.$$

$$\text{Freiheitsgrade: } f_1 = n_1 - 1 = 11 \text{ und } f_2 = n_2 - 1 = 9.$$

In der Tabelle 12.3 (zweiseitig) der F-Verteilung im Anhang findet man zu den Freiheitsgraden $f_1 = 10$ und $f_2 = 9$ den Schwellenwert $F(99\%) = 6,42$. Da die Tabelle keine Spalte zum 1. Freiheitsgrad $f_1 = 11$ enthält, kann problemlos der Schwellenwert zum nächstkleineren angegebenen Freiheitsgrad ($f_1 = 10$) gewählt werden. Dies bedeutet lediglich eine vernachlässigbare Verschiebung des Signifikanzniveaus.

Wegen $F \geq F(99\%)$ lautet die Testentscheidung also:

Der Unterschied der beiden Varianzen ist hochsignifikant.



Der F-Test in der hier dargestellten Form testet die Nullhypothese $\mu_1 = \mu_2$ gegen die Alternative $\mu_1 \neq \mu_2$. Es liegt also eine zweiseitige Fragestellung vor.

Die Tabelle 12.3 (zweiseitig) im Anhang gibt entsprechend der zweiseitigen Fragestellung die zweiseitigen Schwellenwerte 95 % und 99 % der F-Verteilung an. Sie entsprechen den einseitigen Schwellenwerten 97,5 % und 99,5 %.

7.2 t-Test

7.2.1 t-Test für Stichproben mit gleichen Varianzen

Mit Hilfe eines t-Tests soll entschieden werden, ob die Mittelwerte \bar{x}_1 und \bar{x}_2 zweier Stichproben vom Umfang n_1 bzw. n_2 signifikant verschieden sind, oder ob die beiden Stichproben aus einer gemeinsamen Grundgesamtheit stammen.

Die Funktionsweise des t-Tests lässt sich anhand des folgenden Gedankenexperiments erläutern.

Wir entnehmen einer normalverteilten Grundgesamtheit $N(\mu, \sigma)$ zwei Stichproben vom Umfang $n = n_1 = n_2$, berechnen die Mittelwerte \bar{x}_1 und \bar{x}_2 sowie die Standardabweichungen s_1 und s_2 (bzw. die Varianzen s_1^2 und s_2^2) und ermitteln daraus schließlich den

$$\text{Wert } t = \sqrt{n} \cdot \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}.$$

t kann Werte zwischen 0 und $+\infty$ annehmen. Wiederholen wir diesen Vorgang sehr oft, so werden wir erwarten, meist kleine Werte nahe null und nur selten sehr große Werte zu finden.

t besitzt eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, deren Graph in Bild 7.1 für den Fall $n=10$ wiedergegeben ist.

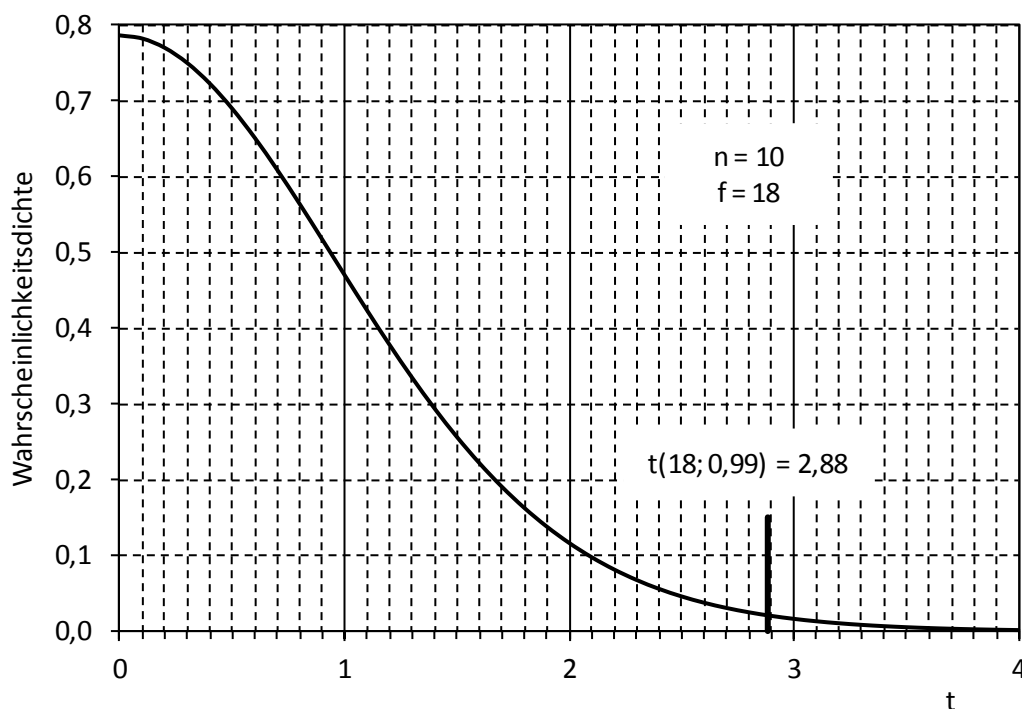


Bild 7.1



Die obere Grenze des 99%-Zufallsstrebereichs (Schwellenwert) von t ist in diesem Beispiel $t_{18; 0,99} = 2,88$, d.h. nur in 1 % aller Fälle können sich zufällig größere Werte als 2,88 ergeben. Tritt dieser Fall beim Vergleich zweier Stichproben mit $n=10$ tatsächlich auf, so schließt man daraus, dass die Stichproben nicht aus derselben Grundgesamtheit stammen können.

Die Schwellenwerte der t -Verteilung sind für verschiedene Irrtumswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad $f = 2 \cdot (n - 1)$ tabelliert (Tabelle 12.2). Auf dem oben dargestellten Zusammenhang basiert die Vorgehensweise beim t -Test.

Es soll entschieden werden, ob die arithmetischen Mittelwerte zweier vorliegender Messreihen (jeweils vom Umfang n) zu ein und derselben Grundgesamtheit gehören können oder nicht. Als sogenannte Nullhypothese wird also angenommen, dass die Mittelwerte der jeweils zugehörigen Grundgesamtheit gleich sind.

Sodann wird aus den Mittelwerten \bar{x}_1 und \bar{x}_2 sowie den Varianzen s_1^2 und s_2^2 die Testgröße

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \quad \text{für } n_1 = n_2 = n$$

berechnet.

Durch Vergleich der Prüfgröße t mit den Tabellenwerten $t(95\%)$ und $t(99\%)$ zum Freiheitsgrad $f = n_1 + n_2 - 2$ (Tabelle 12.2, zweiseitig) erhält man schließlich das

Testergebnis:

Falls ist der Unterschied der beiden Mittelwerte statistisch
$t \geq t(99\%)$	hochsignifikant
$t(99\%) > t \geq t(95\%)$	signifikant
$t(95\%) > t$	nicht signifikant

Der t -Test in der hier dargestellten Form testet die Nullhypothese $\mu_1 = \mu_2$ gegen die Alternative $\mu_1 \neq \mu_2$. Es liegt also eine zweiseitige Fragestellung vor. Aus diesem Grund steht im Ausdruck für t der Betrag der Mittelwertsdifferenz.

t kann folglich nur Werte ≥ 0 annehmen, so dass sich die in Bild 7.1 gezeigte Verteilung ergibt.

Die Tabelle 12.2 (zweiseitig) im Anhang gibt entsprechend der zweiseitigen Fragestellung u. a. die zweiseitigen Schwellenwerte 95 %, 99 %, und 99,9 % der t -Verteilung an. Sie entsprechen den einseitigen Schwellenwerten 97,5 %, 99,5 % und 99,95 %.

Der Ausdruck für die Prüfgröße t ist in dieser einfachen Form nur dann anwendbar, wenn die Varianzen der Grundgesamtheiten sowie die Stichprobenumfänge jeweils als gleich vorausgesetzt werden ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ und $n_1 = n_2 = n$). Die Voraussetzung gleicher Varianzen kann mit Hilfe eines F -Tests (vgl. 7.1) geprüft werden.



Im Falle $n_1 \neq n_2$ erhält der Ausdruck für t unter Verwendung der Hilfsgröße

$$s_D = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} \quad \text{die Form} \quad t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s_D}.$$

Die Testentscheidung erfolgt wie oben, jedoch muss wegen $n_1 \neq n_2$ ein Ersatzfreiheitsgrad für t berechnet und beim Aufsuchen der Tabellenwerte berücksichtigt werden (vgl. 7.2.2).

7.2.2 t-Test für Stichproben mit ungleichen Varianzen

Falls die Varianzen der Grundgesamtheiten, aus denen die Stichproben stammen, nicht notwendigerweise gleich sind, so erfolgt die Berechnung der Prüfgröße t mit Hilfe des Ausdrucks:

$$s_D = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \quad \text{in der Form} \quad t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s_D}.$$

Es ist ein Ersatzfreiheitsgrad f nach folgender Formel zu berechnen [14]:

$$f = \frac{s_D^4}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}. \quad (f \text{ zur ganzen Zahl abrunden!})$$

Diese etwas mühsame Berechnung von f kann häufig durch eine Schätzung ersetzt werden.

Falls, so wähle
a) $\frac{s_1^2}{n_1} \approx \frac{s_2^2}{n_2}$	$f = n_1 + n_2 - 2$
b) $\frac{s_1^2}{n_1} \gg \frac{s_2^2}{n_2}$	$f = n_1 - 1$
c) $\frac{s_1^2}{n_1} \ll \frac{s_2^2}{n_2}$	$f = n_2 - 1$

Durch Vergleich der Prüfgröße t mit den Tabellenwerten $t(95\%)$ und $t(99\%)$ zum Freiheitsgrad f (Tabelle 12.2, zweiseitig) ergibt sich das

Testergebnis:

Falls ist der Unterschied der beiden Mittelwerte statistisch
$t \geq t(99\%)$	hochsignifikant
$t(99\%) > t \geq t(95\%)$	signifikant
$t(95\%) > t$	nicht signifikant



BEISPIEL 7.2:

In dem Beispiel 7.1 zum F-Test wurden folgende statistischen Kenngrößen ermittelt:

$$\bar{x}_1 = 82,3 \text{ N} \quad s_1^2 = 18 \text{ N}^2 \quad n_1 = 10$$

$$\bar{x}_2 = 90,0 \text{ N} \quad s_2^2 = 128 \text{ N}^2 \quad n_2 = 12$$

Damit ergibt sich $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = 7,7 \text{ N}$ und $s_D = \sqrt{\frac{18 \text{ N}^2}{10} + \frac{128 \text{ N}^2}{12}} = 3,5 \text{ N}$

und folglich $t = \frac{7,7 \text{ N}}{3,5 \text{ N}} = 2,2$.

$$f = \frac{3,5^4}{\frac{\left(\frac{18}{10}\right)^2}{10-1} + \frac{\left(\frac{128}{12}\right)^2}{12-1}} \approx 14$$

Zum Freiheitsgrad $f = 14$ findet man in der Tabelle 12.2 (zweiseitig) den Wert $t(95\%) = 2,145$.

Wegen $t(99\%) > t \geq t(95\%)$ ist der Unterschied der Mittelwerte mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \leq 5\%$ signifikant.

ANMERKUNG:

Da die Nullhypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ gegen die Alternative $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ getestet werden soll, handelt es sich um eine zweiseitige Fragestellung. Die Prüfgröße t ist daher der Tabelle 12.2 (zweiseitig) zu entnehmen.

In Statistiklehrbüchern und Tabellenwerken ist meist nur die Tabelle der t -Werte für die einseitige Fragestellung wiedergegeben. Falls eine solche Tabelle benutzt wird, ist zu beachten, dass die Aussagewahrscheinlichkeit $P_A = 95\%$ (einseitig) der Aussagewahrscheinlichkeit $P_A = 90\%$ (zweiseitig) entspricht.

Den Wert der Prüfgröße $t(95\%) = 2,145$ (vgl. Beispiel) findet man also in Tabelle 12.2 (zweiseitig) erwartungsgemäß in der Spalte 95 %, in üblichen Tabellen der t -Verteilung (einseitig) dagegen in der Spalte 97,5 % (jeweils zum Freiheitsgrad $f = 14$).



7.3 Differenztest

Wird eine Auswahl von Bauteilen mehrfach vermessen, so können sich aufgrund von veränderten Rahmenbedingungen (z.B. Messeinrichtung, -verfahren, -ort, -zeit, Prüfer) unterschiedliche Messreihen ergeben. Die Frage, ob die Verschiedenheit zweier Messreihen zufälliger Natur ist oder nicht, kann mit Hilfe des Differenztests (vgl. [17], Paarweiser Vergleich mit dem t-Test [10]) beantwortet werden.

Voraussetzung bei diesem Test ist, dass beide Messreihen gleich groß sind ($n_1 = n_2 = n$) und dass eine paarweise Zuordnung der Messwerte beider Reihen möglich ist.

Eine tabellarische Anordnung der Messergebnisse erleichtert die Durchführung des Tests. Es ist darauf zu achten, dass die Differenzen $d_i = x_i - y_i$ unter Berücksichtigung des Vorzeichens angegeben werden.

Objekt Nr.	Messreihe 1	Messreihe 2	Differenz d_i	d_i^2
1	x_1	y_1	$d_1 = x_1 - y_1$	d_1^2
2	x_2	y_2	$d_2 = x_2 - y_2$	d_2^2
3	x_3	y_3	$d_3 = x_3 - y_3$	d_3^2
...
...
n	x_n	y_n	$d_n = x_n - y_n$	d_n^2

Tabelle 7.1: Bezeichnungen beim Differenztest

Vorgehensweise beim Differenztest:

1. Tabelle (wie vorstehend) erstellen. Berechnung der Differenzen d_i .
2. Berechnung des Mittelwerts \bar{d} und der Standardabweichung s_d der Differenzen d_i (Taschenrechner).
3. Berechnung der Prüfgröße $t = \sqrt{n} \cdot \frac{|\bar{d}|}{s_d}$.
4. Vergleich der Prüfgröße t mit den Tabellenwerten $t(95\%)$ und $t(99\%)$ zum Freiheitsgrad $f = n - 1$ (Tabelle 12.2, zweiseitig).

Testergebnis:

Falls ist der Unterschied der beiden Messreihen statistisch
$t \geq t(99\%)$	hochsignifikant
$t(99\%) > t \geq t(95\%)$	signifikant
$t(95\%) > t$	nicht signifikant



8 Verknüpfungen von Zufallsvariablen

Im Rahmen der Statistischen Prozessregelung (SPC) werden einem Fertigungsprozess in regelmäßigen Abständen Stichproben von Teilen entnommen. An jedem Teil der Stichprobe wird das interessierende Merkmal (z.B. Durchmesser) gemessen und das Ergebnis in eine Qualitätsregelkarte eingetragen. Anhand einer vollständig ausgefüllten Regelkarte lässt sich ein Schätzwert $\hat{\sigma}$ für die Standardabweichung σ der Gesamtheit aller im Beobachtungszeitraum gefertigten Teile bestimmen. Da u.a. σ ein Maß für die Güte des betrachteten Prozesses ist, wird häufig die Frage diskutiert, in welcher Weise sich die Messunsicherheit des verwendeten Messgeräts auf die Prozessstandardabweichung auswirkt.

Sehen wir einmal von einem systematischen Messfehler ab, so setzt sich ein gemessener Merkmalswert z aus dem „wahren“ Wert x des Merkmals und einem zufälligen Messfehler y zusammen: $z = x + y$.

Nehmen wir an, es werde ein beherrschter Prozess mit stabiler Mittelwertslage und stabiler Streuung betrachtet. Die Standardabweichung σ_F sei ein Maß für die Fertigungsstreuung, σ_M ein Maß für die Messstreuung.

Die Standardabweichung der gemessenen Merkmalswerte ist dann gegeben durch

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_M^2}.$$

Es ist offensichtlich, dass der zufällige Messfehler in jedem Fall zu einer Vergrößerung der Standardabweichung der gemessenen Merkmalswerte führt, die Prozessgüte also verschlechtert. Rein formal entspricht die Überlagerung von Fertigungsstreuung und Messstreuung der Addition zweier unabhängiger Zufallsgrößen: $Z = X + Y$.

Ganz allgemein gilt für diesen Fall, dass sich der Mittelwert von Z durch Addition der Mittelwerte von X und Y ergibt: $\mu_z = \mu_x + \mu_y$.

Die Varianz von Z erhält man durch Addition der Varianzen von X und Y : $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

In folgender Tabelle sind die Rechenregeln für μ und σ für einige einfache Verknüpfungen (Funktionen) zweier unabhängiger (Korrelationskoeffizient $\rho_{xy} = 0$) Zufallsgrößen X (Mittelwert μ_x , Standardabweichung σ_x) und Y (Mittelwert μ_y , Standardabweichung σ_y) aufgeführt (vgl. [10]).

Funktion	Mittelwert	Varianz
$Z = X + Y$	$\mu_z = \mu_x + \mu_y$	$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$Z = X - Y$	$\mu_z = \mu_x - \mu_y$	$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$Z = X \cdot Y$	$\mu_z = \mu_x \cdot \mu_y$	$\sigma_z^2 \approx \mu_x^2 \cdot \sigma_y^2 + \mu_y^2 \cdot \sigma_x^2$
$Z = \frac{X}{Y}$	$\mu_z \approx \frac{\mu_x}{\mu_y} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_y^2}{\mu_y^2}\right)$	$\sigma_z^2 \approx \frac{\mu_x^2}{\mu_y^2} \cdot \left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + \frac{\sigma_y^2}{\mu_y^2}\right)$

Tabelle 8.1: Rechenregeln bei Verknüpfungen von unabhängigen Zufallsgrößen



ANMERKUNGEN:

Für \bar{x} (bzw. s) gelten dieselben Rechenregeln wie für μ (bzw. σ).

Diese Rechenregeln gelten unter der Voraussetzung, dass die einzelnen Größen X und Y voneinander unabhängig sind, d.h. dass der spezielle Wert von X die Zufallsauswahl von Y nicht beeinflusst.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion zweier Zufallsgrößen die Varianz der resultierenden Größe durch Addition der beiden Einzelvarianzen berechnet wird (vgl. Tabelle 8.1).

BEISPIEL 8.1: Addition zweier Längenmaße

$$\bar{x}_a = 30 \text{ mm}, \quad s_a = 0,02 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_b = 50 \text{ mm}, \quad s_b = 0,02 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_c = \bar{x}_a + \bar{x}_b = 80 \text{ mm}$$

$$s_c^2 = s_a^2 + s_b^2$$

$$s_c = \sqrt{(0,02 \text{ mm})^2 + (0,02 \text{ mm})^2} = 0,028 \text{ mm}$$



9 Zerlegung von Mischverteilungen

Bei mancher empirisch gewonnenen Verteilung besteht der Verdacht, dass ein Gemisch von zwei oder mehreren Verteilungen vorliegt (insbesondere dann, wenn die Häufigkeitsverteilung zwei- oder mehrgipflig ist). Es soll hier nur der Fall der Mischverteilung zweier Normalverteilungen behandelt werden.

Dieser tritt in der Technik z.B. dann auf, wenn die Teilkollektive von zwei verschiedenen Produktionsverfahren oder Produktionsmitteln miteinander vermischt worden sind.

Soll Aufschluss über die Mittelwerte und Standardabweichungen der beteiligten Teilkollektive gewonnen werden, so muss eine Zerlegung der Mischverteilungen in zwei normalverteilte Teilkollektive mit den entsprechenden Kenngrößen \bar{x} und s durchgeführt werden.

Die Vorgehensweise soll an einem Beispiel erläutert werden. Bild 9.1 zeigt die Kontrollkarte mit Wahrscheinlichkeitsnetz für dieses Beispiel.

Die Zerlegung von Mischverteilungen ist nur sinnvoll, wenn eine größere Anzahl von Werten zur Verfügung steht (mindestens $n=100$ bis $n=250$).

Im Wahrscheinlichkeitsnetz erscheint die Darstellung der Summenhäufigkeit als stückweise nach unten und stückweise nach oben gekrümmte Kurve, die auf eine Mischverteilung hinweist.

Die Spalten 3-5 der Tabelle 9.1 enthalten die aus der Kontrollkarte entnommenen Werte n_j , G_j und H_j . Die Klassengrenzen sind in Spalte 2 aufgeführt.

Aus den relativen Summenhäufigkeiten H_j lassen sich die relativen Häufigkeiten h_j berechnen (Spalte 6). Die h_j werden schließlich über den zugehörigen Klassen in ein Wahrscheinlichkeitsnetz eingezeichnet. Auf diese Weise erhält man die Häufigkeitsverteilung des Mischkollektivs.

Es soll nun zunächst das linke Teilkollektiv I ermittelt werden. Dazu übertragen wir in Tabelle 9.1 die relativen Häufigkeiten h_j (Spalte 6, beginnend mit h_1 bis zum ersten Maximum der h_j) in die Spalte 7. In unserem Beispiel erreicht h_j sein erstes Maximum in der 9. Klasse ($j=9$).

Entsprechend dem Anstieg bis zu diesem ersten Maximalwert werden dann in die folgenden Klassen dieselben Werte in abfallender Reihenfolge übernommen, also in Klasse 10 die Häufigkeit der Klasse 8 usw.

Die so gewonnenen relativen Häufigkeitswerte $h'_j(I)$ gehören zum Teilkollektiv I und können zur Veranschaulichung in Bild 9.2 eingetragen werden.

Die relativen Häufigkeitswerte $h'_j(II)$ des Teilkollektivs II ergeben sich als Differenzen aus den relativen Häufigkeiten h_j der Gesamtverteilung (Spalte 6) und den relativen Häufigkeiten $h'_j(I)$ (Spalte 7). Sie werden in Spalte 8 der Tabelle 9.1 eingetragen.

Auch diese Werte zeichnen wir anschließend in Bild 9.2 ein. Damit ist die vorgegebene Mischverteilung in zwei symmetrisch aufgebaute Teilkollektive I und II aufgeteilt.



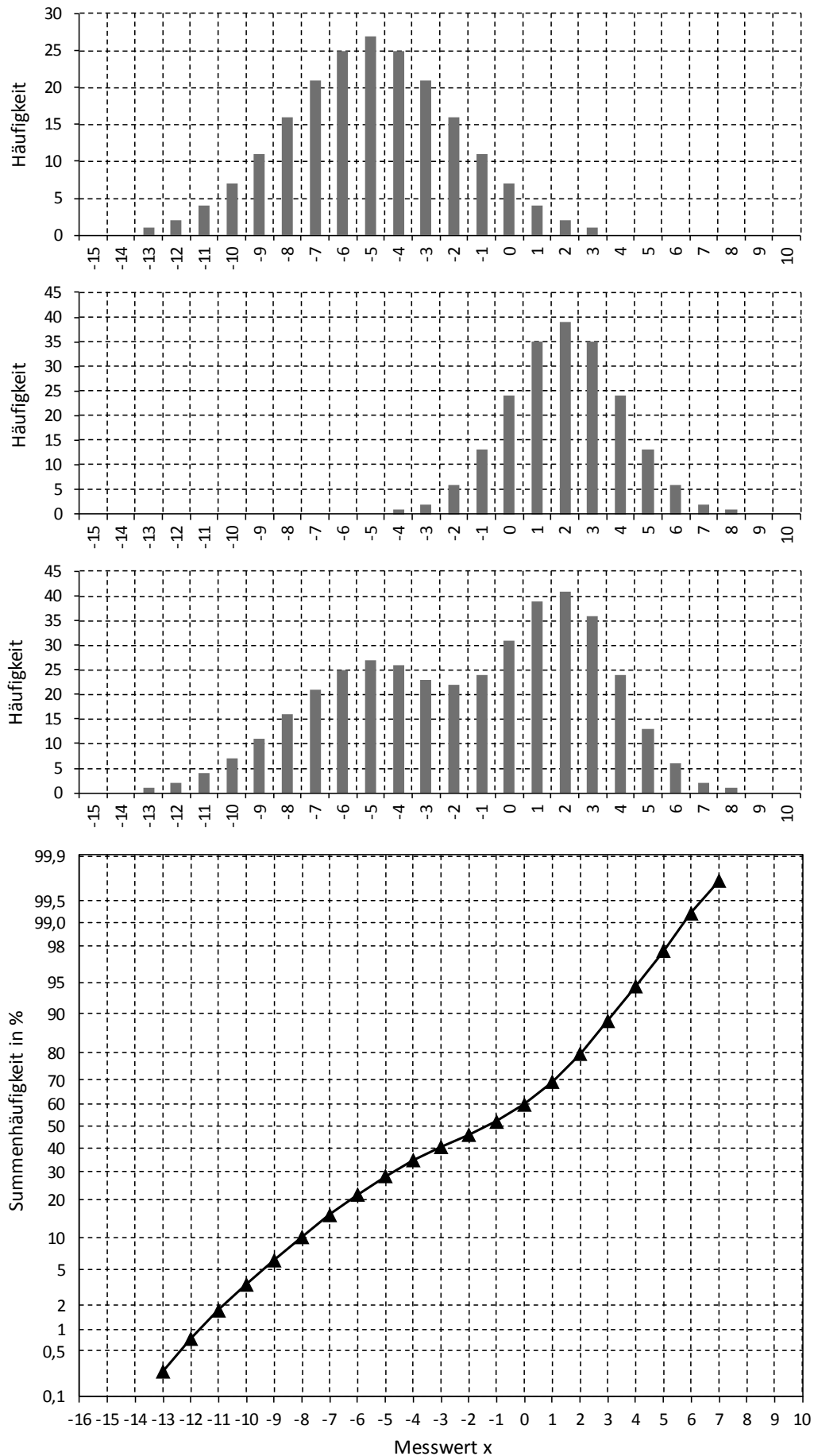


Bild 9.1: Darstellungen der Mischverteilung aus dem Beispiel dieses Abschnitts



1	2a	2b	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Klasse Nr.	untere Kl.-Grenze	obere Kl.-Grenze	absolute Häufigkeit n_j	Summenhäufigkeit G_j	relative Summenh. H_j	relative Häufigkeit h_j	unnorm. rel. H. $h'_j(I)$	unnorm. rel. H. $h'_j(II)$	norm. rel. Häufigkeit $h_j(I)$	norm. rel. Häufigkeit $h_j(II)$	relative Summenh. $H_j(I)$	relative Summenh. $H_j(II)$
1	-13,5	-12,5	1	1	0,25	0,25	0,25		0,5		0,5	
2	-12,5	-11,5	2	3	0,75	0,50	0,50		1,0		1,5	
3	-11,5	-10,5	4	7	1,74	0,99	0,99		1,98		3,48	
4	-10,5	-9,5	7	14	3,5	1,76	1,76		3,52		7,0	
5	-9,5	-8,5	11	25	6,2	2,7	2,7		5,4		12,4	
6	-8,5	-7,5	16	41	10,2	4,0	4,0		8,0		20,4	
7	-7,5	-6,5	21	62	15,4	5,2	5,2		10,4		30,8	
8	-6,5	-5,5	25	87	21,6	6,2	6,2		12,4		43,2	
9	-5,5	-4,5	27	114	28,4	6,8	6,8		13,6		56,8	
10	-4,5	-3,5	26	140	34,8	6,4	6,2	0,2	12,4	0,4	69,2	0,4
11	-3,5	-2,5	23	163	40,6	5,8	5,2	0,6	10,4	1,2	79,6	1,6
12	-2,5	-1,5	22	185	46,0	5,4	4,0	1,4	8,0	2,8	87,6	4,4
13	-1,5	-0,5	24	209	52,0	6,0	2,7	3,3	5,4	6,6	93,0	11,0
14	-0,5	0,5	31	240	59,7	7,7	1,76	5,94	3,52	11,88	96,52	22,88
15	0,5	1,5	39	279	69,4	9,7	0,99	8,71	1,98	17,42	98,5	40,3
16	1,5	2,5	41	320	79,6	10,2	0,50	9,7	1,0	19,4	99,5	59,7
17	2,5	3,5	36	356	88,6	9,0	0,25	8,75	0,5	17,5	100	77,2
18	3,5	4,5	24	380	94,5	5,9		5,9		11,8		89,0
19	4,5	5,5	13	393	97,8	3,3		3,3		6,6		95,6
20	5,5	6,5	6	399	99,3	1,5		1,5		3,0		98,6
21	6,5	7,5	2	401	99,8	0,5		0,5		1,0		99,6
22	7,5	8,5	1	402	100	0,2		0,25		0,4		100
Σ	-	-	402	-	-	100	50,0	50,0	100	100	-	-

Tabelle 9.1: Wertetabelle zur Erläuterung des Zerlegungsverfahrens



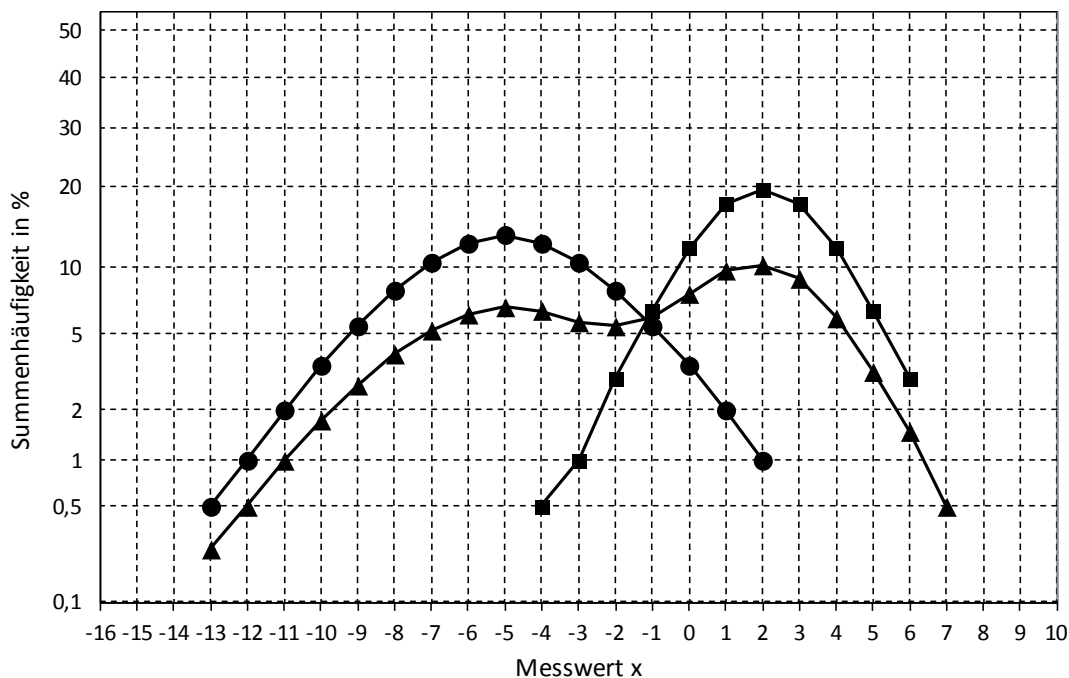


Bild 9.2: Häufigkeitsverteilung des Mischkollektivs

ANMERKUNG:

Wegen der hier beschriebenen Vorgehensweise wird die Verteilung des linken Teilkollektivs zwangsläufig symmetrisch. Wenn die Grundgesamtheit des linken Kollektivs in Wirklichkeit einer Verteilung mit positiver Schiefe unterläge, so würden fälschlicherweise Werte aus dem Übergangsbereich zwischen den Mittelwerten dem rechten Teilkollektiv zugeordnet!

Da die relativen Häufigkeiten $h'_j(I)$ und $h'_j(II)$ durch eine Zerlegung ermittelt wurden, ergeben ihre jeweiligen Summen nicht den Wert Eins. Es ist also notwendig, die Häufigkeitsverteilungen der beiden Teilkollektive noch zu normieren.

In unserem Beispiel ist $\sum_{j=1}^{17} h'_j(I) = 50$ und $\sum_{j=10}^{22} h'_j(II) = 50$.

Die Normierung auf Eins erreicht man also in diesem Fall durch Multiplikation der relativen Häufigkeiten $h'_j(I)$ und $h'_j(II)$ mit dem Faktor 2.

Allgemein lauten die Normierungsgleichungen:

$$h_j(I) = \frac{100 \cdot h'_j(I)}{\sum h'_j(I)} \quad \text{und} \quad h_j(II) = \frac{100 \cdot h'_j(II)}{\sum h'_j(II)} \quad (\text{alle Angaben in Prozent!})$$

ANMERKUNG:

Die Summationsindizes wurden hier bewusst weggelassen. Es ist zweckmäßig, die Werte in den beiden Spalten 7 und 8 neu zu nummerieren, weil sonst Verwirrung bzgl. der Indizierung entstehen könnte.



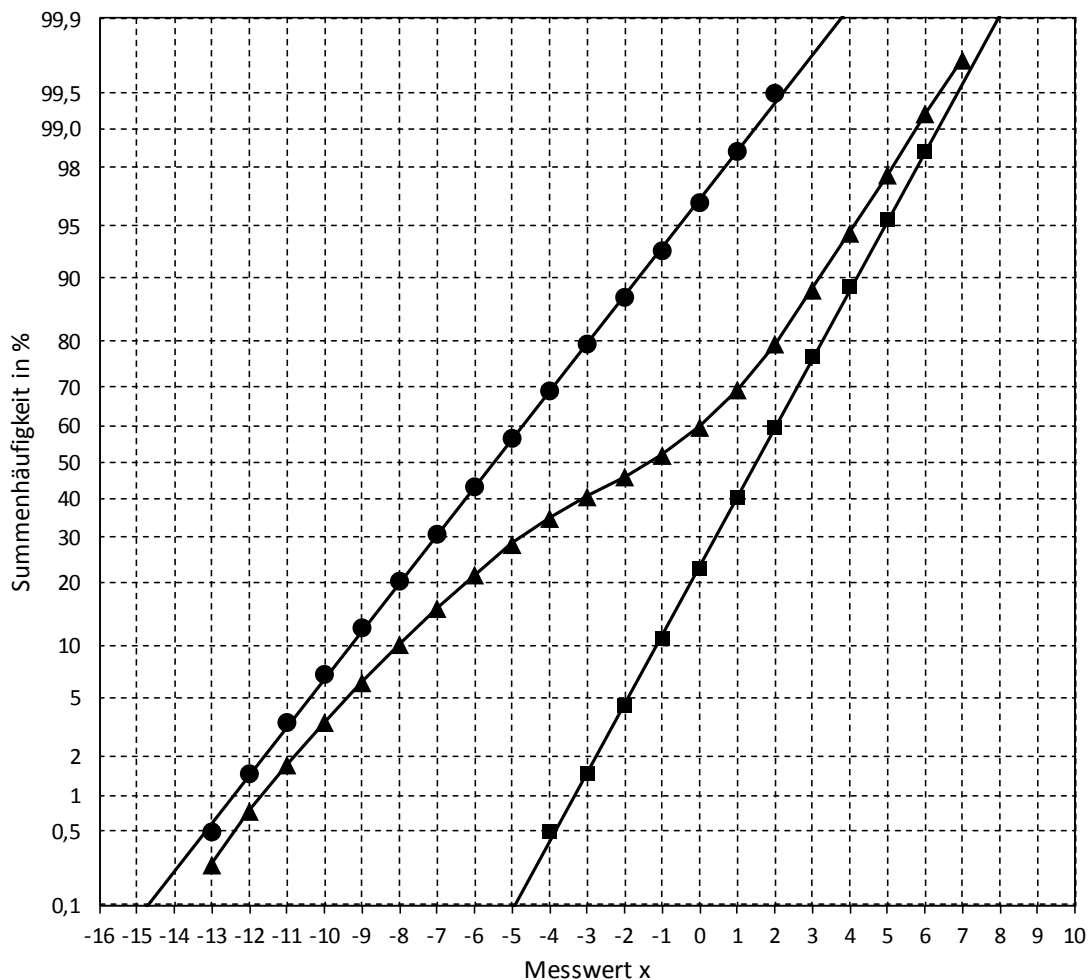


Bild 9.3: Häufigkeitssummenkurven des Mischkollektivs und der Teilkollektive im Wahrscheinlichkeitsnetz

Aus den ermittelten Werten $h_j(I)$ und $h_j(II)$ können schließlich die relativen Summenhäufigkeiten $H_j(I)$ und $H_j(II)$ berechnet werden (Spalte 11 und 12). Im Beispiel ergeben sich bei Eintragung dieser Werte in das Wahrscheinlichkeitsnetz Punktefolgen, die recht gut durch zwei getrennte Ausgleichsgeraden angenähert werden können (Bild 9.3). Das betrachtete Mischkollektiv ist also in diesem Fall aus zwei normalverteilten Teilkollektiven entstanden.

Die Kenngrößen für die beiden Teilkollektive werden in bekannter Weise aus dem Wahrscheinlichkeitsnetz abgelesen.

Teilkollektiv I: $\bar{x}_1 = -5,0$ $s_1 = 2,9$

Teilkollektiv II $\bar{x}_2 = 1,9$ $s_2 = 2,1$

Die Zerlegung von Mischverteilungen, die aus mehr als zwei normalverteilten Grundgesamtheiten zusammengesetzt sind, erfolgt in analoger Weise.



10 Fehlerfortpflanzungsgesetz

Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz beschreibt, wie sich die Messfehler mehrerer unabhängiger Messgrößen x_i auf eine Zielgröße z auswirken, die entsprechend eines funktionalen Zusammenhangs $z = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ berechnet wird:

$$s_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 \cdot s_1^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 \cdot s_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \right)^2 \cdot s_k^2.$$

z ist also eine i.a. nur indirekt messbare Größe. Die Genauigkeit, mit der z angegeben werden kann, hängt von der Genauigkeit der Messgrößen x_i ab. Im Allgemeinen wird für jedes x_i jeweils der Mittelwert \bar{x}_i und die Standardabweichung s_i einer Folge von Wiederholungsmessungen angegeben.

Anwendungsbeispiele:

1. Die Fläche $F(a, b) = a \cdot b$ eines Rechtecks wird bestimmt, indem man die Seitenlängen a und b jeweils mehrfach misst und die Mittelwerte \bar{a} und \bar{b} miteinander multipliziert. Das mittlere Messergebnis für F ist $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b}$. Die Standardabweichung von F ist $s_F = \sqrt{\bar{b}^2 \cdot s_a^2 + \bar{a}^2 \cdot s_b^2}$.
2. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz bekommt eine sehr einfache Darstellung, wenn die Funktion f , welche die Verknüpfung der unabhängigen Messgrößen x_i beschreibt, eine Summe ist. Die partiellen Ableitungen sind dann alle gleich eins und es ergibt sich:

$$s_z^2 = s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2.$$

Entsprechend gilt für die Varianzen der zugehörigen Grundgesamtheiten:

$$\sigma_z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2.$$

Die Varianz einer indirekten Messgröße, die durch Addition von unabhängigen Einzelmessgrößen bestimmt wird, ist also gleich der Summe der Varianzen der Einzelmessgrößen. Diesen Sachverhalt macht man sich im Rahmen der Statistischen Tolerierung zunutze (vgl. [4]).

3. Einen ähnlich einfachen Anwendungsfall wie Nr. 2 findet man im Zusammenhang mit der Eingriffsgrenzenberechnung im Rahmen der Statistischen Prozessregelung [5].

Für $z = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{1}{n}$.

Falls $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$, so folgt daraus $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ (vgl. Abschnitt 5.).

Dies bedeutet, die Standardabweichung des Mittelwerts von n Einzelwerten ist um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kleiner als die Standardabweichung der Einzelwerte.



11 Stichprobenplan für kontinuierliche Merkmale

Ein Stichprobenplan ist eine Zusammenstellung kurzgefasster Handlungsanweisungen, die zu einer Entscheidung über die Annahme oder Rückweisung eines Loses führen.

Bei der Anwendung des Bosch-Einfach-Stichprobenplans (vgl. [2]) zur Prüfung diskreter Merkmale (z.B. im Rahmen der Wareneingangsprüfung) werden Lieferlose angenommen, wenn in der Stichprobe kein fehlerhaftes Teil gefunden wird (Annahmezahl $c = 0$).

Diese Art der Prüfung erlaubt keinerlei Aussagen über die Merkmalsverteilung des Lieferloses und deren statistische Kenngrößen.

Die Anwendung des nachstehend beschriebenen Plans zur Prüfung kontinuierlicher Merkmale bietet sich im Falle quantitativer (messbarer) Merkmale nach dem Grundsatz „Messen was messbar ist“ als Alternative zur Prüfung diskreter Merkmale an. Voraussetzung für seine Anwendung ist also, dass das interessierende Merkmal eine messbare Größe ist.

Zur Prüfung kontinuierlicher Merkmale benötigt man für die Prüfaufgabe geeignete (fähige) anzeigende Messgeräte.

Anwendungsbeispiele:

- zerstörende oder sehr teure Prüfung
- Qualitätsprüfungen
- Wareneingangsprüfung

Die Vorteile sind:

- Möglichkeit zur Beurteilung der Merkmalsverteilung und der Lage der Einzelwerte innerhalb des Toleranzbereichs
- Bei gleicher Annahmekarakteristik kleinerer Stichprobenumfang als bei der Attributprüfung

Voraussetzung: Das betrachtete Qualitätsmerkmal ist annähernd normalverteilt.



**BOSCH**

Stichprobenplan zur Prüfung kontinuierlicher (messbarer) Merkmale

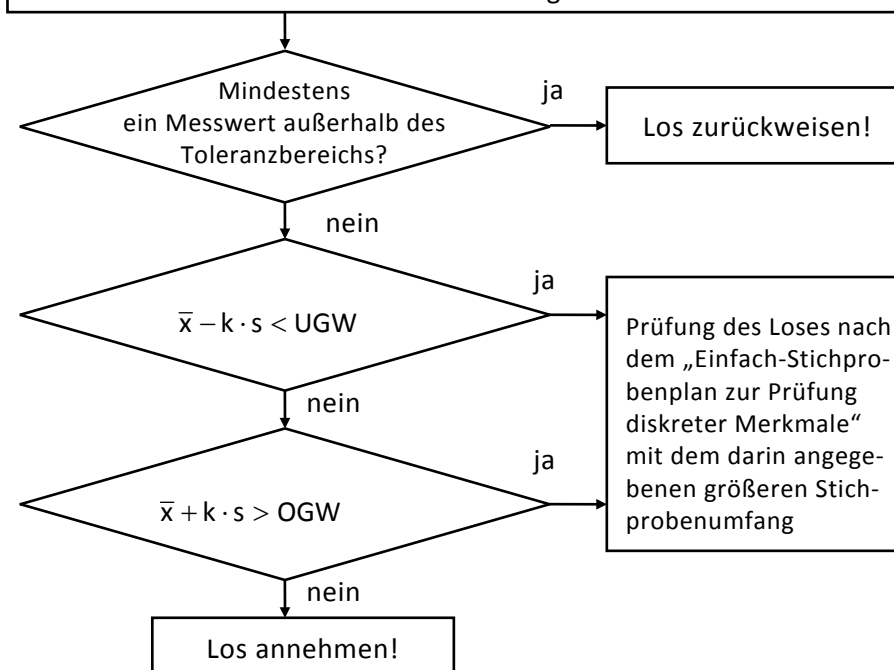
Es ist nicht zulässig, mit den hier angegebenen Stichprobenumfängen diskrete Merkmale zu prüfen.

Hinweis: Falls begründete Zweifel an der Normalverteilung der Merkmalswerte bestehen, so ist der „Einfach-Stichprobenplan für diskrete Merkmale“ oder 100%-Prüfung anzuwenden.

Auftragsstückzahl N		101.....250	251.....500	501.....1000	1001.....2000	2001..... ..≥ 5000
entspricht Test EX diskret	n	100 %	39	42	44	46
	k	-	3,0	3,0	3,1	3,1
	p' ₉₀	-	0,03	0,02	0,02	0,018
	p' ₁₀	-	0,7	0,5	0,5	0,39
entspricht Test EV diskret	n	27	27	30	33	35
	k	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9
	p' ₉₀	0,08	0,08	0,06	0,05	0,04
	p' ₁₀	1,8	1,7	1,3	1,1	0,9
entspricht Test EII diskret	n	19	21	23	25	27
	k	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6
	p' ₉₀	0,17	0,14	0,11	0,1	0,08
	p' ₁₀	3,6	3,0	2,4	2,0	1,7
entspricht Test EI diskret	n	12	13	16	17	19
	k	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
	p' ₉₀	0,42	0,34	0,26	0,21	0,17
	p' ₁₀	8,7	7,2	5,5	4,4	3,7

n	Stichprobenumfang
k	Annahmefaktor
p' ₉₀	Fehleranteil im Los (in %), bei der das Los mit 90 % Wahrscheinlichkeit angenommen wird
p' ₁₀	Fehleranteil im Los (in %), bei der das Los mit 10 % Wahrscheinlichkeit angenommen wird

1. Stichprobenumfang n und Annahmefaktor k bei der gegebenen Auftragsstückzahl N und dem gewünschten Test ablesen.
2. Stichprobe von n Einheiten aus dem zu prüfenden Los entnehmen.
3. Zu prüfendes Merkmal dieser Einheiten messen.
4. Messwerte dokumentieren.
5. Mittelwert \bar{x} und Standardabweichung s der Messwerte berech-



Beispiel zur Vorgehensweise (vgl. Flussdiagramm):

Für einen Flanschdurchmesser sind der Sollwert $C = 22,5 \text{ mm}$, der untere Grenzwert $UGW = 22,35 \text{ mm}$ und der obere Grenzwert $OGW = 22,65 \text{ mm}$ gegeben.

1. Anhand einer Stichprobenprüfung entsprechend dem Test EV soll über die Annahme eines Lieferloses von $N = 480$ Teilen entschieden werden.

Der Tabelle entnimmt man in der Zeile „Test EV“ und der Spalte zur Auftragsstückzahl (Losgröße) $N = 251 \dots 500$ die Werte $n = 27$ und $k = 2,6$.

2. Dem Lieferlos wird also eine Stichprobe von $n = 27$ Teilen entnommen.
3. Das interessierende Merkmal der Teile wird gemessen.
4. Die Vermessung ergibt folgende Werte:

Flanschdurchmesser in mm									
22,57	22,52	22,54	22,51	22,56	22,57	22,55	22,61	22,54	22,53
22,55	22,56	22,54	22,57	22,56	22,58	22,54	22,56	22,53	22,57
22,55	22,56	22,57	22,54	22,55	22,56	22,56			

Eine Auftragung der Messergebnisse im Wahrscheinlichkeitsnetz zeigt, dass die Merkmalswerte näherungsweise normalverteilt sind.

5. Die Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung ergibt:

$$\bar{x} = 22,55 \text{ mm} \quad s = 0,02 \text{ mm}$$

Kein Messwert liegt außerhalb des Toleranzbereichs.

$$\bar{x} - k \cdot s = 22,55 - 2,6 \cdot 0,02 = 22,5 \geq 22,35 = UGW$$

$$\bar{x} + k \cdot s = 22,55 + 2,6 \cdot 0,03 = 22,6 \leq 22,65 = OGW$$

Entscheidung: Das Los wird angenommen.

HINWEISE:

1. Die in der Tabelle angegebenen Werte für k und n sind so berechnet, dass sich die gleiche Operationscharakteristik ergibt wie bei der entsprechenden Prüfung eines diskreten Merkmals (gleiche Werte p'_{90} bzw. p'_{10}). Zur Auswahl eines Tests kann sich der Anwender an der Größe p'_{90} orientieren. Das ist der Fehleranteil im Los, bei der das Los mit 90 % Wahrscheinlichkeit angenommen wird. Je kleiner p'_{90} ist, um so „schärfer“ ist die Prüfung.
2. Da die Anwendung des Stichprobenplans für kontinuierliche Merkmale eine Normalverteilung des betrachteten Qualitätsmerkmals voraussetzt, kann bei Nichterfüllung dieser Voraussetzung der Fall eintreten, dass $\bar{x} - k \cdot s < UGW$ und/oder $\bar{x} + k \cdot s > OGW$ ist, obwohl die Merkmalswerte aller Teile des Loses innerhalb des Toleranzbereichs liegen. Dies ist zum Beispiel möglich, wenn das Los von einem Lieferanten einseitig oder beidseitig verlesen worden ist.

Damit in einem solchen Fall nicht ein völlig einwandfreies Los unberechtigt zurückgewiesen wird, muss sicherheitshalber der Einfach-Stichprobenplan zur Prüfung diskreter Merkmale mit dem dort angegebenen größeren Stichprobenumfang angewendet werden.

3. Der vorstehende Text bezieht sich auf nur ein Prüfmerkmal. Auch die in diesem Abschnitt angegebene Literatur behandelt stets nur eine Messgröße. Im Falle mehrerer zu prüfender Merkmale muss jedes dieser Merkmale an jedem Teil der Stichprobe gemessen werden. Man erhält also pro Merkmal eine Messreihe. Die angegebenen Schritte ab Nr. 3 sind dann für jedes Merkmal durchzuführen.



4. Nach [27] ist das beschriebene Verfahren nur zulässig, wenn sich p'_{90} auf einseitige Grenzüberschreitung bezieht. Sofern sich p'_{90} im Falle zweiseitig begrenzter Merkmale auf beidseitige Grenzüberschreitung bezieht, müsste ein in [27] angegebenes graphisches Verfahren für „verbundene doppelte Grenzwerte“ verwendet werden (vgl. Hinweis in [25] Abschnitte 1.2.2 und 2.). Dieser Unterschied ist jedoch für $p'_{90} < 1\%$ vernachlässigbar.

Da der Mittelwert und die Standardabweichung der untersuchten Grundgesamtheit nicht bekannt sind, sondern über \bar{x} bzw. s der Stichprobe geschätzt werden, basiert die mathematische Theorie zum Stichprobenplan für kontinuierliche Merkmale auf der nicht-zentralen t-Verteilung. Eine Beschreibung des mathematischen Hintergrunds findet man z.B. in [22].

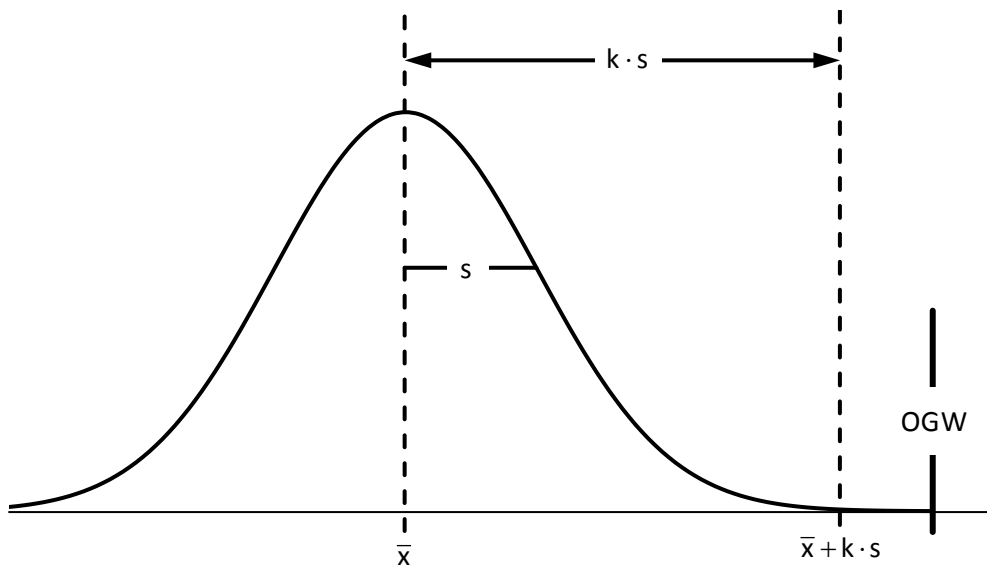


Bild 11.1: Zur Veranschaulichung des Rückweiskriteriums $\bar{x} + k \cdot s > \text{OGW}$



12 Tabellen

- 12.1 Standardnormalverteilung $\Phi(u)$ (einseitig links)
Standardnormalverteilung $\Phi(u)$ (einseitig rechts)
Standardnormalverteilung $\Phi(u)$ (zweiseitig)
- 12.2 t-Verteilung (einseitig)
t-Verteilung (zweiseitig)
- 12.3 F-Verteilung (Signifikanzniveau 90 %, einseitig)
F-Verteilung (Signifikanzniveau 95 %, einseitig)
F-Verteilung (Signifikanzniveau 99 %, einseitig)
F-Verteilung (Signifikanzniveau 95 %, zweiseitig)
F-Verteilung (Signifikanzniveau 99 %, zweiseitig)
- 12.4 Chi-Quadrat-Verteilung
- 12.5 Kritische Werte zum Ausreißertest nach Grubbs
bei Normalverteilung



12.1 Standardnormalverteilung $\Phi(u)$ (einseitig links)

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
- 0.0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
- 0.1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
- 0.2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
- 0.3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
- 0.4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
- 0.5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
- 0.6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
- 0.7	2420	2389	2358	2327	2297	2266	2236	2206	2177	2148
- 0.8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
- 0.9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
- 1.0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
- 1.1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
- 1.2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
- 1.3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
- 1.4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
- 1.5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
- 1.6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
- 1.7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
- 1.8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
- 1.9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
- 2.0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
- 2.1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
- 2.2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
- 2.3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
- 2.4	0087	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
- 2.5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
- 2.6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
- 2.7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
- 2.8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
- 2.9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
- 3.0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
- 3.1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
- 3.2	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005
- 3.3	0005	0005	0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003
- 3.4	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002

u entspricht der Testgröße z



Standardnormalverteilung $\Phi(u)$ (einseitig rechts)

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0.0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5733
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1.5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3.1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3.2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3.3	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3.4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

u entspricht der Testgröße z



Standardnormalverteilung $\Phi(u)$ (zweiseitig)

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0.0	0000	0080	0160	0239	0319	0399	0478	0558	0638	0717
0.1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1429	1507
0.2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0.3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2961	3035
0.4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0.5	3829	3900	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0.6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4908	4971	5035	5098
0.7	5161	5223	5285	5346	5407	5468	5528	5587	5646	5705
0.8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0.9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778
1.0	6827	6875	6923	6969	7017	7063	7109	7154	7199	7243
1.1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1.2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7995	8030
1.3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1.4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1.5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1.6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1.7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9266
1.8	9281	9297	9312	9328	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1.9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9512	9523	9534
2.0	9545	9556	9566	9576	9586	9596	9606	9616	9625	9634
2.1	9643	9651	9660	9668	9677	9684	9692	9700	9707	9715
2.2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2.3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2.4	9836	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2.5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2.6	9907	9910	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9929
2.7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947
2.8	9949	9951	9952	9954	9955	9956	9958	9959	9960	9962
2.9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
3.0	9973	9974	9975	9976	0076	9977	9978	9979	9979	9980
3.1	9981	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9984	9985	9986
3.2	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3.3	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993

u entspricht der Testgröße z



12.2 t-Verteilung (einseitig)

Freiheitsgrad f	Signifikanzniveau			
	90 %	95 %	99 %	99,9 %
1	3,078	6,314	31,82	318,30
2	1,886	2,920	6,965	22,33
3	1,638	2,353	4,541	10,21
4	1,533	2,132	3,747	7,173
5	1,476	2,015	3,365	5,893
6	1,440	1,943	3,143	5,208
7	1,415	1,895	2,998	4,785
8	1,397	1,860	2,896	4,501
9	1,383	1,833	2,821	4,297
10	1,372	1,812	2,764	4,144
11	1,363	1,796	2,718	4,025
12	1,356	1,782	2,681	3,930
13	1,350	1,771	2,650	3,852
14	1,345	1,761	2,624	3,787
15	1,341	1,753	2,602	3,733
16	1,337	1,746	2,583	3,686
17	1,333	1,740	2,567	3,646
18	1,330	1,734	2,552	3,610
19	1,328	1,729	2,539	3,579
20	1,325	1,725	2,528	3,552
21	1,323	1,721	2,518	3,527
22	1,321	1,717	2,508	3,505
23	1,319	1,714	2,500	3,485
24	1,318	1,711	2,492	3,467
25	1,316	1,708	2,485	3,450
26	1,315	1,706	2,479	3,435
27	1,314	1,703	2,473	3,421
28	1,313	1,701	2,467	3,408
29	1,311	1,699	2,462	3,396
30	1,310	1,697	2,457	3,385
40	1,303	1,684	2,423	3,307
50	1,299	1,676	2,403	3,261
60	1,296	1,671	2,390	3,232
80	1,292	1,664	2,374	3,195
100	1,290	1,660	2,364	3,174
200	1,286	1,652	2,345	3,131
500	1,283	1,648	2,334	3,107
∞	1,282	1,645	2,326	3,090



t-Verteilung (zweiseitig)

f	Signifikanzniveau					
	80 %	90 %	95 %	99 %	99,8 %	99,9 %
1	3,078	6,314	12,71	63,66	318,30	636,600
2	1,886	2,920	4,303	9,925	22,33	31,60
3	1,638	2,353	3,182	5,841	10,21	12,92
4	1,533	2,132	2,776	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	4,032	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,819	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,807	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,771	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,756	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,750	3,385	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,704	3,307	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,678	3,261	3,496
60	1,296	1,671	2,000	2,660	3,232	3,460
80	1,292	1,664	1,990	2,639	3,195	3,416
100	1,290	1,660	1,984	2,626	3,174	3,390
200	1,286	1,652	1,972	2,601	3,131	3,340
500	1,283	1,648	1,965	2,586	3,107	3,310
∞	1,282	1,645	1,960	2,576	3,090	3,291



12.3 F-Verteilung (Signifikanzniveau 90 %, einseitig)

f_2	f_1											
	1	2	3	4	5	6	8	10	12	20	50	∞
1	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	59,4	60,2	60,7	61,7	62,7	63,3
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,37	9,39	9,41	9,44	9,47	9,49
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,25	5,23	5,22	5,18	5,15	5,13
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,95	3,92	3,90	3,84	3,80	3,76
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,34	3,30	3,27	3,21	3,15	3,10
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	2,98	2,94	2,90	2,84	2,77	2,72
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,75	2,70	2,67	2,59	2,52	2,47
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,59	2,54	2,50	2,42	2,35	2,29
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,56	2,47	2,42	2,38	2,30	2,22	2,16
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,38	2,32	2,28	2,20	2,12	2,06
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,24	2,19	2,15	2,06	1,97	1,90
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,15	2,10	2,05	1,96	1,87	1,80
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,09	2,03	1,99	1,89	1,79	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,04	1,95	1,93	1,84	1,74	1,66
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,00	1,94	1,89	1,79	1,69	1,61
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,93	1,87	1,82	1,72	1,61	1,52
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,88	1,82	1,77	1,67	1,55	1,46
35	2,85	2,46	2,25	2,11	2,02	1,95	1,85	1,79	1,74	1,63	1,51	1,41
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,83	1,76	1,71	1,61	1,48	1,38
45	2,82	2,42	2,21	2,07	1,98	1,91	1,81	1,74	1,70	1,58	1,46	1,35
50	2,81	2,41	2,20	2,06	1,97	1,90	1,80	1,73	1,68	1,57	1,44	1,33
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,77	1,71	1,66	1,54	1,41	1,29
80	2,77	2,37	2,15	2,02	1,92	1,85	1,75	1,68	1,63	1,51	1,38	1,24
100	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,83	1,73	1,66	1,61	1,49	1,35	1,21
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,67	1,60	1,55	1,42	1,26	1,00



F-Verteilung ($P_A = 95 \%$, einseitig)

f_2	f_1											
	1	2	3	4	5	6	8	10	12	20	50	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	244	248	252	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,9	8,8	8,7	8,7	8,6	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,91	5,80	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,68	4,56	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	4,00	3,87	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,57	3,44	3,32	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,28	3,15	3,02	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,07	2,94	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,91	2,77	2,64	2,54
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,69	2,54	2,40	2,30
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,53	2,39	2,24	2,13
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,42	2,28	2,12	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,34	2,19	2,04	1,92
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,28	2,12	1,97	1,84
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,24	2,16	2,01	1,84	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,09	1,93	1,76	1,62
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,22	2,11	2,04	1,88	1,70	1,56
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	2,00	1,84	1,66	1,51
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	2,05	1,97	1,81	1,63	1,47
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,95	1,78	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,92	1,75	1,56	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,97	1,89	1,72	1,53	
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,88	1,70	1,51	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,94	1,86	1,69	1,49	
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,85	1,68	1,48	1,28
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,89	1,82	1,64	1,44	
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,88	1,80	1,62	1,41	
300	3,87	3,03	2,63	2,40	2,24	2,13	1,97	1,86	1,78	1,61	1,39	
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	1,96	1,85	1,77	1,59	1,38	
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,75	1,57	1,35	1,00



F-Verteilung ($P_A = 99 \%$, einseitig)

f_2	f_1											
	1	2	3	4	5	6	8	10	12	20	50	∞
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	29,5	28,2	27,9	27,5	27,2	27,1	26,7	26,4	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,5	14,4	14,0	13,7	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	10,1	9,89	9,55	9,24	9,02
6	13,8	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,87	7,72	7,40	7,09	6,88
7	12,3	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,62	6,47	6,16	5,86	5,65
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,81	5,67	5,36	5,07	4,86
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,26	5,11	4,81	4,52	4,31
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,85	4,71	4,41	4,12	3,91
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,30	4,16	3,86	3,57	3,36
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,14	3,94	3,80	3,51	3,22	3,00
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,69	3,55	3,26	2,97	2,75
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,51	3,37	3,08	2,78	2,57
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,37	3,23	2,94	2,64	2,42
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	3,13	2,99	2,70	2,40	2,17
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,98	2,84	2,55	2,25	2,01
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,07	2,88	2,74	2,44	2,14	1,89
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,99	2,80	2,66	2,37	2,06	1,80
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	2,94	2,74	2,61	2,31	2,00	1,74
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	2,89	2,70	2,56	2,27	1,95	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,63	2,50	2,20	1,88	1,60
70	7,01	4,92	4,08	3,60	3,29	3,07	2,78	2,59	2,45	2,15	1,83	
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,74	2,55	2,42	2,12	1,79	1,49
90	6,93	4,85	4,01	3,54	2,23	3,01	2,72	2,52	2,39	2,09	1,76	
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,69	2,50	2,37	2,07	1,73	1,43
150	6,81	4,75	3,92	3,45	3,14	2,92	2,63	2,44	2,31	2,00	1,66	
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,60	2,41	2,27	1,97	1,63	
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,57	2,38	2,24	1,94	1,59	
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,55	2,36	2,22	1,92	1,56	
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,32	2,18	1,88	1,52	1,00



F-Verteilung ($P_A = 95 \%$, zweiseitig)

f_2	f_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78
11	6,72	5,25	4,63	4,27	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45
50	5,34	3,97	3,39	3,05	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33
70	5,25	3,89	3,31	2,97	2,75	2,59	2,47	2,38	2,30
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,35	2,28
90	5,20	3,84	3,26	2,93	2,71	2,55	2,43	2,34	2,26
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24
200	5,09	3,76	3,18	2,85	2,63	2,47	2,35	2,26	2,18
500	5,05	3,72	3,14	2,81	2,59	2,43	2,31	2,22	2,14



F-Verteilung ($P_A = 95 \%$, zweiseitig), Fortsetzung

f_2	f_1							
	10	15	20	30	40	50	100	∞
1	969	985	993	1001	1006	1008	1013	1018
2	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
3	14,4	14,3	14,2	14,1	14,0	14,0	14,0	13,9
4	8,84	8,66	8,56	8,46	8,41	8,38	8,32	8,26
5	6,62	6,43	6,33	6,23	6,18	6,14	6,08	6,02
6	5,46	5,27	5,17	5,07	5,01	4,98	4,92	4,85
7	4,76	4,57	4,47	4,36	4,31	4,28	4,21	4,14
8	4,30	4,10	4,00	3,89	3,84	3,81	3,74	3,67
9	3,96	3,77	3,67	3,56	3,51	3,47	3,40	3,33
10	3,72	3,52	3,42	3,31	3,26	3,22	3,15	3,08
11	3,52	3,34	3,22	3,12	3,06	3,03	2,95	2,88
12	3,37	3,18	3,07	2,96	2,91	2,87	2,80	2,72
13	3,25	3,05	2,95	2,84	2,78	2,74	2,67	2,60
14	3,15	2,95	2,84	2,73	2,67	2,64	2,56	2,49
15	3,06	2,86	2,76	2,64	2,58	2,55	2,47	2,40
16	2,99	2,79	2,68	2,57	2,51	2,47	2,40	2,32
17	2,92	2,72	2,62	2,50	2,44	2,41	2,33	2,25
18	2,87	2,67	2,56	2,44	2,38	2,35	2,27	2,19
19	2,82	2,62	2,51	2,39	2,33	2,30	2,22	2,13
20	2,77	2,57	2,46	2,35	2,29	2,25	2,17	2,09
22	2,70	2,50	2,39	2,27	2,21	2,17	2,09	2,00
24	2,64	2,44	2,33	2,21	2,15	2,11	2,02	1,94
26	2,59	2,39	2,28	2,16	2,09	2,05	1,97	1,88
28	2,55	2,34	2,23	2,11	2,05	2,01	1,92	1,83
30	2,51	2,31	2,20	2,07	2,01	1,97	1,88	1,79
40	2,39	2,18	2,07	1,94	1,88	1,83	1,74	1,64
50	2,32	2,11	1,99	1,87	1,80	1,75	1,66	1,55
60	2,27	2,06	1,94	1,82	1,74	1,70	1,60	1,48
70	2,24	2,03	1,91	1,78	1,71	1,66	1,56	1,44
80	2,21	2,00	1,88	1,75	1,68	1,63	1,53	1,40
90	2,19	1,98	1,86	1,73	1,66	1,61	1,50	1,37
100	2,18	1,97	1,85	1,71	1,64	1,59	1,48	1,35
200	2,11	1,90	1,78	1,64	1,56	1,51	1,39	1,23
500	2,07	1,86	1,74	1,60	1,51	1,46	1,34	1,14



F-Verteilung ($P_A = 99 \%$, zweiseitig)

f_2	f_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	16200	20000	21600	22500	23100	23400	23700	23900	24100
2	198	199	199	199	199	199	199	199	199
3	55,6	49,8	47,4	46,2	45,3	44,8	44,4	44,1	43,8
4	31,3	26,3	24,3	23,2	22,5	22,0	21,6	21,4	21,1
5	22,8	18,3	16,5	15,6	14,9	14,5	14,2	14,0	13,8
6	18,6	14,5	12,9	12,0	11,5	11,1	10,8	10,6	10,4
7	16,2	12,4	10,9	10,1	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51
8	14,7	11,0	9,60	8,80	8,30	7,95	7,69	7,50	7,34
9	13,6	10,1	8,72	7,96	7,47	7,13	6,89	6,69	6,54
10	12,8	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97
11	12,2	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54
12	11,8	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20
13	11,4	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,93
14	11,1	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72
15	10,8	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54
16	10,6	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38
17	10,4	7,35	6,16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25
18	10,2	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14
19	10,1	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96
22	9,73	6,81	5,65	5,02	4,61	4,32	4,11	3,94	3,81
24	9,55	6,66	5,52	4,89	4,49	4,20	3,99	3,83	3,69
26	9,41	6,54	5,41	4,79	4,38	4,10	3,89	3,73	3,60
28	9,28	6,44	5,32	4,70	4,30	4,02	3,81	3,65	3,52
30	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22
50	8,63	5,90	4,83	4,23	3,85	3,58	3,38	3,22	3,09
60	8,49	5,80	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,13	3,01
70	8,40	5,72	4,66	4,08	3,70	3,43	3,23	3,08	2,95
80	8,33	5,67	4,61	4,03	3,65	3,39	3,19	3,03	2,91
90	8,28	5,62	4,57	3,99	3,62	3,35	3,15	3,00	2,87
100	8,24	5,59	4,54	3,96	3,59	3,33	3,13	2,97	2,85
200	8,06	5,44	4,40	3,84	3,47	3,21	3,01	2,86	2,73
500	7,95	5,36	4,33	3,76	3,40	3,14	2,94	2,79	2,66



F-Verteilung ($P_A = 99\%$, zweiseitig), Fortsetzung

f_2	f_1							
	10	15	20	30	40	50	100	∞
1	24200	24600	24800	25000	25100	25200	25300	25500
2	199	199	199	199	199	199	199	200
3	43,7	43,1	42,8	42,5	42,4	42,2	42,0	41,8
4	21,0	20,4	20,2	19,9	19,8	19,7	19,5	19,3
5	13,6	13,1	12,9	12,7	12,5	12,5	12,3	12,1
6	10,3	9,81	9,59	9,36	9,24	9,17	9,03	8,88
7	8,38	7,97	7,75	7,53	7,42	7,35	7,22	7,08
8	7,21	6,81	6,61	6,40	6,29	6,22	6,09	5,95
9	6,42	6,03	5,83	5,62	5,52	5,45	5,32	5,19
10	5,85	5,47	5,27	5,07	4,97	4,90	4,77	4,64
11	5,42	5,05	4,86	4,65	4,55	4,49	4,36	4,23
12	5,09	4,72	4,53	4,33	4,23	4,17	4,04	3,90
13	4,82	4,46	4,27	4,07	3,97	3,91	3,78	3,65
14	4,60	4,25	4,06	3,86	3,76	3,70	3,57	3,44
15	4,42	4,07	3,88	3,69	3,58	3,52	3,39	3,26
16	4,27	3,92	3,73	3,54	3,44	3,37	3,25	3,11
17	4,14	3,79	3,61	3,41	3,31	3,25	3,12	2,98
18	4,03	3,68	3,50	3,30	3,20	3,14	3,01	2,87
19	3,93	3,59	3,40	3,21	3,11	3,04	2,91	2,78
20	3,85	3,50	3,32	3,12	3,02	2,96	2,83	2,69
22	3,70	3,36	3,18	2,98	2,88	2,82	2,69	2,55
24	3,59	3,25	3,06	2,87	2,77	2,70	2,57	2,43
26	3,49	3,15	2,97	2,77	2,67	2,61	2,47	2,33
28	3,41	3,07	2,89	2,69	2,59	2,53	2,39	2,25
30	3,34	3,01	2,82	2,63	2,52	2,46	2,32	2,18
40	3,12	2,78	2,60	2,40	2,30	2,23	2,09	1,93
50	2,99	2,65	2,47	2,27	2,16	2,10	1,95	1,79
60	2,90	2,57	2,39	2,19	2,08	2,01	1,86	1,69
70	2,85	2,51	2,33	2,13	2,02	1,95	1,80	1,62
80	2,80	2,47	2,29	2,08	1,97	1,90	1,75	1,56
90	2,77	2,44	2,25	2,05	1,94	1,87	1,71	1,52
100	2,74	2,41	2,23	2,02	1,91	1,84	1,68	1,49
200	2,63	2,30	2,11	1,91	1,79	1,71	1,54	1,31
500	2,56	2,23	2,04	1,84	1,72	1,64	1,46	1,18



12.4 Chi-Quadrat-Verteilung

	Anzahl der Freiheitsgrade						
F(X)	1	2	3	4	5	6	7
0,001	0,00	0,00	0,02	0,09	0,21	0,38	0,60
0,005	0,00	0,01	0,07	0,21	0,41	0,68	0,99
0,010	0,00	0,02	0,11	0,30	0,55	0,87	1,24
0,025	0,00	0,05	0,22	0,48	0,83	1,24	1,69
0,050	0,00	0,10	0,35	0,71	1,15	1,64	2,17
0,100	0,02	0,21	0,58	1,06	1,61	2,20	2,83
0,250	0,10	0,58	1,21	1,92	2,67	3,45	4,25
0,500	0,45	1,39	2,37	3,36	4,35	5,35	6,35
0,750	1,32	2,77	4,11	5,39	6,63	7,84	9,04
0,900	2,71	4,61	6,25	7,78	9,24	10,64	12,02
0,950	3,84	5,99	7,81	9,49	11,07	12,59	14,07
0,975	5,02	7,38	9,35	11,14	12,83	14,45	16,01
0,990	6,63	9,21	11,34	13,28	15,00	16,81	18,48
0,995	7,88	10,60	12,84	14,86	16,75	18,55	20,28
0,999	10,83	13,82	16,27	18,47	20,52	22,46	24,32

	Anzahl der Freiheitsgrade						
F(X)	8	9	10	11	12	13	14
0,001	0,86	1,15	1,48	1,83	2,21	2,62	3,04
0,005	1,34	1,73	2,16	2,60	3,07	3,57	4,07
0,010	1,65	2,00	2,56	3,05	3,57	4,11	4,66
0,025	2,18	2,70	3,25	3,82	4,40	5,01	5,63
0,050	2,73	3,33	3,94	4,57	5,23	5,89	6,57
0,100	3,49	4,17	4,87	5,58	6,30	7,04	7,79
0,250	5,07	5,90	6,74	7,58	8,44	9,30	10,17
0,500	7,34	8,34	9,34	10,34	11,34	12,34	13,34
0,750	10,22	11,39	12,55	13,70	14,85	15,98	17,12
0,900	13,36	14,08	15,99	17,28	18,55	19,81	21,06
0,950	15,51	16,92	18,31	19,68	21,03	22,36	23,68
0,975	17,53	19,02	20,48	21,92	23,34	24,74	26,12
0,990	20,09	21,67	23,21	24,73	26,22	27,69	29,14
0,995	21,96	23,59	25,19	26,76	28,30	29,82	31,32
0,999	26,13	27,88	29,59	31,26	32,91	34,52	36,12



Chi-Quadrat-Verteilung (Fortsetzung)

F(X)	Anzahl der Freiheitsgrade						
	15	16	17	18	19	20	21
0,001	3,48	3,94	4,42	4,90	5,41	5,92	6,4
0,005	4,60	5,14	5,70	6,26	6,84	7,43	8,0
0,010	5,23	5,81	6,41	7,01	7,63	8,26	8,9
0,025	6,26	6,91	7,56	8,23	8,01	9,59	10,3
0,050	7,26	7,96	8,67	9,30	10,12	10,85	11,6
0,100	8,55	9,31	10,00	10,86	11,65	12,44	13,2
0,250	11,04	11,91	12,79	13,68	14,56	15,45	16,3
0,500	14,34	15,34	16,34	17,34	18,34	19,34	20,3
0,750	18,25	19,37	20,49	21,60	22,72	23,83	24,0
0,900	22,31	23,54	24,77	25,09	27,20	28,41	29,6
0,950	25,00	26,30	27,59	28,87	30,14	31,41	32,7
0,975	27,40	28,85	30,10	31,53	32,85	34,17	35,5
0,990	30,58	32,00	33,41	34,81	36,19	37,57	38,0
0,995	32,80	34,27	35,72	37,16	38,58	40,00	41,4
0,999	37,70	39,25	40,79	42,31	43,82	45,32	46,8

F(X)	Anzahl der Freiheitsgrade						
	22	23	24	25	26	27	28
0,001	7,0	7,5	8,1	8,7	9,2	9,8	10,43
0,005	8,6	9,3	9,9	10,5	11,2	11,8	12,5
0,010	9,5	10,2	10,9	11,5	12,2	12,9	13,6
0,025	11,0	11,7	12,4	13,1	13,8	14,6	15,3
0,050	12,3	13,1	13,8	14,6	15,4	16,2	16,9
0,100	14,0	14,8	15,7	16,5	17,3	18,1	18,9
0,250	17,2	18,1	19,0	19,9	20,8	21,7	22,7
0,500	21,3	22,3	23,3	24,3	25,3	26,3	27,3
0,750	26,0	27,1	28,2	29,3	30,4	31,5	32,6
0,900	30,8	32,0	33,2	34,4	35,0	36,7	37,9
0,950	33,9	35,2	36,4	37,7	38,0	40,1	41,3
0,975	36,8	38,1	39,4	40,6	41,9	43,2	44,5
0,990	40,3	41,6	43,0	44,3	45,6	47,0	48,3
0,995	42,8	44,2	45,6	46,9	48,3	49,6	51,0
0,999	48,3	49,7	51,2	52,6	54,1	55,5	56,9



Chi-Quadrat-Verteilung (Fortsetzung)

F(X)	Anzahl der Freiheitsgrade						
	29	30	40	50	60	70	80
0,001	11,0	11,6	17,9	24,7	31,7	39,0	46,5
0,005	13,1	13,8	20,7	28,0	35,5	43,3	51,2
0,010	14,3	15,00	22,2	29,7	37,5	45,4	53,5
0,025	16,0	16,8	24,4	32,4	40,5	48,8	57,2
0,050	17,7	18,5	26,5	34,8	43,2	51,7	60,4
0,100	19,8	20,6	29,1	37,7	46,5	55,3	64,3
0,250	23,6	24,5	33,7	42,9	52,3	61,7	71,1
0,500	28,3	29,3	39,3	49,3	59,3	69,3	79,3
0,750	33,7	34,8	45,6	56,3	67,0	77,6	88,1
0,900	39,1	40,3	51,8	63,2	74,4	85,5	96,6
0,950	42,6	43,8	55,8	67,5	79,1	90,5	101,9
0,975	45,7	47,0	59,3	71,4	83,3	95,0	106,6
0,990	49,6	50,9	63,7	76,2	88,4	100,4	112,3
0,995	52,3	53,7	66,8	79,5	92,0	104,2	116,3
0,999	58,3	59,7	73,4	86,7	99,6	112,3	124,8



12.5 Kritische Werte zum Ausreißertest nach Grubbs bei Normalverteilung

n	P _A =95%	P _A =99%	n	P _A =95%	P _A =99%	n	P _A =95%	P _A =99%
3	1,153	1,155	41	2,877	3,251	81	3,134	3,525
4	1,463	1,492	42	2,887	3,261	82	3,139	3,529
5	1,672	1,749	43	2,896	3,271	83	3,143	3,534
			44	2,905	3,282	84	3,147	3,539
6	1,822	1,944	45	2,914	3,292	85	3,151	3,543
7	1,938	2,097	46	2,923	3,302	86	3,155	3,547
8	2,032	2,221	47	2,931	3,310	87	3,160	3,551
9	2,110	2,323	48	2,940	3,319	88	3,163	3,555
10	2,176	2,410	49	2,948	3,329	89	3,167	3,559
			50	2,956	3,336	90	3,171	3,563
11	2,234	2,485	51	2,964	3,345	91	3,174	3,567
12	2,285	2,550	52	2,971	3,353	92	3,179	3,570
13	2,331	2,607	53	2,978	3,361	93	3,182	3,575
14	2,371	2,659	54	2,986	3,368	94	3,186	3,579
15	2,409	2,705	55	2,992	3,376	95	3,189	3,582
			56	3,000	3,383	96	3,193	3,586
16	2,443	2,747	57	3,006	3,391	97	3,196	3,589
17	2,475	2,785	58	3,013	3,397	98	3,201	3,593
18	2,504	2,821	59	3,019	3,405	99	3,204	3,597
19	2,532	2,854	60	3,025	3,411	100	3,207	3,600
20	2,557	2,884						
			61	3,032	3,418	101	3,210	3,603
21	2,580	2,912	62	3,037	3,424	102	3,214	3,607
22	2,603	2,939	63	3,044	3,430	103	3,217	3,610
23	2,624	2,963	64	3,049	3,437	104	3,220	3,614
24	2,644	2,987	65	3,055	3,442	105	3,224	3,617
25	2,663	3,009						
			66	3,061	3,449	106	3,227	3,620
26	2,681	3,029	67	3,066	3,454	107	3,230	3,623
27	2,698	3,049	68	3,071	3,460	108	3,233	3,626
28	2,714	3,068	69	3,076	3,466	109	3,236	3,629
29	2,730	3,085	70	3,082	3,471	110	3,239	3,632
30	2,745	3,103						
			71	3,087	3,476	111	3,242	3,636
31	2,759	3,119	72	3,092	3,482	112	3,245	3,639
32	2,773	3,135	73	3,098	3,487	113	3,248	3,642
33	2,786	3,150	74	3,102	3,492	114	3,251	3,645
34	2,799	3,164	75	3,107	3,496	115	3,254	3,647
35	2,811	3,178						
			76	3,111	3,502	116	3,257	3,650
36	2,823	3,191	77	3,117	3,507	117	3,259	3,653
37	2,835	3,204	78	3,121	3,511	118	3,262	3,656
38	2,846	3,216	79	3,125	3,516	119	3,265	3,659
39	2,857	3,228	80	3,130	3,521	120	3,267	3,662
40	2,866	3,240						



Literaturverzeichnis

- Bosch-Schriftenreihe „Qualitätssicherung in der Bosch-Gruppe“ (C/QMM)
- [1] Heft 1: Grundlagen der Technischen Statistik, Kontinuierliche Merkmale
 - [2] Heft 2, Grundlagen der Technischen Statistik, Diskrete Merkmale
 - [3] Heft 4: Statistische Verfahren, Formeln und Tabellen
 - [4] Heft 5: Statistische Tolerierung
 - [5] Heft 7: Statistische Prozessregelung, SPC
 - [6] Heft 10: Fähigkeit von Mess- und Prüfprozessen
 - [7] Heft 11: Versuchsmethodik
 - [8] Broschüre: Elementare Werkzeuge der Qualitätstechnik
 - [9] M. Sadowy: Industrielle Statistik, Vogel-Verlag, Würzburg, 1970
 - [10] Graf, Henning, Stange, Wilrich: Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik, Springer-Verlag, Berlin, 1987
 - [11] Lothar Sachs: Angewandte Statistik, Springer-Verlag, Berlin, 1992
 - [12] Hartung: Statistik, Oldenbourg, München, 1989
 - [13] Erwin Kreyszig: Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen, 1988
 - [14] H. Weber: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure, Teubner, Stuttgart, 1988
 - [15] Karl Bosch: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Vieweg, Braunschweig, 1989
 - [16] Karl Bosch: Elementare Einführung in die angewandte Statistik, Vieweg, Braunschweig, 1989
 - [17] G. Wagner und R. Lang: Statistische Auswertung von Meß- und Prüfergebnissen, Hrsg.: Deutsche Gesellschaft für Qualität e. V., DGQ 14, 1976
 - [18] Kühlmeyer: Die nichtzentrale t-Verteilung, Springer, Berlin, 1970



- [19] L. J. Porter and J. S. Oakland, Process Capability Indices — An Overview Of Theory And Practice, Quality And Reliability Engineering International, Vol. 7, 437-448 (1991)
- [20] S. Kotz and N. L. Johnson: Process Capability Indices, Chapman & Hall, London, 1993
- [21] Keki R. Bhote: Qualität — Der Weg zur Weltspitze, Hrsg.: IQM — Institut für Qualitätsmanagement, Großbottwar, 1990
- [22] W. Uhlmann: Statistische Qualitätskontrolle, Teubner, Stuttgart, 1982
- [23] F. Barth, H. Berghold, R. Haller: Stochastik (Grundkurs, Leistungskurs), Ehrenwirth, München, 1992
- [24] Tuckey: Exploratory Data Analysis, Addison Wesley, 1977
- [25] DGQ-Schrift Nr. 16-43 (2. Aufl. 1988): Stichprobenpläne für quantitative Merkmale
- [26] DGQ-SAQ-ÖVQ-Schrift Nr. 16-01 (8. Aufl. 1981): Stichprobenprüfung anhand qualitativer Merkmale, Verfahren und Tabellen nach DIN 40080
- [27] DIN ISO 3951 (8/1992): Verfahren und Tabellen für Stichprobenprüfung auf den Anteil fehlerhafter Einheiten in Prozent anhand quantitativer Merkmale
- [28] DGQ-Schrift Nr. 16-01 (10. Aufl. 1995): Annahmestichprobenprüfung anhand der Anzahl fehlerhafter Einheiten oder Fehler (Attributprüfung), Verfahren und Tabellen nach DIN ISO 2859-1



Formelzeichen und Begriffe

$\int_{-\infty}^{+\infty}$	= Integral von minus unendlich bis plus unendlich
$\sqrt{\quad}$	= Wurzelzeichen
Σ	= Summenzeichen
Π	= Produktzeichen
\leq	= kleiner als oder gleich
\geq	= größer als oder gleich
\neq	= ungleich
$ x $	= Betrag von x (positiver Wert von x)
B_{un}, B_{ob}	= Faktoren zur Berechnung der Streugrenzen von s
D	= Differenz der Mittelwerte zweier Messreihen
d	= Differenz zweier Messwerte
e	= Exzess einer Stichprobe
e	= Basis des natürlichen Logarithmus
f	= Freiheitsgrad
F	= Quotient der Varianzen zweier Messreihen (Prüfgröße beim F-Test)
f(x)	= Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
g	= Schiefe einer Stichprobe
g_w	= Wölbung (Steilheit) einer Stichprobe
G_j	= aufsummierte Besetzungszahl
h_j	= Häufigkeit
$h_j(I), h_j(II)$	= Häufigkeit von Teilkollektiven
$h_j(I), h_j(II)$	= nicht normierte Häufigkeit von Teilkollektiven
H_j	= Häufigkeitssumme
H_{un}, H_{ob}	= Vertrauensgrenzen der Normalverteilung im Wahrscheinlichkeitsnetz
H_0	= Nullhypothese
H_1	= Alternativhypothese
i, j	= Zählindizes
k	= Klassenzahl bzw. Annahmefaktor
k_A	= Ausreißerfaktor
ln	= natürlicher Logarithmus



m	= Ersatzstichprobengröße
m_k	= k-tes Moment einer Stichprobe
n	= Stichprobenumfang
n_j	= Besetzungszahl
P	= Wahrscheinlichkeit
P_A	= Aussagewahrscheinlichkeit
$P(x_i)$	= Wahrscheinlichkeit für Merkmalswert x_i
R	= Range, Spannweite
r_{xy}	= Korrelationskoeffizient (Schätzwert)
s	= Standardabweichung der Stichprobe
s_d	= Standardabweichung der Differenzverteilung von Einzelwerten
s_D	= Standardabweichung der Differenzverteilung von Mittelwerten
s_M	= Standardabweichung der Messfehler
s_{xy}	= Kovarianz
s^2	= Varianz einer Stichprobe
t	= Faktor zur Berechnung des Vertrauensbereiches für μ bei unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit
u	= standardisierte Zufallsgröße der Normalverteilung $N(\mu = 0; \sigma^2 = 1)$
v	= Variationskoeffizient
x	= stetige Merkmalswerte
x_i, y_i	= Werte einer Messreihe
$x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$	= nach der Größe geordnete Werte einer Messreihe
\bar{x}_g	= geometrischer Mittelwert einer Stichprobe
x_{\max}	= größter Wert einer Stichprobe
x_{\min}	= kleinster Wert einer Stichprobe
\tilde{x}	= Median (Zentralwert) einer Stichprobe
\bar{x}	= arithmetischer Mittelwert einer Stichprobe
\bar{x}_D	= Mittelwert der Differenzverteilung aus Stichproben
α	= Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art
β	= Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art
τ	= Schiefe einer Grundgesamtheit
Δ	= Differenz bei der Bestimmung der Messgenauigkeit
ε	= Streuwert, Streufaktor der Lognormalverteilung
e	= Exzess einer Grundgesamtheit



μ	= Mittelwert einer Grundgesamtheit
μ_D	= Mittelwert der Differenzverteilung
μ_g	= geometrischer Mittelwert einer Grundgesamtheit
σ	= Standardabweichung einer Grundgesamtheit
σ^2	= Varianz einer Grundgesamtheit
π	= Zahl Pi (3,1416)



Index

- Alternativhypothese 58, 61, 71
- Annahmebereich 60
- Ausgleichsgerade 21
- Ausreißertest 68

- Box-Plot 15

- Chi-Quadrat-Verteilung 66

- Dichtefunktion 32, 44
- Differenztest 74
- Direkter Schluss 53

- Exzess 48, 50

- Fehler 1. u. 2. Art 61
- Fehlerfortpflanzungsgesetz 82
- Freiheitsgrad 63, 66, 69, 71
- F-Test 69

- Glättung 18

- Häufigkeit
 - absolute 7
 - relative 7
- Histogramm 7

- Indirekter Schluss 53
- Interpolation
 - durch Polynome 25
 - lineare 19
- Irrtumswahrscheinlichkeit 58

- Kenngößen
 - der Form 45, 48
 - der Lage 45, 46
 - der Streuung 45, 47
- Klasseneinteilung 8, 30
- Kleinstquadratmethode 21, 22, 24
- Korrelation 22
- Kovarianz 21, 22
- Kurvenapproximation 26

- Lognormalverteilung 38

- Median 46
- Mischverteilung 77
- Mittelwert
 - arithmetischer 54
 - geometrischer 38
 - gleitender 18
- Modellbildung 17, 27
- Multi-Vari-Charts 15

- Normalverteilung 32
- Nullhypothese 58, 61, 71

- Polynom 25
- Prozeßfähigkeitskennwert 36
- Prüfgröße 58, 69, 74
- Punktdiagramm 13

- Rang 41
- Regression
 - lineare 21
 - quadratische 24
- Run-Test 68

- Schiefe 48, 50
- Schwellenwert 58, 70, 71
- Spannweite 47
- Splinefunktionen 26
- Standardabweichung 47
- Standardnormalverteilung 33
- Stichprobenplan 83
- Stratifizierung 14
- Streufaktor 39
- Stütz-
 - stellen 25
 - werte 25
- Summenhäufigkeit 31, 41, 77

- Test 58
- Test auf Zufälligkeit 67
- t-Test 70, 72
- t-Verteilung 63

- Überschreitungsanteil 34, 39
- Urwertdiagramm 6, 11



Varianz 47

Variationskoeffizient 47, 65

Verknüpfungen von Zufallsvariablen 75

Verteilungsfunktion 31, 32

Vertrauensbereich 35, 36, 56, 64, 66

Verwerfungsbereich 60

Wahrscheinlichkeit 31

Definition 29

Wahrscheinlichkeits-

dichtefunktion 32

Wahrscheinlichkeitsnetz 41, 77

Wertestrahl 13

Wölbung 48, 50

Zentraler Grenzwertsatz 55

z-Test 59

Zufälligkeit 67

Zufallsvariable 28, 29, 38



- leere Seite -

2020-04-06 - SOCOS



Robert Bosch GmbH
C/QMM
Postfach 30 02 20
D-70442 Stuttgart
Germany
Phone +49 711 811 - 0
www.bosch.com





2020-04-06 - SOCOS

Robert Bosch GmbH

C/QMM

Postfach 30 02 20

D-70442 Stuttgart

Germany

Phone +49 711 811-0

www.bosch.com

