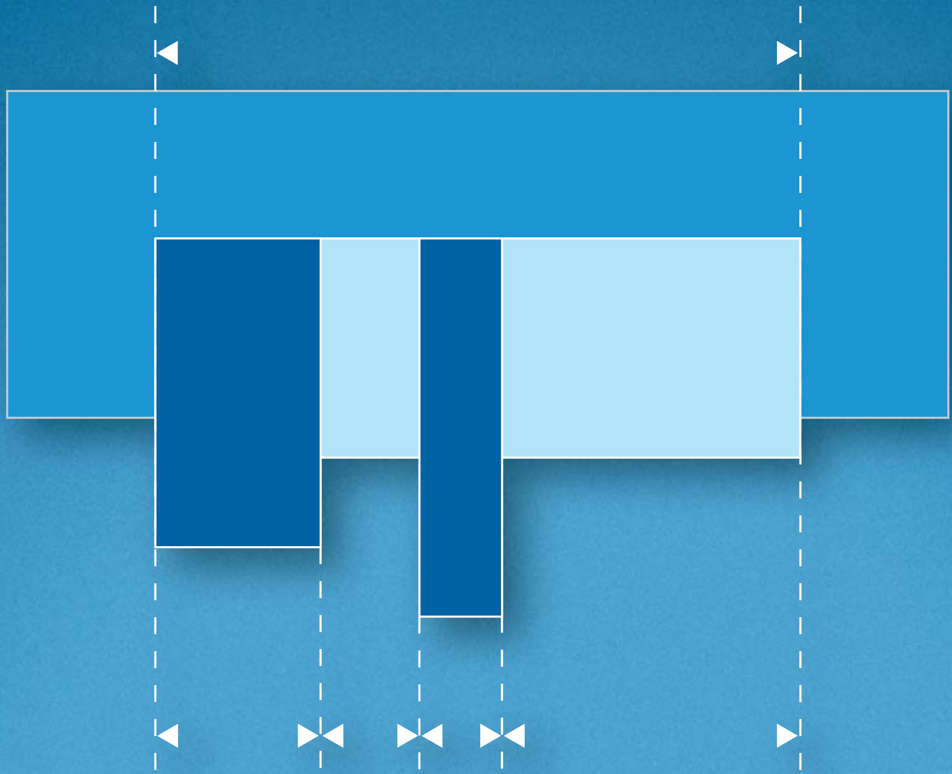
2020-04-06 - SOCOS



Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe | Technische Statistik

5. Statistische **Tolerierung**

BOSCH

Technik fürs Leben

2020-04-06 - SOCOS

Inhaltsverzeichnis:

2020-04-06 - SOCOS

1. Einleitung

Statistische Tolerierung ist eine Methode zur Festlegung von Toleranzen unter Berücksichtigung statistischer Gesichtspunkte. Ihr Ziel ist die Bestimmung einer Toleranz für das Gesamtmerkmal einer Zusammenfassung mehrerer zusammenwirkender Einzelmerkmale.

Der Statistischen Tolerierung liegt die Vorstellung zugrunde, dass sich zufällige positive und negative Abweichungen der Istwerte der Einzelmerkmale von den jeweiligen Nennwerten bei einer "Aneinanderreihung" von Bauteilen innerhalb einer Baugruppe in der Regel ausgleichen.

Ist die Toleranz des Gesamtmerkmals vorgegeben, so ergeben sich unter Berücksichtigung dieser Überlegungen für die Einzelmerkmale größere Toleranzen als bei rein arithmetischer Rechnung. Die daraus theoretisch resultierenden Vorteile hinsichtlich Fertigungstechnik und Produktionskosten werden in vielen Arbeiten und Veröffentlichungen zu diesem Thema ausführlich erläutert. Die Grundlagen dieser Methode sind schon seit langem bekannt. Ihre Entwicklung ist bis in die zwanziger Jahre des letzten Jahrhunderts rückverfolgbar.

Im Rahmen dieser Unterlage soll ein kurzer Abriss des theoretischen Hintergrunds der Statistischen Tolerierung gegeben, die Möglichkeiten der Anwendung dargestellt und die notwendigen Randbedingungen beschrieben werden.

2020-04-06 - SOCOS

2. Grundlagen

2.1. Die Maßkette

Das Zusammenfügen von einzelnen Bauteilen innerhalb eines technischen Systems (einer Baugruppe) führt häufig dazu, dass die unabhängigen Einzelmaße der Bauteile rein geometrisch gesehen eine zusammenhängende Folge von Längenmaßen darstellen, die in ihrer Gesamtheit das sogenannte Schließmaß bildet. Man spricht suggestiv von einer Maßkette, bestehend aus mehreren Ketten- oder Einzelmaßen.

Die Maßkette heißt linear, wenn sich alle Einzelmaße durch zueinander parallele Pfeile darstellen lassen, die einen geschlossenen Linienzug bilden. Die Richtung der Pfeile kennzeichnet die positive bzw. negative Zählrichtung der Einzelmaße.

Ein Maß heißt positiv (negativ), wenn sich das Schließmaß bei dessen Änderung unter Konstanthaltung aller übrigen Kettenmaße im gleichen Sinne (gegensinnig) ändert.

2020-04-06 - SOCOS

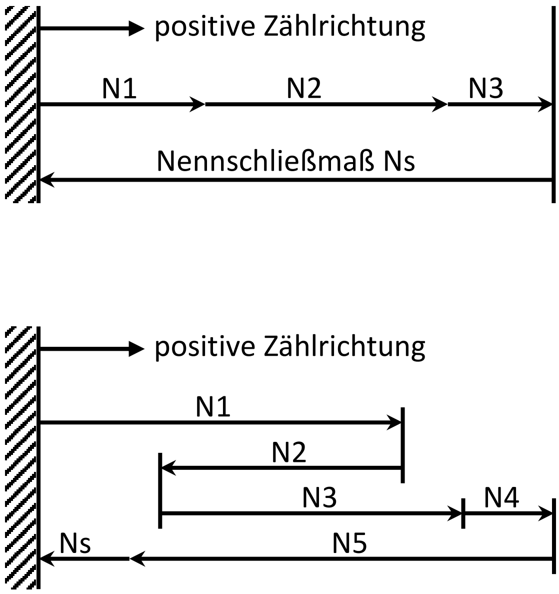


Bild 2.1: Maßketten aus Einzelnennmaßen N_i. Oben: nur positive Zählrichtung, unten: positive und negative Zählrichtung.

Darüber hinaus gibt es ebene (zweidimensionale) und räumliche (dreidimensionale) Maßketten. Ebene Maßketten ergeben sich häufig durch das Zusammenspiel von drehbaren Bauteilen oder die Bewegung von Kipphebeln oder Nocken, wobei Winkel und Radien eine Rolle spielen. Bei solchen nicht-linearen Maßketten können sich kompliziertere Zusammenhänge von Einzelmaßen ergeben, die aber meist durch analytische Funktionen geschlossen darstellbar sind.

Ein einfaches Beispiel einer (zweigliedrigen) nicht-linearen Maßkette ergibt sich bei der Betrachtung zweier Bohrungen, deren Positionen auf zwei zueinander senkrechten Achsen durch den jeweiligen Abstand zu einem Bezugspunkt (Schnittpunkt der Achsen) gegeben sind.

Der relative Abstand der beiden Bohrungen ist dann gegeben durch

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \tag{2.1}$$

© Robert Bosch GmbH | Stand 05.2013

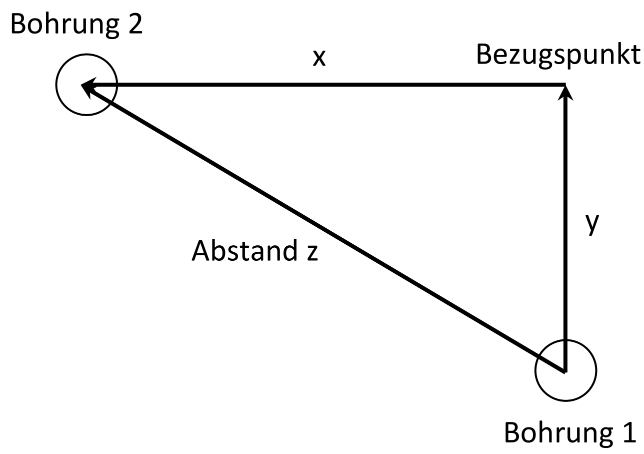


Bild 2.2: Beispiel einer zweigliedrigen nicht-linearen Maßkette.

2020-04-06 - SOCOS

Toleranzen werden gemäß DIN ISO 286 [4] durch Angabe eines Höchstmaßes G_o und eines Mindestmaßes G_u festgelegt:

$$T = G_o - G_u \,. \tag{2.2}$$

Das Mittenmaß ist

$$C = \frac{G_o + G_u}{2} \,. \tag{2.3}$$

Stimmt das Nennmaß einer Größe nicht mit dem Mittenmaß überein, so erfolgt die Toleranzangabe durch ein auf das Nennmaß bezogenes unteres und oberes Grenzabmaß (Differenz zwischen Höchst- bzw. Mindestmaß und Nennmaß).

Historisch gesehen, wurde die Tolerierung zunächst für geometrische Merkmale wie Längen und Durchmesser eingeführt. In diesem Zusammenhang spricht man auch zutreffend über „Maße“ (Nennmaß, Istmaß, Abmaß etc.). Die Tolerierung kann jedoch ohne Weiteres auch auf nicht-geometrische Merkmale wie z.B. Widerstände erweitert werden. Deswegen wird im Folgenden der allgemeine Begriff „Merkmal“ statt „Maß“ verwendet.

2.2. Das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz

Das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz beschreibt, wie sich die Messfehler mehrerer unkorrelierter Merkmale x_i auf ein Gesamtmerkmal z auswirken, das entsprechend eines funktionalen Zusammenhangs

$$z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) \tag{2.4}$$

berechnet wird [1]:

$$s_z^2 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 s_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 s_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 s_k^2 \,. \tag{2.5}$$

Z ist also eine nur indirekt messbare Größe. Beispielsweise wird die Fläche eines Rechtecks bestimmt, indem man die Seitenlängen misst und die Messergebnisse miteinander multipliziert.

Die Genauigkeit, mit der z angegeben werden kann, hängt von der Genauigkeit der Einzelmerkmale x_i ab. Im Allgemeinen wird für x_i jeweils der Mittelwert $\bar{x}_i$ und die Standardabweichung s_i einer Folge von Wiederholungsmessungen angegeben.

Im obigen Ausdruck bezeichnet $\partial f / \partial x_i$ die partiellen Ableitungen der Funktion f nach den Merkmalen x_i. Sie sind jeweils an der Stelle $\bar{x}_i$ zu berechnen.

Die Herleitung der Formel für s_z beinhaltet die Entwicklung von f in eine Taylorreihe und die Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung. Aus diesem Grund steht in der Formel statt des Gleichheitszeichens das Wellensymbol, das die näherungsweise Gleichheit bezeichnet.

Die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes wird am einfachsten anhand eines Beispiels verständlich.

BEISPIEL:

Wir betrachten zwei ohmsche Widerstände, an denen jeweils eine Folge von Wiederholungsmessungen durchgeführt wird. Als Ergebnis dieser Messreihen wird jeweils der Mittelwert und die Standardabweichung als Maß für den mittleren Fehler angegeben:

$R_1 = 47 \pm 0{,}8\Omega$, $R_2 = 68 \pm 1{,}1\Omega$.

Im Falle der Parallelschaltung ist der Gesamtwiderstand R nach

$R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ *zu berechnen:* $R = \dfrac{47 \cdot 68}{47 + 68} = 27{,}8\Omega$.

Zur Berechnung des zugehörigen mittleren Fehlers werden zunächst die partiellen Ableitungen von R nach R_1 und R_2 benötigt:

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{68^2}{(47+68)^2} = 0{,}35, \quad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{47^2}{(47+68)^2} = 0{,}167 .$$

Der mittlere Fehler des Gesamtwiderstands ergibt sich durch Einsetzen in das Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$s_R^2 = 0{,}35^2 \cdot 0{,}8^2 + 0{,}167^2 \cdot 1{,}1^2 = 0{,}11 \quad \Rightarrow s_R = 0{,}33 .$$

Das Resultat ist demnach:

$R = 27{,}8 \pm 0{,}3\Omega$.

Das Fehlerfortpflanzungsgesetz bekommt eine sehr einfache Darstellung, wenn die Funktion *f*, die die Verknüpfung der unabhängigen Merkmale x_i beschreibt, eine Summe ist. Die partiellen Ableitungen sind dann alle gleich eins, und es ergibt sich:

$$s_z^2 = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_k^2 . \qquad (2.6)$$

Entsprechend gilt für die Varianzen der zugehörigen Grundgesamtheiten:

$$\sigma_z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_k^2 . \qquad (2.7)$$

Dies bedeutet, dass die Varianz eines Gesamtmerkmals, welches durch additive Verknüpfung von unabhängigen Einzelmerkmalen bestimmt wird, gleich der Summe der Varianzen der Einzelmerkmale ist.

BEISPIEL:

Im Falle der Serienschaltung der beiden Widerstände findet man:

$s_R^2 = s_{R_1}^2 + s_{R_2}^2 = (0{,}8\,\Omega)^2 + (1{,}1\,\Omega)^2 \quad \Rightarrow s_R = 1{,}36\Omega$, *also* $R = 115 \pm 1{,}4\Omega$.

2.3. Der zentrale Grenzwertsatz der Statistik

Der zentrale Grenzwertsatz der Statistik besagt, dass sich durch das zufällige Zusammenwirken vieler Einzelmerkmale (Addition von Zufallsvariablen) ein näherungsweise normalverteiltes Gesamtmerkmal ergibt.

Durch die Abstraktion, die die Betrachtung eines Teilemerkmals als Zufallsvariable beinhaltet, wird das Phänomen der in der Fertigungspraxis beobachtbaren Abweichungen der Ist-Maße vom angestrebten Nennmaß mathematisch fassbar. Der durch den zentralen Grenzwertsatz formal beschriebene Sachverhalt sei anhand eines einfachen Beispiels erläutert.

BEISPIEL:

Das Ergebnis eines Wurfs mit einem regelmäßigen Würfel ist eine Zufallszahl x, die die Werte 1, 2, 3, 4, 5 und 6 annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, eine "6" zu Würfeln, ist 1/6. Das gleiche gilt für alle übrigen

2020-04-06 - SOCOS

Werte. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x) ist in Bild 2.3 dargestellt. Rein rechnerisch ergibt sich als Mittelwert der Ergebnisse vieler Würfe der Wert 3,5.

Wählt man als Zufallsgröße die Summe der Augenzahlen beim Wurf zweier Würfel, so ergibt sich als Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsvariablen eine "Dreiecksform".

Das kleinstmögliche Ergebnis ist 2, das größtmögliche ist 12. Die Wahrscheinlichkeit, beispielsweise die Augensumme 7 zu erhalten, ergibt sich durch Division der Anzahl aller Kombinationen von Augenzahlen mit der Summe 7 durch die Anzahl aller möglichen Kombinationen (36).

Es gibt 6 Möglichkeiten, die Augensumme 7 zu erhalten, und zwar (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), und 36 insgesamt mögliche Ergebnisse des hier betrachteten zufälligen Vorgangs: (1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), ..., (6,6). Es gilt also: f(7) = 6/36 = 1/6.

Die Zufallsvariable "Augensumme als Ergebnis eines Wurfs mit 4 Würfeln" hat eine Wahrscheinlichkeitsdichte, die bereits stark an den Kurvenverlauf der Dichtefunktion der Normalverteilung (durchgezogene Linie) erinnert.

*Der Mittelwert dieser Zufallsvariablen ist 4*3,5 = 14. Man erhält also als Zufallsergebnis häufig Werte in der Nähe dieses Mittelwerts und nur vergleichsweise selten große Abweichungen von Mittelwert, beispielsweise den Wert 24, der dem Wurfergebnis (6, 6, 6, 6) entspricht.*

Anders gesagt, muss für das Zustandekommen dieses Ergebnisses jede der 4 einzelnen Zufallsvariablen (Würfel) einen Wert (6) annehmen, der stark vom Mittelwert 3,5 abweicht. Die Wahrscheinlichkeit dieses Resultats ist sehr klein: $(1/6)^4 < 1\%$.

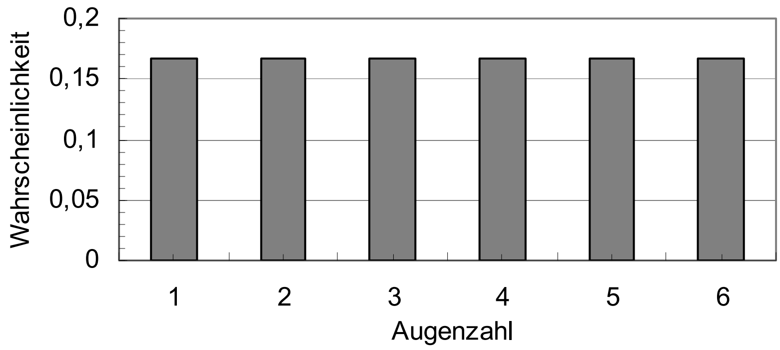


Bild 2.3: Wahrscheinlichkeitsfunktion eines regelmäßigen Würfels.

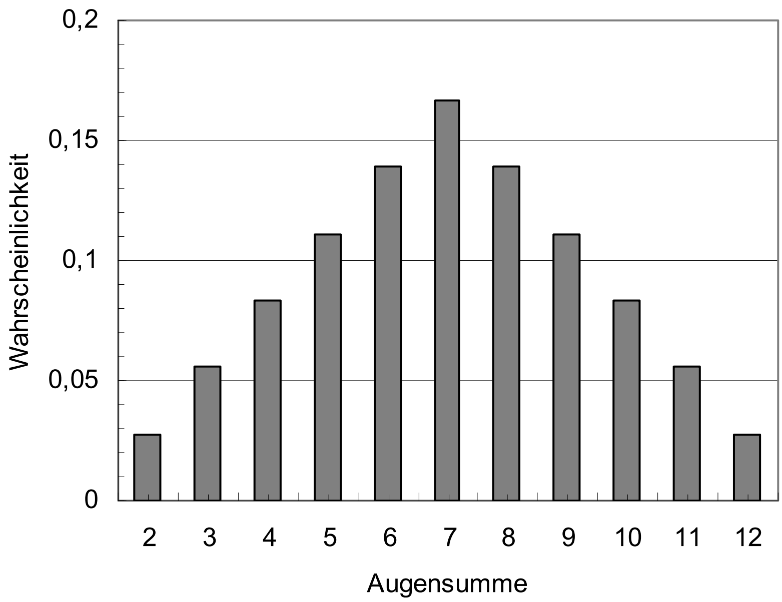


Bild 2.4: Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße "Augensumme beim Wurf zweier Würfel"

2020-04-06 - SOCOS

2020-04-06 - SOCOS

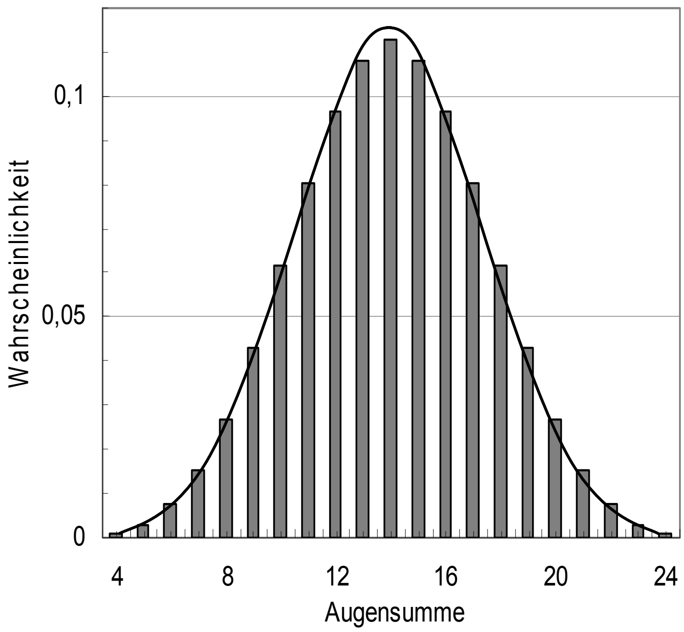


Bild 2.5: Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße "Augenzahl beim Wurf mit vier Würfeln"

Dieser Zusammenhang ist für die Theorie der Statistischen Tolerierung von grundlegender Bedeutung. Die Statistische Tolerierung nutzt die Tatsache aus, dass sich bei einer zufälligen Kombination genügend vieler Einzelmerkmale positive und negative Merkmalsabweichungen im Mittel ausgleichen.

Das Ergebnis des vorstehenden Beispiels lässt sich sinngemäß auf die Eigenschaften einer Maßkette übertragen. Damit das Schließmaß einer Baugruppe von *k* Teilen einen vom Nennschließmaß stark abweichenden Wert annimmt, müssen gleichzeitig alle *k* Ist-Maße der Einzelteile am Rand der jeweiligen Einzeltoleranz liegen. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall ist jedoch für genügend große *k* sehr klein. Setzt man eine zufällige Teileauswahl bei der Montage voraus, so ergibt sich als Verteilung der "Zufallsgröße Schließmaß" näherungsweise eine Normalverteilung.

Das nachfolgende Bild soll diesen Sachverhalt veranschaulichen.

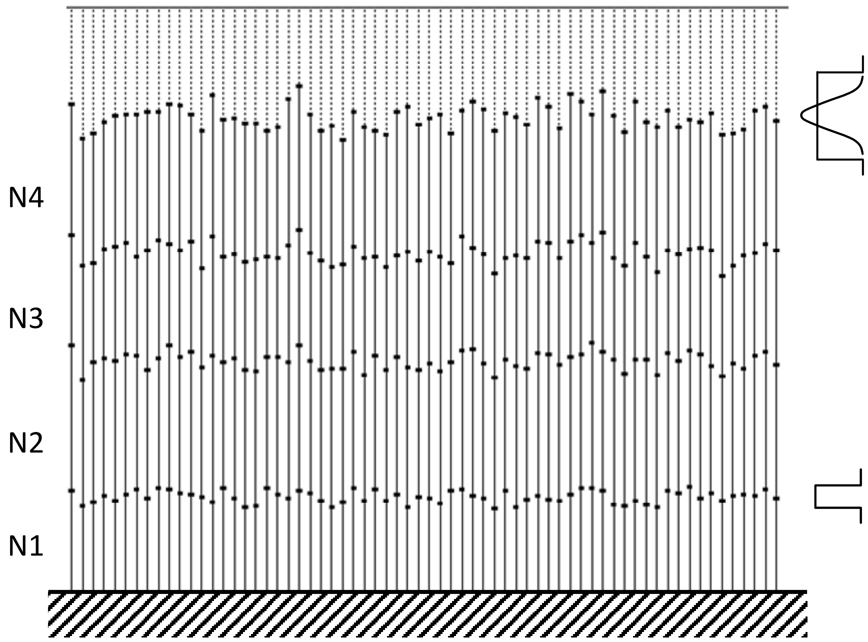


Bild 2.6: Schematische Darstellung einer viergliedrigen Baugruppe mit rechteckverteilten Einzelmaßen. Es sind insgesamt 66 Baugruppen nebeneinander angeordnet. Das auf den oberen Rand bezogene Schließmaß (gestrichelt) ist näherungsweise normalverteilt.

Die Darstellung zeigt schematisch das Zusammenwirken von vier gleichtolerierten und rechteckverteilten Einzelmaßen am Beispiel von insgesamt 66 Baugruppen, die hier nebeneinander angeordnet sind. Es ist ersichtlich, dass das auf den oberen Rand bezogene Schließmaß (gestrichelt) N_S nur selten größere Abweichungen vom Mittelwert aufweist. Der Bereich $\mu \pm 3\sigma$ der sich für das Schließmaß näherungsweise ergebenden Normalverteilung ist offenbar etwas kleiner als die arithmetisch berechnete Schließtoleranz, die durch die Breite des großen Rechtecks angezeigt wird.

Die Zufälligkeit der Teilekombination ist nur eine von vielen Voraussetzungen, die erfüllt sein müssen, damit dieses statistische Verhalten in günstiger Weise bei der Festlegung von Toleranzen nutzbar wird.

ANMERKUNG:

Anhand des Würfelbeispiels wurde gezeigt, wie die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Summe von Zufallsvariablen bestimmt wird, die jeweils nur ganzzahlige Werte annehmen können (1,...,6). Man nennt diese mathematische Operation auch "Faltung". Die Faltung bezeichnet also eine Verknüpfung der Wahrscheinlichkeitsfunktionen von Zufallsvariablen. Sie lässt sich auch bei stetigen Variablen anwenden, d.h. solchen Variablen, die beliebige reelle Werte annehmen können.

Die Längenmaße von Bauteilen können als stetige Variable betrachtet werden, da sie im Prinzip beliebige Zwischenwerte auf einer Skala annehmen können. Bei analog anzeigenden Messgeräten wie Schieblehre, Mikrometerschraube oder Feinzeigerlehren ist dieser Umstand im Gegensatz zu solchen mit Digitalanzeige offensichtlich. Streng genommen kann ein Längenmaß natürlich immer nur diskrete Werte annehmen, deren kleinster Abstand durch das Auflösungsvermögen des Messgeräts bzw. des Messverfahrens begrenzt ist.

Im Sinne der statistischen Tolerierung kann das Zusammenwirken verschiedener zufälliger Einflüsse am Beispiel der Bearbeitung einer Welle auf einer Drehmaschine klar gemacht werden. Dabei wirken eine Fülle von Einflüssen auf das Prozessergebnis, den Durchmesser der Welle ein:

- Deformation durch unzureichende Maschinensteifigkeit,
- Werkstückverspannung,
- elastische Deformation des Werkstückes und des Schneidwerkzeugs,
- Lagerverschleiß,
- Eigenschwingungen der Maschine,
- Schwankungen von Drehzahl und Vorschubgeschwindigkeit usw.

Die Überlagerung der Einflüsse führt zu einem Durchmesser, welcher nach dem Zentralen Grenzwertsatz der Statistik näherungsweise normalverteilt ist.

2.4. Merkmalsverteilung und Toleranz

Ist-Werte von Merkmalen müssen innerhalb der zugehörigen Toleranz liegen. Es wird jedoch keine Forderung bezüglich der Verteilung der Merkmalswerte innerhalb der Toleranzgrenzen erhoben. Aus der Annahme des ungünstigsten Falls, dass alle Merkmalswerte an den Toleranzgrenzen liegen, wird die Notwendigkeit zur arithmetischen Tolerierung abgeleitet.

Für die Rechenverfahren der Statistischen Tolerierung wird stattdessen angenommen, dass Merkmalswerte bestimmten Verteilungsformen innerhalb der Toleranzgrenzen unterliegen. Eine Verteilung wird durch gewisse Parameter wie z.B. Mittelwert und Standardabweichung charakterisiert.

ANMERKUNG:

Aus der alleinigen Angabe von Mittelwert und Standardabweichung kann nicht auf eine bestimmte Verteilung, wie z.B. die Normalverteilung, geschlossen werden.

Es ist darum notwendig, den Zusammenhang zwischen der Toleranz eines Merkmals und der Standardabweichung spezieller Verteilungen näher zu betrachten.

Wir beschränken uns in den folgenden Abschnitten auf eine Behandlung der Rechteck-, Dreieck- und Normalverteilung. In der Literatur wird darüber hinaus beispielsweise die Trapezverteilung mit unterschiedlichen Flankensteigungen untersucht (vgl. [2], S. 153).

2020-04-06 - SOCOS

2020-04-06 - SOCOS

2.4.1. Varianz einer Rechteckverteilung

Wir betrachten im Folgenden den Ist-Wert eines Teilemerkmals als Zufallsvariable *X*. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Variable *X* einen Wert *x* im Bereich zwischen *x* und *x +* d*x* annimmt, ist gleich dem Produkt $f(x)dx$, $f(x)$ bezeichnet dabei die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Merkmals, dessen Werte gleichmäßig über den gesamten durch G_u und G_o begrenzten Toleranzbereich $T = (G_o - G_u)$ verteilt sind, hat innerhalb dieses Bereichs den Wert $f(x) = 1/T$ und ist gleich null für alle *x* außerhalb *T*. Für den Mittelwert μ gilt:

$$\mu = \frac{G_u + G_o}{2} \,. \tag{2.8}$$

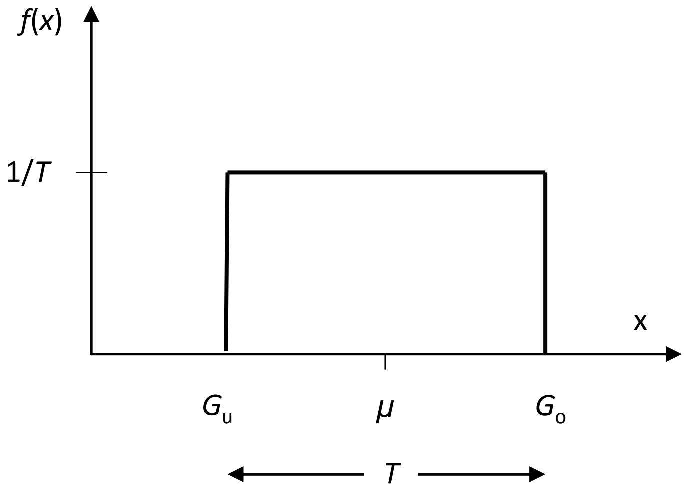


Bild 2.7: Wahrscheinlichkeitsdichte *f*(*x*) einer Rechteckverteilung

Die graphische Darstellung dieser Funktion erklärt die Bezeichnung Rechteckverteilung. Die Fläche des Rechtecks entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass *X* einen beliebigen Wert *x* zwischen G_u und G_o annimmt. Sie hat den Wert eins. Die Varianz σ^2 einer stetigen Verteilung ist definiert durch

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx \,. \tag{2.9}$$

Da $f(x)$ im Falle der Rechteckverteilung außerhalb des Intervalls $[G_u , G_o]$ gleich null ist, genügt es, zur Berechnung der Varianz der Rechteckverteilung die Integration über diesem Intervall auszuführen:

$$\sigma^2 = \int_{G_u}^{G_o} \left(x - \frac{G_u + G_o}{2} \right)^2 \frac{1}{T}\, dx = \frac{T^2}{12} \,. \tag{2.10}$$

Die Rechteckverteilung ist ein oft eingesetzter, konservativer Ansatz, weil die Auftretenswahrscheinlichkeit an den Toleranzgrenzen genau so groß ist, wie in der Toleranzmitte. Sie sollte darum immer dann als Eingangsverteilung angewendet werden, wenn die tatsächliche Toleranzverteilung noch unklar ist. Außerdem ist sie typisch für Fertigungsprozesse mit systematischen Einflussfaktoren wie Werkzeugverschleiß oder Änderung von Prozessparametern. Das gilt insbesondere für alle werkzeuggebundenen Maße wie z.B. beim Spritzgießen und Stanzen. Die Rechteckverteilung kann dabei als Umhüllende einer (z.B. durch Werkzeugverschleiß) wandernden Normalverteilung angesehen werden.

2.4.2. Varianz einer Dreieckverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Dreieckverteilung ist im Intervall [G_u, G_o] gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{T^2}(x - G_u) \text{für } G_u < x < \mu \\ -\frac{4}{T^2}(x - G_o) \text{für } \mu \le x < G_o \end{cases} \tag{2.11}$$

Die Fläche des Dreiecks entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass *X* einen beliebigen Wert *x* zwischen G_u und G_o annimmt. Ihr Betrag ist gleich eins. Da die Grundseite des Dreiecks der Breite des Rechtecks (vgl. Rechteckverteilung) entspricht, muss *f*(*x*) an der Stelle $\mu = (G_u + G_o)/2$ den Wert 2/T haben.

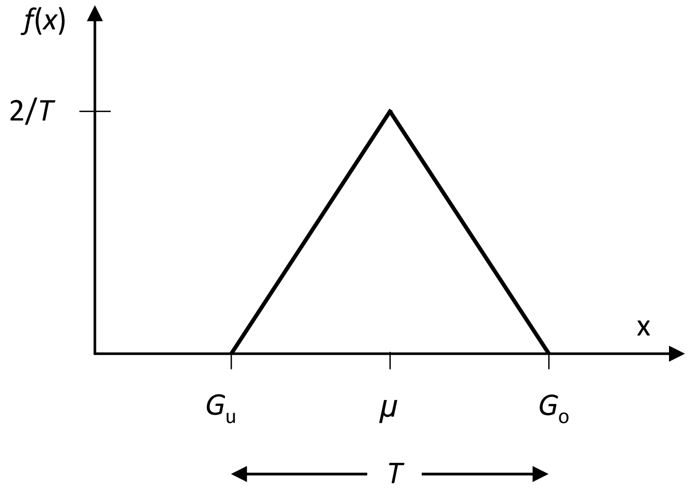


Bild 2.8: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Dreieckverteilung

Wegen der Symmetrie der Funktion genügt es, zur Berechnung der Varianz der Dreieckverteilung das Integral im Intervall [G_u, μ] zu bestimmen und mit zwei zu multiplizieren:

$$\sigma^2 = 2\int_{G_u}^{\mu} (x - \mu)^2 \frac{4}{T^2}(x - G_u)\, dx = \frac{T^2}{24}. \tag{2.12}$$

Die Dreieckverteilung ist typisch für Kleinserien, bei Werkzeugkorrekturen hin zum Mittenmaß und als Annäherung an die Normalverteilung.

2.4.3. Varianz einer Normalverteilung

Die graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung wird aufgrund ihrer charakteristischen Form auch „Gaußsche Glockenkurve" genannt. Sie wird durch die mathematische Beziehung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \tag{2.13}$$

beschrieben.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist durch die Parameter μ und σ eindeutig bestimmt. Dabei stellt μ den Mittelwert der Verteilung dar und σ deren Standardabweichung.

> *ANMERKUNG:*
>
> *Aus der Angabe von Mittelwert und Standardabweichung kann nicht einfach auf eine Normalverteilung geschlossen werden.*

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung ist im folgenden Bild verdeutlicht.

2020-04-06 - SOCOS

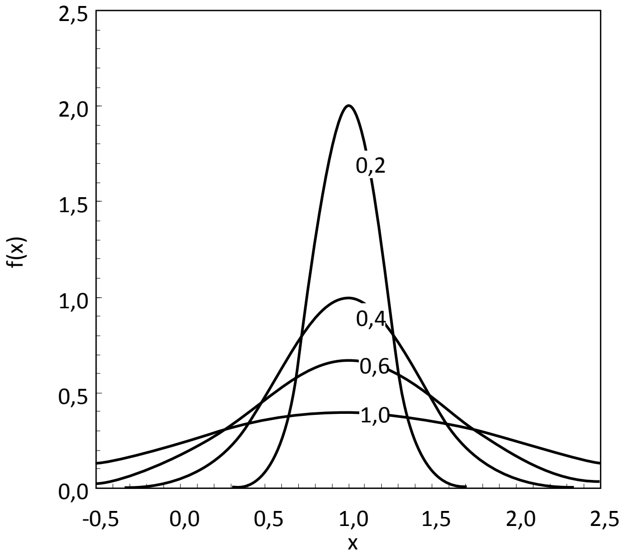


Bild 9: Graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung in Abhängigkeit des Streuparameters σ bei μ = 1.

Die Normalverteilung weist mehrere Besonderheiten auf, die sich aus der Funktionsgleichung bzw. ihrer graphischen Darstellung erkennen lassen:

- Die Kurve ist symmetrisch zum Mittelwert μ.
- Die Kurve besitzt an den Stellen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ jeweils einen Wendepunkt.
- Die Kurve verläuft von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$.

Eine Toleranz wird häufig als Mittelwert ± Vielfaches der Standardabweichung angegeben. Damit wird definiert, wie viel Prozent der Werte in den Toleranzgrenzen erwartet werden bzw. wie groß der zulässige Überschreitungsanteil an den Toleranzgrenzen ist. Der Prozentsatz der Werte innerhalb der Toleranz wird als Konfidenzzahl γ bezeichnet.

Folgende Tabelle fasst für unterschiedliche Konfidenzzahlen γ einer standardnormalverteilten Zufallsvariable, die Erweiterungsfaktoren k und entsprechende C_P-Werte zusammen.

Erweiterungsfaktor k	Intervall	C_p-Wert	Konfidenzzahl γ
2	$-1\sigma < z \leq 1\sigma$	0,33	≈ 68,2689 %
4	$-2\sigma < z \leq 2\sigma$	0,66	≈ 95,4500 %
6	$-3\sigma < z \leq 3\sigma$	1	≈ 99,7300 %
8	$-4\sigma < z \leq 4\sigma$	1,33	≈ 99,9937 %
10	$-5\sigma < z \leq 5\sigma$	1,66	≈ 99,99994 %

Tabelle 2.1: Konfidenzzahl für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable

Der Zusammenhang zwischen Varianz und Toleranz kann dargestellt werden mit

$$\sigma^2 = \frac{T^2}{k^2}\,. \qquad (2.14)$$

Die Verwendung der Normalverteilung als Eingangsverteilung ist typisch für Maßtoleranzen bei spanender Bearbeitung. Allerdings werden systematische Effekte, wie z.B. Werkzeugverschleiß, dabei nicht beachtet. Damit ist die Normalverteilung eine sehr ideale Verteilung.

2020-04-06 - SOCOS

2.5. Prozessfähigkeitskennwerte

Die Prozessfähigkeit C_p ist ein Maß für die Leistung, die der Prozess bei optimaler Einstellung erbringen könnte. Dabei wird die tatsächliche Prozessstreuung mit der vorgegebenen Toleranz verglichen. Für normalverteilte Größen gilt:

$$C_p = \frac{T}{6\sigma}. \tag{2.15}$$

Kann bei einem Gesamtmerkmal die Prozessfähigkeit C_p nicht eingehalten werden, dann muss in der Regel die Toleranz der Einzelmerkmale verringert werden.

Der Prozessfähigkeitskennwert C_{pk} ist ein Maß für die Streuung eines Merkmals innerhalb des Toleranzbereichs unter Berücksichtigung der Prozessmittellage. Bei normalverteilten Größen gilt:

$$C_{pk} = \frac{D}{3\sigma}. \tag{2.16}$$

D ist der kleinste Abstand des Mittelwerts der Merkmalsverteilung zu einem der Grenzwerte G_o bzw. G_u.

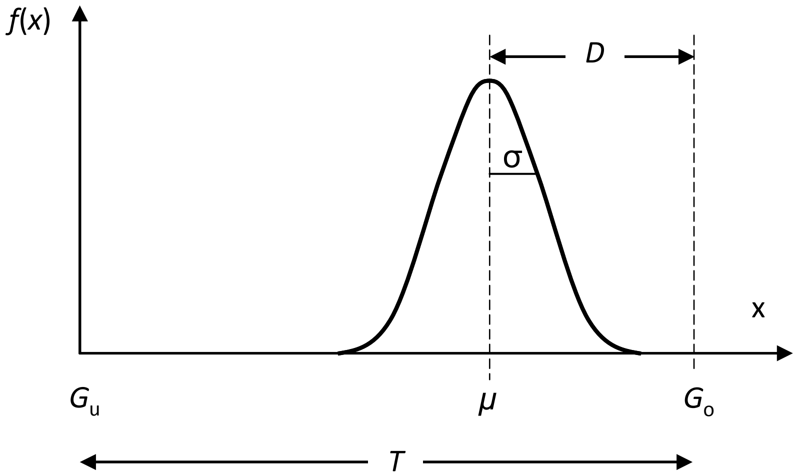


Bild 2.10: Veranschaulichung des C_{pk}-Werts (schematisch)

Kann bei einem Gesamtmerkmal der Prozessfähigkeitskennwert C_{pk} nicht eingehalten werden, dann müssen in der Regel die Mittelwerte der Einzelmerkmale verschoben werden.

Setzt man voraus, dass der Prozess "zentriert" ist, d.h. die Prozessmittellage mit der Toleranzmitte übereinstimmt (also $D = T/2$), so wird der C_{pk}-Wert gleich dem C_p-Wert.

Der C_p-Wert eines Gesamtmerkmals ist natürlich kein Prozessfähigkeitskennwert im ursprünglichen Sinn, er könnte jedoch als formale Größe beispielsweise zur Beurteilung der Funktionssicherheit der Baugruppe herangezogen werden. Weitere Details zu diesem Thema finden sich in [6].

2020-04-06 - SOCOS

3. Arithmetische Tolerierung

3.1. Anwendung bei linearen Merkmalsketten

Analog zur Verkettung von Einzelmerkmalen zum Gesamtmerkmal ergibt sich eine Verkettung von Einzeltoleranzen zur Toleranz des Gesamtmerkmals. Diese wird häufig anhand theoretischer Überlegungen oder aufgrund von Erfahrungswerten unter Berücksichtigung ihrer Bedeutung für

- Funktion,
- Zuverlässigkeit,
- Lebensdauer,
- optische Qualität (Aussehen),
- Erfüllung gesetzlicher und behördlicher Vorschriften

festgelegt. Als Ergebnis einer Konstruktionsberechnung werden dann die Toleranzen der Einzelmerkmale bestimmt (Toleranzsynthese). Sind dagegen die Einzeltoleranzen vorgegeben, so kann in Umkehrung dieses Gedankenganges die Toleranz des Gesamtmerkmals berechnet werden (Toleranzanalyse).

Die Ist-Werte von Merkmalen müssen innerhalb der Toleranzgrenzen liegen. Geht man vom denkbar ungünstigsten Fall aus, dass alle Ist-Werte der Einzelmerkmale die höchstzulässige Abweichung vom Nennwert aufweisen, d.h. an den Toleranzgrenzen liegen, so müssen unabhängig von der jeweiligen Zählrichtung der Einzelmerkmale (vgl. Bild 2.1) alle Einzeltoleranzen T_i arithmetisch zur Toleranz des Gesamtmerkmals addiert werden. Dies gilt aber nur, falls Nennwert und Toleranzmitte übereinstimmen. Andernfalls müssen jeweils die Differenzen der oberen und unteren Toleranzgrenze zum Nennwert entsprechend der Zählrichtung berücksichtigt werden. Die Toleranz des Gesamtmerkmals liegt dann ebenfalls asymmetrisch zu seinem Nennwert.

Damit ergibt sich

$$T_a = T_1 + T_2 + \ldots + T_k = \sum_{i=1}^{k} T_i \ . \qquad (3.1)$$

Man spricht in diesem Fall von "arithmetischer Tolerierung". Andere Bezeichnungen für diese Vorgehensweise sind "Maximum-Minimum-Methode" oder "Methode der absoluten Austauschbarkeit".

ANMERKUNG:

Der Begriff "absolute Austauschbarkeit" eines Bauteils bezeichnet dessen Eigenschaft, ohne Einschränkung für die obengenannten Konstruktionskriterien (Funktion, Zuverlässigkeit, ...) der Baugruppe durch ein beliebiges anderes Teil aus der gleichen Serienfertigung ersetzbar zu sein.

Häufig wird die arithmetische Tolerierung auch als „Worst-Case-Tolerierung“ bezeichnet, weil davon ausgegangen wird, dass alle Merkmale genau an ihren oberen oder unteren Grenzen auftreten. Allerdings stellt dies nur im linearen Fall ein konservatives Vorgehen dar. Sind z.B. Verkippungseinflüsse zu berücksichtigen, dann muss zur Ermittlung des Worst-Case-Falles mit einer nicht-linearen Merkmalskette gearbeitet werden.

BEISPIEL:

Gegeben sind fünf Einzelteile mit Maßen und Toleranzen. Gesucht sind das Schließmaß und die Toleranz des Schließmaßes nach dem Zusammenbau.

Es ist zu beachten, dass sich bei negativem Nennmaß (entsprechend der Zählrichtung) in den Spalten 5 und 6 Vorzeichen und Index des Abmaßes ändern. Beim Nennmaß -23,8 wird A_u = -0,02 zu A_o' = +0,02.

Als Schließmaß ergibt sich das Maß $0{,}1^{+0{,}05}_{-0{,}07}$ bzw. das Mittenmaß $0{,}09 \pm 0{,}06$, sowie T_a = 0,12.

2020-04-06 - SOCOS

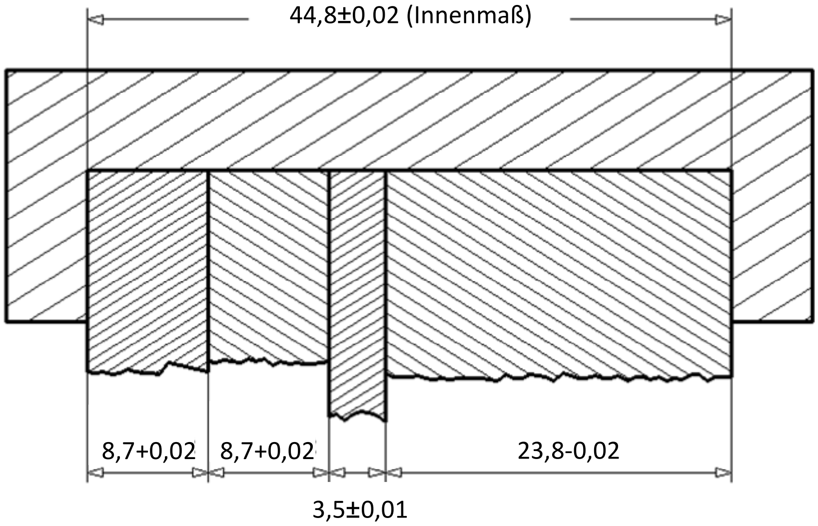


Bild 3.1: Baugruppe mit Nennmaßen und Toleranzen

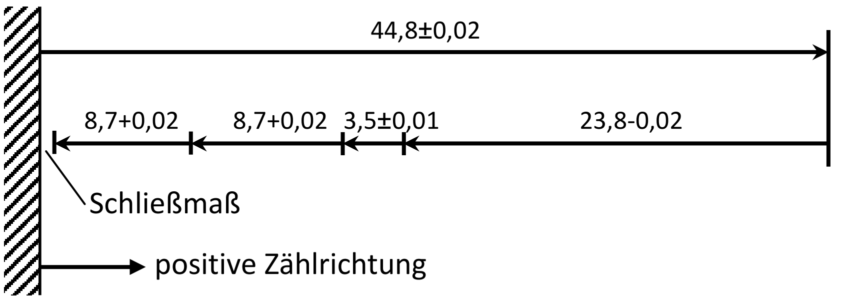


Bild 3.2: Schematische Darstellung der Nennmaße unter Berücksichtigung der Zählrichtung

1	2	3	4	5	6	7	8
	Arithmetische Addition der Toleranzen						
Maß	Nennmaß	Abmaßenach Zeichnung		Abmaße entsprechend Zählrichtung		Toleranz	Mittenmaß
	N	A_u	A_o	$A_u{}'$	$A_o{}'$	T_i	C
A	+44,8	-0,02	+0,02	-0,02	+0,02	0,04	+44,8
B	-23,8	-0,02			+0,02	0,02	-23,79
C	-3,5	-0,01	+0,01	-0,01	+0,01	0,02	-3,5
D	-8,7		+0,02	-0,02		0,02	-8,71
E	-8,7		+0,02	-0,02		0,02	-8,71
$\sum$+	+44,8						
$\sum$-	-44,7						
$\sum$	+0,1			-0,07	+0,05	0,12	+0,09
	s			A_{su}	A_{so}	T_a	C_s

Tabelle 3.1: Rechenblatt zur Berechnung der arithmetischen Schließtoleranz.

2020-04-06 - SOCOS

3.2. Anwendung bei nicht-linearen Merkmalsketten

Lineare Merkmalsketten erlauben eine übersichtliche Berechnung von Toleranzüberlagerungen. Wie bereits in Abschnitt 2.1 dargestellt, überlagern sich aber Merkmale und damit auch Toleranzen auch nichtlinear. Als Beispiel einer nichtlinearen Maßkette wurde der Abstand zweier Bohrungen diskutiert, deren Positionen auf zwei zueinander senkrechten Achsen durch den jeweiligen Abstand zu einem Bezugspunkt gegeben sind:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \ . \tag{3.2}$$

Die Maßkette ist nicht mehr linear, so dass die im letzten Abschnitt hergeleitete Toleranzrechnung nicht direkt angewendet werden kann.

Bei nichtlinearen Überlagerungen von Merkmalen können sich komplexere Zusammenhänge von Einzelmerkmalen ergeben, die analytisch nur noch mit großem Aufwand dargestellt werden können. Auch bei elektrotechnischen oder physikalischen Aufgabenstellungen treten oftmals nichtlineare Merkmalsketten auf, Beispiele sind Spannungsteiler und Transistorschaltungen.

Für die arithmetische Toleranzrechnung nichtlinearer Merkmalsketten steht nur das Verfahren der Linearisierung der Merkmalskette zur Verfügung, das in Kapitel 2.2 als Fehlerfortpflanzungsgesetz eingeführt wurde. Da diese Linearisierung auf der Taylorreihenentwicklung der Funktion beruht, ist die Linearisierung nur dann zielführend, wenn

- die Nichtlinearität im Arbeitspunkt nicht zu ausgeprägt ist und
- der zu berechnende Toleranzbereich klein ist.

Wird eine dieser Voraussetzungen verletzt, muss eine statistische Toleranzsimulation durchgeführt werden.

Für die Herleitung des Vorgehens bei der Linearisierung wird zunächst davon ausgegangen, dass das zu tolerierende Gesamtmerkmal nur von einer Variable abhängt. Die Funktion $z(x)$ kann um einen Bezugspunkt x_0 als Taylor-Reihe entwickelt werden. Sie ergibt sich zu

$$z(x_0 + \Delta x) = z_0 + \Delta z = z(x_0) + \frac{1}{1!}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_0} \Delta x + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{x_0} \Delta x^2 + \ldots \ . \tag{3.3}$$

Ist die Abweichung Δx klein, wovon bei Toleranzrechnungen ausgegangen werden kann, kann die Taylorreihe nach dem linearen Glied abgebrochen werden. Für die Toleranz Δz ergibt sich damit die lineare Näherung

$$\Delta z \approx \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_0} \Delta x = E_x \Delta x \ . \tag{3.4}$$

Die Größe E_x, mit der sich eine Änderung Δx des Merkmals x auf z auswirkt, wird als Empfindlichkeit bezeichnet. Mit Hilfe der Taylor-Reihe wird die nichtlineare Aufgabenstellung linear approximiert. Dieser Zusammenhänge werden im nachfolgenden Bild grafisch dargestellt.

2020-04-06 - SOCOS

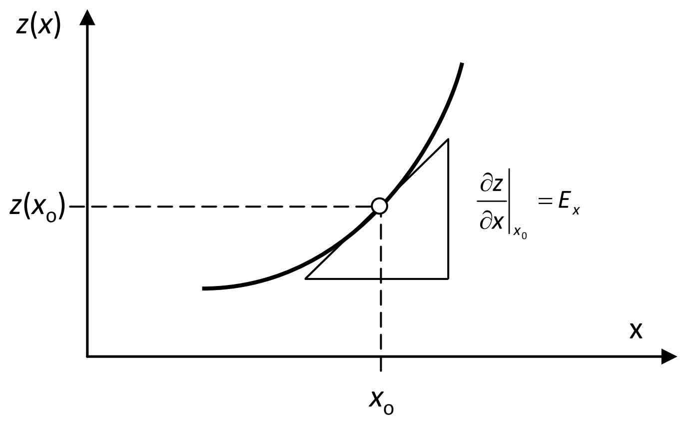


Bild 3.3: Linearisierung im Arbeitspunkt

2020-04-06 - SOCOS

Dieser Ansatz zur Linearisierung kann auf Funktionen mehrerer Merkmale x_i verallgemeinert werden. Der funktionale Zusammenhang zwischen den Merkmalen x_i und dem zu tolerierenden Gesamtmerkmal z hat die Form

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{3.5}$$

Die Funktion kann als mehrdimensionale Taylor-Reihe beschrieben werden. Wird die Taylor-Reihe nach dem linearen Glied abgebrochen, ergibt sich das totale Differential

$$\Delta z \approx E_{x1}\Delta x_1 + E_{x2}\Delta x_2 + \dots + E_{xn}\Delta x_n = \Delta z_1 + \Delta z_2 + \dots + \Delta z_n. \tag{3.6}$$

Mit der Taylor-Reihe wird das Problem linearisiert. Aus dem nichtlinearen Zusammenhang ergibt sich eine lineare Merkmalskette mit den Summanden $\Delta z_i = E_{xi}\Delta x_i$

Nach dieser Umformung können die im vorhergehenden Abschnitt dargestellten Methoden zur Toleranzrechnung verwendet werden. Die arithmetische Toleranzrechnung auf Basis dieser Gleichung lautet nun

$$T = \sum_{i=1}^{n} \left|E_{xi}T_i\right| = \left|E_{x1}T_1\right| + \left|E_{x2}T_2\right| + \dots + \left|E_{xn}T_n\right| . \tag{3.7}$$

Beispiel:

Der Abstand von zwei Bohrungen wird nach Gl. 3.2 berechnet. Die Toleranz des Abstandes Δz kann mit Hilfe des vollständigen Fehler-Differentials über die einzelnen Toleranzen Δx und Δy abgeschätzt werden als

$$\Delta z \approx \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \Delta y = E_x \Delta x + E_y \Delta y .$$

Aus der Gleichung ergibt sich die Empfindlichkeit E_x, mit der sich eine Toleranz Δx auf die Gesamttoleranz Δz auswirkt

$$E_x = \frac{1}{2}\frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} ,$$

sowie die Empfindlichkeit E_y, mit der sich eine Toleranz Δy auf die Gesamttoleranz Δz auswirkt

$$E_y = \frac{1}{2}\frac{2y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} .$$

Die Abhängigkeiten werden anhand des folgenden Zahlenbeispiels verdeutlicht.

Maß	Nenn-maß	Toleranzgrenzen		Toleranz	Mitten-maß	Empfind-lichkeiten	Toleranz-einfluss
		Min.	Max.	T_i		E_i	$E_i T_i$
x	40	- 0,1	0,1	0,2	40	0,8	0,16
y	30	- 0,1	0,1	0,2	30	0,6	0,12
z	50				50		0,28

Der Abstand z beträgt für die angegebenen Nennmaße und Toleranzen somit

z = 50 mm ± 0,14 mm.

2020-04-06 - SOCOS

4. Statistische Tolerierung

Bei der arithmetischen Tolerierung werden minimale und maximale Merkmale so überlagert, dass die Auswirkung auf die Merkmalskette maximalen Einfluss hat. Komplexere Produkte weisen oftmals eine Vielzahl von einzelnen Bauelementen und damit Merkmalen auf. Mit zunehmender Anzahl von Bauelementen wird die Merkmalskette zur Berechnung der Gesamttoleranz immer länger. Bei arithmetischer Tolerierung steigt damit die Gesamttoleranz stetig an. Weil dabei aber die Wahrscheinlichkeit sinkt, dass alle Merkmale gleichzeitig einen Ist-Wert an den Toleranzgrenzen aufweisen, sollte bei der Toleranzrechnung die statistische Verteilung der Einzelmerkmale berücksichtigt werden. Dieser Ansatz führt zur statistischen Tolerierung.

Der statistischen Tolerierung liegt die Vorstellung zugrunde, dass sich zufällige positive und zufällige negative Abweichungen einzelner Merkmale von ihren jeweiligen Nennwerten ausgleichen. Der Prozess der Toleranzüberlagerung wird als Zufallsprozess aufgefasst, bei dem jedes Merkmal x_i als Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x_i)$ modelliert wird. Damit ist das Gesamtmerkmal z ebenfalls eine Zufallsvariable mit einer resultierenden Wahrscheinlichkeitsdichte $f(z)$. Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte des Gesamtmerkmals z bekannt, kann seine Toleranz über eine Konfidenzzahl γ bestimmt werden.

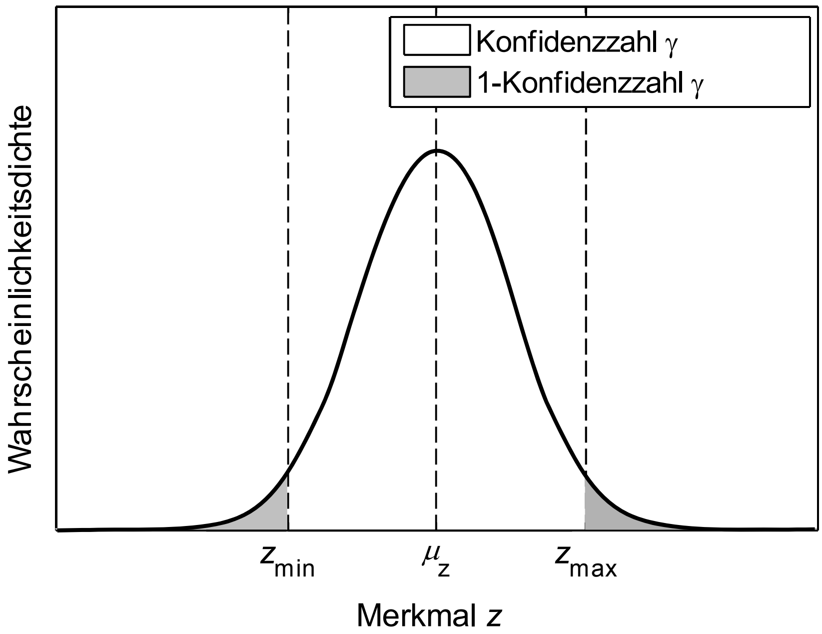


Bild 4.1: Zusammenhang zwischen Toleranz und Wahrscheinlichkeitsdichte

Eine statistische Toleranzrechnung kann mit unterschiedlichen Verfahren durchgeführt werden. Sie unterscheiden sich in ihren Voraussetzungen und ihrem Realisierungsaufwand. In der folgenden Darstellung wird von statistisch unabhängigen Merkmalen ausgegangen und für diese Annahme eine lineare und nichtlineare Toleranzrechnung vorgestellt. Im Anhang ist skizziert, wie bei abhängigen Merkmalen vorgegangen werden muss.

4.1. Anwendung bei linearen, unkorrelierten Merkmalsketten

4.1.1. Statistische Toleranzrechnung mit Hilfe der Faltungsoperation

Bei der statistischen Tolerierung wird ein Einzelmerkmal x_i als Zufallsvariable beschrieben. Die Toleranzüberlagerung führt zu einer Summe von Zufallsvariablen, die wiederum selbst eine Zufallsvariable ist.

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \quad (4.1)$$

2020-04-06 - SOCOS

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe von Zufallsvariablen ergibt sich aus der Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten:

$$f(z) = f(x_1) * f(x_2) * \ldots * f(x_n). \tag{4.2}$$

Sind die Wahrscheinlichkeitsdichten der Einzelmerkmale bekannt, kann die Wahrscheinlichkeitsdichte des Gesamtmerkmals durch Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten bestimmt werden. Aus dieser Verteilung kann mit Angabe einer Aussagesicherheit die Toleranz des Gesamtmerkmals bestimmt werden.

Die Berechnung der statistischen Verteilung über die Faltungsoperation ist unter den Annahmen unkorrelierter Merkmale und linearer Merkmalsketten mathematisch immer richtig. Allerdings ist der Aufwand zur numerischen Berechnung und Auswertung der Verteilung hoch und nur durch entsprechende Softwaretools wie z.B. das Programm MATLAB zu stemmen. Aus diesem Grund wird die statistische Tolerierung in der Praxis mit Näherungslösungen abgeschätzt.

2020-04-06 - SOCOS

4.1.2. Statistische Toleranzrechnung bei normalverteilten Merkmalen

Sind die Merkmale x_i normalverteilt mit dem Mittelwert μ_i und der Standardabweichung σ_i, so weist das Gesamtmerkmal z als Summe aller Einzelmerkmale ebenfalls eine Normalverteilung auf. Sie besitzt den Mittelwert

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n. \tag{4.3}$$

Die Varianzen der Einzelmerkmale addieren sich zur Varianz des Gesamtmerkmals mit

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2 . \tag{4.4}$$

Typischerweise wird bei den Einzelmerkmalen von einem Toleranzbereich $T_i = \pm 3\sigma$ mit einer Konfidenzzahl γ = 99,73 % ausgegangen, obwohl eine Konfidenzzahl von 99,9937% gefordert wird. Damit wird implizit eine eventuelle nichtzentrale Toleranzlage berücksichtigt. In diesem Fall gilt zwischen Standardabweichung σ_i und dem Toleranzbereich T_i der Zusammenhang

$$\sigma_i = \frac{T_i}{6} . \tag{4.5}$$

Unter dieser Annahme identischer Erweiterungsfaktoren k für die Einzelmerkmale x_i und des Gesamtmerkmals z vereinfacht sich die Toleranzrechnung zu

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_n^2 . \tag{4.6}$$

Beispiel:

Die nachfolgende Tabelle zeigt die Spezifikation für fünf Maße einer linearen Toleranzkette. Vorgegeben sind Nennmaß und minimale und maximale Abweichung nach Zeichnung. Für alle Längen wird angenommen, dass sie eine Normalverteilung aufweisen und als unkorreliert angesehen werden können. Die Toleranzangabe des Herstellers wird als $\pm 3\sigma$ Angabe aufgefasst, so dass sich die Standardabweichung jeweils aus einem Sechstel der angegebenen Toleranz ergibt.

Dabei berechnet sich die Toleranz bei statistischer Tolerierung aus

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_5^2} = 0{,}0566 \text{ mm}. \tag{4.7}$$

Die statistische Rechnung weist für das Gesamtmerkmal erwartungsgemäß kleinere Toleranzen auf als die arithmetische Toleranzrechnung. Dieser Vorteil steigt mit steigender Anzahl beteiligter Bauteile weiter an.

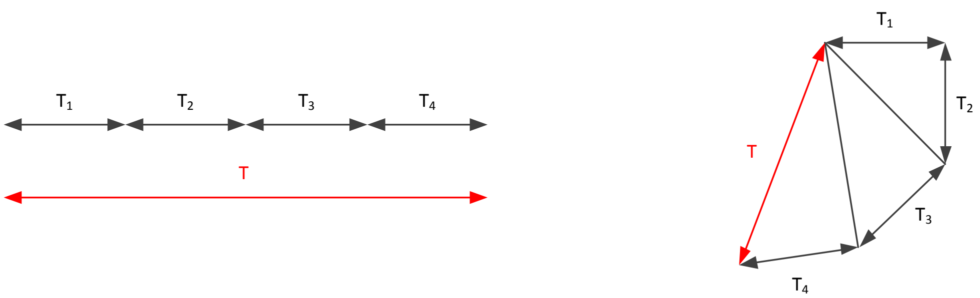
Maß	Nenn-maß	Zähl-richtung	Toleranzgrenzen nach Zeichnung		Toleranzgrenzen in Zählrichtung		Mitten-maß	Toleranz	
			Min.	Max.	Min.	Max.		arithme-tisch	statis-tisch
1	44,8	1	- 0,02	+ 0,02	- 0,02	+ 0,02	44,8	0,04	0,04
2	23,8	1	- 0,02	0	- 0,02	0	23,79	0,02	0,02
3	3,5	1	- 0,01	+ 0,01	- 0,01	+ 0,01	3,50	0,02	0,02
4	8,7	1	0	+ 0,02	0	+ 0,02	8,71	0,02	0,02
5	8,7	1	0	+ 0,02	0	+ 0,02	8,71	0,02	0,02
Summe	89,5				- 0,05	+ 0,07	89,51	0,12	0,0566

Tabelle 4.1: Toleranzrechnung für eine lineare Toleranzkette mit fünf Maßen

Bei der statistischen Tolerierung ist die Toleranz des Gesamtmerkmals deutlich kleiner als bei der arithmetischen Tolerierung. Der Unterschied der Toleranzrechnung kann unter der Annahme normalverteilter Einzelmerkmale grafisch verdeutlicht werden. Während bei der arithmetischen Tolerierung die Toleranzen linear addiert werden, werden die Toleranzen bei der statistischen Tolerierung quadratisch addiert. Die Addition kann auf den Satz des Pythagoras zurückgeführt und mit rechtwinkligen Dreiecken verdeutlicht werden. Die Gesamttoleranz ist wegen der quadratischen Addition insbesondere bei vielen Einzeltoleranzen deutlich kleiner.

Arithmetische Tolerierung

Statistische Tolerierung



$$T = |T_1| + |T_2| + \ldots + |T_n|$$

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_n^2$$

Bild 4.2: Visualisierung von arithmetischer und statistischer Tolerierung

Das Beispiel zur Längenüberlagerung zeigt, wie einfach die statistische Tolerierung durchgeführt werden kann, wenn die Einzelmerkmale eine Normalverteilung aufweisen. Diese ist jedoch nicht immer erfüllt, so dass das Modell erweitert werden muss.

2020-04-06 - SOCOS

4.1.3. Statistische Toleranzrechnung bei Merkmalen mit bekannter Verteilung

Die Annahme normalverteilter Einzelmerkmale ist in vielen Fällen zumindest in guter Näherung gerechtfertigt. Teilweise weichen aber die Einzelmerkmalsverteilungen deutlich von einer Normalverteilung ab. Typische Verteilungen sind in der Tabelle zusammengefasst.

Verteilung	Standardabweichung σ	Anwendungsfall
Rechteckverteilung	$\sigma = \frac{T}{\sqrt{12}}$	Werkzeuggebundene Maße (z.B. Spritzgießen, Stanzen)
symmetrische Dreieckverteilung	$\sigma = \frac{T}{\sqrt{24}}$	Werkzeugkorrekturen
Normalverteilung	$\sigma = \frac{T}{k}$	Maßtoleranzen ohne systematischen Einfluss (Wahl von *k* in Abhängigkeit des Überschreitungsanteils, siehe Kap.2.4.3).

Tabelle 4.2: Merkmalsverteilungen und ihre typischen Anwendungsfälle

Rechteckverteilungen ergeben sich zum Beispiel bei dem Verschleiß von Werkzeugen. Das Maß des produzierten Teiles ändert sich stetig, bis das entsprechende Werkzeug ausgetauscht wird. Anschließend beginnt der Verschleißprozess von neuem, so dass das Maß der produzierten Teile in definierten Grenzen gleichverteilt ist. Schiefe Verteilungen ergeben sich immer dann, wenn das Merkmal eine natürliche Grenze aufweist.

Sind die Einzelmerkmale nicht normalverteilt, weist auch das Gesamtmerkmal keine Normalverteilung auf. Nach dem zentralen Grenzwertsatz der Statistik ist die Summe von symmetrisch verteilten Zufallszahlen aber asymptotisch normalverteilt. Deshalb werden aus den Verteilungen der Merkmale x_i die Mittelwerte μ_i und die Standardabweichungen σ_i bestimmt. Wegen des zentralen Grenzwertsatzes der Statistik und dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich bei Überlagerung der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten eine asymptotische Normalverteilung mit der Varianz

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2 . \qquad (4.8)$$

Folgende Voraussetzungen müssen für die statistische Tolerierung mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz erfüllt sein:

- Einzelmerkmale sind unkorrelierte Zufallsgrößen. Die Berechnung der statistischen Toleranz beruht darauf, dass die Größen untereinander nicht korreliert sind. Der Sonderfall korrelierter Merkmale wird im Anhang diskutiert.
- Merkmalskette ist linear. Die Merkmalskette muss bekannt und über eine lineare Gleichung darstellbar sein. Im Fall einer nichtlinearen Merkmalskette kann diese linearisiert werden. Alternativ kann eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt werden.
- Merkmalskette weist mindestens vier Glieder auf. Der zentrale Grenzwertsatz der Statistik führt nur dann zu ausreichend präzisen Ergebnissen, wenn mindestens vier Größen miteinander verrechnet werden. Ansonsten ist die Annahme der Normalverteilung für das Gesamtmerkmal *z* nicht gerechtfertigt.
- Einzelmerkmale liegen in der gleichen Größenordnung. Der statistische Ausgleich von positiven und negativen Abweichungen der Ist-Merkmale von den Nennmerkmalen kann nur funktionieren, wenn die Zufallsstreubereiche der Ist-Merkmale und damit auch die Toleranzen etwa gleich groß sind.

2020-04-06 - SOCOS

- Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x_i)$ der Einzelmerkmale x_i sind bekannt. Die statistische Tolerierung beruht auf den angesetzten Wahrscheinlichkeitsdichten. Fehler in der zugrunde gelegten Wahrscheinlichkeitsdichte oder Änderungen der Verteilung über der Zeit resultieren in fehlerhaften Toleranzrechnungen.
- Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x_i)$ der Einzelmerkmale x_i sind symmetrisch. Eine statistische Kompensation von negativen und positiven Abweichungen eines Merkmals ist nur dann mittelwertsfrei, wenn positive und negative Abweichungen gleich wahrscheinlich sind.

BEISPIEL:

Lineare Merkmalsketten treten nicht nur bei geometrischen Maßen auf. Als elektrotechnisches Beispiel zeigt das Bild die Reihenschaltung von Widerständen. Die einzelnen Widerstände R_1 bis R_3 addieren sich zum Gesamtwiderstand R:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 . \tag{4.9}$$

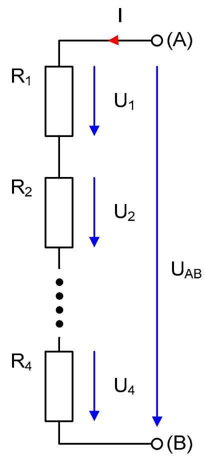


Bild 4.3: Reihenschaltung von Widerständen

Der erste Widerstand ist normalverteilt mit einem $\pm 3\sigma$ Wert von 20 Ω auf, der zweite besitzt eine Rechteckverteilung in den beiden Toleranzgrenzen von 95 und 105 Ω und der dritte Widerstand besitzt eine Dreieckverteilung in den Toleranzgrenzen von 92 und 108 Ω. Damit ergibt sich für den ersten Widerstand eine Standardabweichung σ_1 von

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{6} = \frac{20\Omega}{6} = 3{,}33\Omega . \tag{4.10}$$

Der zweite Widerstand weist eine Rechteckverteilung auf, bei der sich die Standardabweichung σ_2 ergibt aus

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{\sqrt{12}} = \frac{10\Omega}{\sqrt{12}} = 2{,}89\Omega . \tag{4.11}$$

Aus der symmetrischen Dreieckverteilung des dritten Widerstandes folgt die Standardabweichung σ_3 zu

$$\sigma_3 = \frac{T_3}{\sqrt{24}} = \frac{16\Omega}{\sqrt{24}} = 3{,}26\Omega . \tag{4.12}$$

Damit ergibt sich eine $\pm 3\sigma$ Toleranz des Gesamtwiderstandes von

$$T_G = 6\sigma = 6\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = 32{,}9\Omega . \tag{4.13}$$

Das nachfolgende Bild vergleicht die Wahrscheinlichkeitsdichte des Gesamtwiderstands für eine Berechnung über das Fehlerfortpflanzungsgesetz und für die exakte Berechnung über die Faltung der Wahrscheinlichkeitsdichten.

Die über die Faltung berechnete Wahrscheinlichkeitsdichte weicht geringfügig von der über das Fehlerfortpflanzungsgesetz berechneten Wahrscheinlichkeitsdichte ab. Die Unterschiede der beiden

2020-04-06 - SOCOS

Verfahren ergeben sich aus der geringen Anzahl von Einzelmerkmale. Sie führt dazu, dass die Annahme der Normalverteilung nicht genau erfüllt ist. Das mit der Faltung berechnete Ergebnis ist deshalb präziser als das über die Standardabweichungen berechnete Ergebnis.

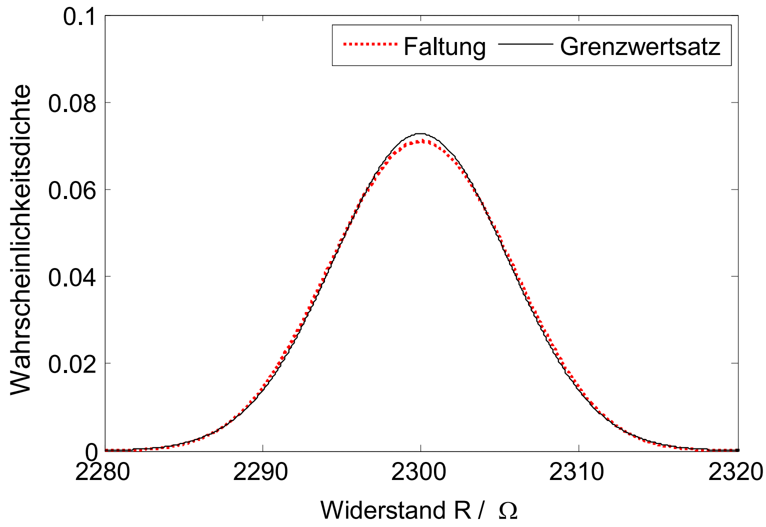


Bild 4.4: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Berechnung über das Fehlerfortpflanzungsgesetz und über die Faltung der Wahrscheinlichkeitsdichten

4.1.4. Statistische Toleranzsimulationen

Eine analytische Toleranzrechnung wird bei langen oder nichtlinearen Merkmalsketten schnell aufwändig. Deshalb wird stattdessen eine statistische Toleranzsimulation durchgeführt. Die bekannteste statistische Simulation ist die Monte-Carlo-Simulation.

Bei der Monte-Carlo-Simulation wird das Gesamtmerkmal über ein mathematisches Modell beschrieben und zunächst für einen Satz von Einzelmerkmalen berechnet. Diese Berechnung wird bei Variation der Einzelmerkmale wiederholt, wobei die jeweiligen Verteilungen der Einzelmerkmale berücksichtigt werden. Die Simulation kann damit als Zufallsexperiment aufgefasst werden, bei dem das Gesamtmerkmal eine Zufallsvariable ist. Jedes Simulationsergebnis liefert einen Wert für das Gesamtmerkmal.

Der Simulationsprozess ist im folgenden Bild als Flussdiagramm dargestellt.

Im ersten Schritt werden für alle Einzelmerkmale unter Berücksichtigung ihrer Wahrscheinlichkeitsdichte Zufallszahlen gebildet. Mit diesen Eingangsgrößen wird die Berechnung des Gesamtmerkmals durchgeführt. Aus den berechneten Werten können Prognoseintervalle für zukünftige Werte des Gesamtmerkmals berechnet werden.

Der Simulationsprozess wird solange durchgeführt, bis die Aussagesicherheit ausreichend groß ist. Aus den verschiedenen Simulationsergebnissen wird die statistische Verteilung des Gesamtmerkmals abgeleitet.

Die Monte-Carlo-Simulation ist damit ein rein numerisches Werkzeug, das die Gesamttoleranz durch gezieltes Ausprobieren ermittelt. Dabei können die Einzelmerkmale unterschiedliche Verteilungen aufweisen. Die Verteilung der Zufallsvariablen muss bei ihrer Erzeugung berücksichtigt werden. Diese Verteilungen müssen nicht symmetrisch sein und die Toleranzen können stark unterschiedlich sein.

2020-04-06 - SOCOS

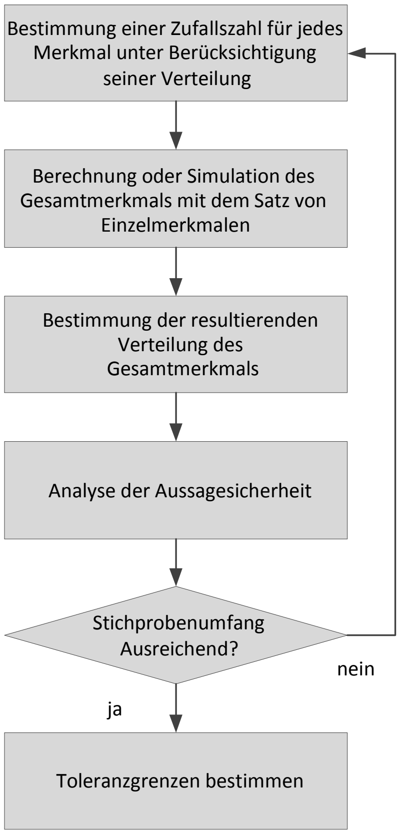


Bild 4.5: Flussdiagramm zur Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation

BEISPIEL:

Zur Veranschaulichung der Monte-Carlo-Simulation wird die Widerstandskette mit individuellen Verteilungen der Einzelwiderstände aufgegriffen, bei der der erste Widerstand normalverteilt ist (Toleranz entspricht dem $\pm 3\sigma$ Wert), der zweite eine Rechteckverteilung in den beiden Toleranzgrenzen besitzt und der dritte Widerstand eine Dreieckverteilung in den beiden Toleranzgrenzen besitzt.

Zur Generierung der Zufallszahlen wird der Widerstand R_1 als Normalverteilung mit einem Mittelwert von $\mu_1 = 100\ \Omega$ und einer Standardabweichung σ_1 von

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{6} = \frac{20\Omega}{6} = 3{,}33\Omega \qquad (4.14)$$

verwendet. Der zweite Widerstand weist eine Rechteckverteilung zwischen 95 und 105 Ω auf. Für den dritten Widerstand werden Zufallszahlen generiert, die eine Dreieckverteilung zwischen 92 und 108 Ω aufweisen. Anschließend wird für jede Gruppe von Zufallszahlen die zugehörige Summe berechnet und das Ergebnis statistisch ausgewertet.

Das folgende Bild zeigt das Ergebnis einer Monte-Carlo-Simulation für die Reihenschaltung von Widerständen.

Das Ergebnis zeigt in erster Näherung eine Normalverteilung mit einem Mittelwert von 300,15 Ω und einer Standardabweichung $s = 5{,}249\ \Omega$. Aus dem Datensatz kann unter Annahme einer Normalverteilung das Prognoseintervall für zukünftige Widerstandswerte berechnet werden. Das Vorhersageintervall für künftige Beobachtungen bei einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ_2 berechnet sich zu

$$PR\left\{\overline{R} + c_1 s\sqrt{1+\frac{1}{n}} \le R_{n+1} \le \overline{R} + c_2 s\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right\}. \qquad (4.15)$$

wobei sich die Konstanten c_1 und c_2 aus der inversen t-Verteilung mit n - 1 Freiheitsgraden bei einer Konfidenzzahl γ ergeben.

2020-04-06 - SOCOS

Für eine Konfidenzzahl γ = 99,73 % ergibt sich bei einem Stichprobenumfang von n = 1000 eine Toleranz von

$$T_{U,MC1} = c_2 s\sqrt{1+\frac{1}{n}} - c_1 s\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 31{,}592\Omega\,. \tag{4.16}$$

Der Wert entspricht weitgehend dem Wert der statistischen Toleranzberechnung über das Fehlerfortpflanzungsgesetz.

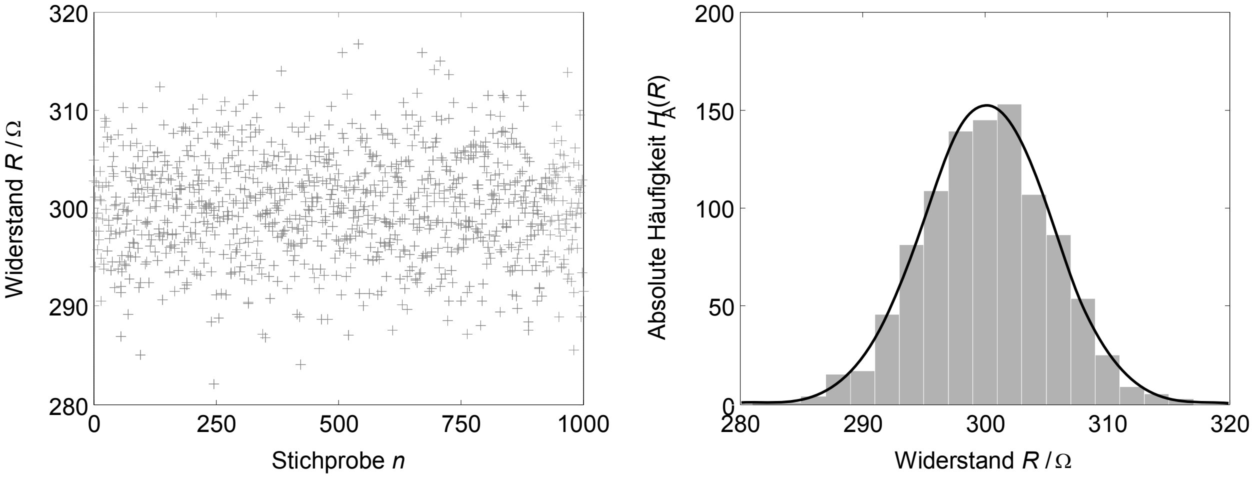


Bild 4.6: Bestimmung des Gesamtwiderstandes als Monte-Carlo-Simulation

Die Monte-Carlo-Simulation wird solange durchgeführt, bis die Aussagesicherheit ausreichend groß ist. Um die Simulationszeit klein zu halten, ist es erforderlich, den notwendigen Stichprobenumfang abzuschätzen. Dabei muss unterschieden werden, ob die Verteilung der Einzelmerkmale als normalverteilt angesehen werden kann oder nicht.

4.1.4.1. Abschätzung des Stichprobenumfangs bei Normalverteilung des Gesamtmerkmals

Bei normalverteilten Einzelmerkmalen kann der notwendige Stichprobenumfang aus dem Verhältnis der Standardabweichung und dem Konfidenzbereich der Standardabweichung abgeleitet werden. Mit steigendem Stichprobenumfang sinkt die Breite des Konfidenzintervalls der Standardabweichung. Die Standardabweichung des Gesamtmerkmals wird dagegen von der Streuung der beteiligten Einzelmerkmale bestimmt und bleibt weitgehend konstant. Ist der Konfidenzbereich der Standardabweichung eine Größenordnung kleiner als die Standardabweichung des Gesamtmerkmals, kann die Simulation gestoppt werden.

BEISPIEL:

Bild 4.6 zeigt, dass der Gesamtwiderstand näherungsweise normalverteilt ist. Mit Hilfe eines Hypothesentests kann außerdem gezeigt werden, dass die Annahme einer Normalverteilung zumindest nicht verworfen werden muss. Damit kann der Konfidenzbereich der Standardabweichung über die Chi^2-Verteilung mit n - 1 Freiheitsgraden abgeschätzt werden. Das Konfidenzintervall ergibt sich zu

$$KONF\left\{\frac{s^2(n-1)}{c_1} \geq \sigma^2 \geq \frac{s^2(n-1)}{c_2}\right\}, \tag{4.17}$$

wobei sich die Konstanten c_1 und c_2 aus der inversen Chi^2-Verteilung (F^{-1}) mit n - 1 Freiheitsgraden berechnen zu

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right),\; c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right). \tag{4.18}$$

Mit steigendem Stichprobenumfang sinkt wegen der Konstanten c_1 und c_2 die Breite des Konfidenzintervalls. Die Standardabweichung des Gesamtwiderstandes R wird dagegen von der Streuung der beteiligten

2020-04-06 - SOCOS

Bauelemente bestimmt und bleibt weitgehend konstant. Bild 4.7 zeigt diese Größen als Funktion des Stichprobenumfangs.

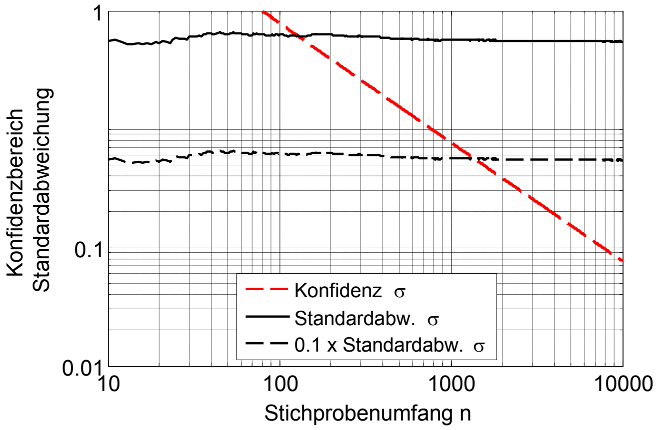


Bild 4.7: Darstellung der Standardabweichung und der Breite des Konfidenzintervalls für den Gesamtwiderstand als Funktion des Stichprobenumfangs *n*

Die Breite des Konfidenzintervalls muss nicht stetig sinken. Einige Extremwerte können zunächst zu einem Anstieg der Standardabweichung führen und damit zu einem Anstieg der Breite des Konfidenzintervalls. Mit steigendem Stichprobenumfang ist aber eine Abnahme der Breite des Konfidenzintervalls zu erwarten. In diesem Beispiel ist bei einem Stichprobenumfang von n = 1310 die Breite des Konfidenzbereiches der Standardabweichung kleiner als 10 % der Standardabweichung. Die Simulation kann also bei n = 1310 abgebrochen werden.

4.1.4.2. Abschätzung des Stichprobenumfangs für Gesamtmerkmale mit beliebiger Verteilung

Vorteil des Monte-Carlo-Verfahrens ist, dass es auch bei extrem nichtlinearen Verhalten und beliebigen Verteilungen eingesetzt werden kann. Unter diesen Bedingungen sind allerdings nicht unbedingt normalverteilte Gesamtmerkmale zu erwarten. In diesem Fall muss die Toleranz numerisch über die approximierte Verteilungsfunktion des Gesamtmerkmals bestimmt werden. Der Konfidenzbereich ergibt sich damit aus dem unteren und oberen Grenzwert

$$y_{\min} = F^{-1}\left(\frac{1}{2}(1-\gamma)\right),\; y_{\max} = F^{-1}\left(\frac{1}{2}(1+\gamma)\right), \qquad (4.19)$$

mit der Konfidenz γ und F^{-1} - die numerisch bestimmte, inverse Verteilungsfunktion. Die Auflösung der Verteilungsfunktion ΔP ergibt sich direkt aus der Anzahl durchgeführter Simulationen zu

$$\Delta P = \frac{1}{n}. \qquad (4.20)$$

Daraus resultiert einer der Nachteile dieses Verfahrens, nämlich der hohe Rechenaufwand zur Generierung der Datensätze. Um eine Aussage zu einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 1 ppm machen zu können, müssen wenigstens eine Millionen Rechnungen durchgeführt werden.

BEISPIEL:

Für einen Spannungsteiler wird der Toleranzbereich der Ausgangsspannung über die numerisch bestimmte Verteilungsfunktion berechnet. Die Auflösung der Verteilungsfunktion ΔP soll 10 % des unteren Grenzwertes betragen, der sich bei einer Sicherheit von $\pm 3\sigma$ ergibt:

$$\Delta P = \frac{1}{10}\cdot\frac{1-\gamma}{2} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1-0{,}9973}{2} = 1{,}35E-4\,. \qquad (4.21)$$

Es ergibt sich ein Simulationsumfang von

$$n = \frac{1}{\Delta P} = \frac{1}{1{,}35E-4} = 7407\,. \qquad (4.22)$$

2020-04-06 - SOCOS

4.2. Anwendung bei nichtlinearen, unkorrelierten Merkmalsketten

Für die statistische Toleranzrechnung nichtlinearer Merkmalsketten stehen zwei unterschiedliche Verfahren zur Verfügung.

- Linearisierung der Merkmalskette über totales Differential, sowie
- nichtlineare Toleranzsimulation (Monte-Carlo-Simulation).

Beide Verfahren werden im Folgenden vorgestellt und an einem Beispiel illustriert.

4.2.1. Linearisierung nichtlinearer Merkmalsketten

Eine Funktion mehrerer Merkmale x_i hat allgemein die Form

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \tag{4.23}$$

Die Funktion kann in eine Taylor-Reihe um den Punkt $\mathbf{x}_0$ entwickelt werden. Wird die Taylor-Reihe nach dem linearen Glied abgebrochen, ergibt sich das totale Differential

$$\begin{aligned}\Delta z &\approx \left.\frac{\partial z}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}_0} \Delta x_1 + \left.\frac{\partial z}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}_0} \Delta x_2 + \ldots + \left.\frac{\partial z}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}_0} \Delta x_n = E_{x1}\Delta x_1 + E_{x2}\Delta x_2 + \ldots + E_{xn}\Delta x_n \\ &= \Delta z_1 + \Delta z_2 + \ldots + \Delta z_n\end{aligned} \tag{4.24}$$

Mit dieser Vorgehensweise wird das Problem linearisiert: aus dem nichtlinearen Zusammenhang nach Gl. 4.23 wird eine lineare Merkmalskette abgeleitet, bei der sich die einzelnen Summanden Δz_i ergeben aus

$$\Delta z_i = E_{xi}\Delta x_i\,. \tag{4.25}$$

Nach dieser Umformung können die im vorherigen Abschnitt dargestellten Methoden zur Toleranzrechnung verwendet werden. Insbesondere ergibt sich für die Varianz des Gesamtmerkmals der Ausdruck

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{zi}^2 = \sum_{i=1}^{n} E_{xi}^2 \sigma_{xi}^2 = E_{x1}^2\sigma_{x1}^2 + E_{x2}^2\sigma_{x2}^2 + \ldots + E_{xn}^2\sigma_{xn}^2\,. \tag{4.26}$$

Im Fall identischer Erweiterungsfaktoren kann die Toleranz des Gesamtmerkmals bestimmt werden zu

$$T_z^2 = \sum_{i=1}^{n} E_{xi}^2 T_{xi}^2 = E_{x1}^2 T_{x1}^2 + E_{x2}^2 T_{x2}^2 + \ldots + E_{xn}^2 T_{xn}^2\,. \tag{4.27}$$

BEISPIEL:

Ein Spannungsteiler mit den Widerständen R_1 und R_2 wird von einer Quellenspannung U_{ref} versorgt.

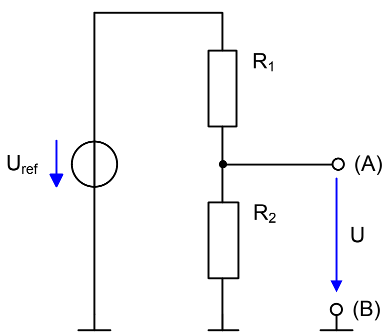


Bild 4.8: Spannungsteiler als elektrotechnisches Beispiel zur Toleranzrechnung

2020-04-06 - SOCOS

Die Ausgangspannung U berechnet sich nach der Spannungsteiler-Regel aus den Größen R_1, R_2 und U_{ref} zu

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{ref} \; . \tag{4.28}$$

Ähnlich wie bei dem Abstand der Bohrungen voneinander kann die Toleranz der Ausgangsspannung über das vollständige Differential abgeschätzt werden zu

$$\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial R_1}\Delta R_1 + \frac{\partial U}{\partial R_2}\Delta R_2 + \frac{\partial U}{\partial U_{ref}}\Delta U_{ref} \; . \tag{4.29}$$

Dabei berechnet sich die Empfindlichkeit, mit der sich z.B. die Widerstandsänderung ΔR_1 auf die Änderung der Ausgangsspannung auswirkt, zu

$$E_{R1} = \frac{\partial U}{\partial R_1} = \frac{-R_2 U_{ref}}{(R_1 + R_2)^2} \; . \tag{4.30}$$

Die Einheit der Empfindlichkeit ist V/Ω. Die Empfindlichkeit rechnet demnach eine Toleranz des Merkmals R_1 in Ohm in eine Toleranz des Gesamtmerkmals U in Volt um. Analog ergibt sich

$$E_{R2} = \frac{\partial U}{\partial R_2} = \frac{R_1 U_{ref}}{(R_1 + R_2)^2} \tag{4.31}$$

und

$$E_{Uref} = \frac{\partial U}{\partial U_{ref}} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \; . \tag{4.32}$$

Zur Berechnung der Gesamttoleranz müssen die Einzeltoleranzen überlagert werden

$$\Delta U = \Delta U_{R1} + \Delta U_{R2} + \Delta U_{Uref} = E_{R1}\Delta R_1 + E_{R2}\Delta R_2 + E_{Uref}\Delta R_{Uref} \; . \tag{4.33}$$

Alle Zufallsvariablen ΔU_i haben dieselbe Einheit, die Aufgabenstellung wird damit auf eine lineare Merkmalskette zurückgeführt.

Für das Beispiel soll davon ausgegangen werden, dass die Widerstände eine Normalverteilung mit einem Mittelwert von R_0 = 100 Ω und einer Standardabweichung von σ_R = 1 Ω besitzen. Die Spannungsquelle soll eine Gleichverteilung zwischen 4,975 und 5,025 V aufweisen, sie besitzt damit eine äquivalente Standardabweichung von σ_{Uref} = 0,0144 V. Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich die Varianz des Gesamtmerkmals aus der Summe der Varianzen der Einzeltoleranzen. In diesem Fall ergibt sich

$$\sigma_U^2 = \sigma_{UR1}^2 + \sigma_{UR2}^2 + \sigma_{UUref}^2 = E_{R1}^2\sigma_{R1}^2 + E_{R2}^2\sigma_{R2}^2 + E_{Uref}^2\sigma_{Uref}^2 \; . \tag{4.34}$$

Damit ergibt sich eine Standardabweichung der Ausgangsspannung U von

$$\sigma = \sqrt{E_{R1}^2\sigma_{R1}^2 + E_{R2}^2\sigma_{R2}^2 + E_{Uref}^2\sigma_{Uref}^2} = 0{,}0191V \; , \tag{4.35}$$

sowie ein Toleranzbereich $\pm 3\sigma$ von

$$T_G = 6\sigma_U = 0{,}1146V \; .$$

(4.36)

4.2.2. Statistische Toleranzsimulation nichtlinearer Merkmalsketten

Die statistische Toleranzsimulation nichtlinearer Tolerierungsaufgaben unterscheidet sich nicht von der statistischen Toleranzsimulation linearer Tolerierungsaufgaben. Die statistische Toleranzsimulation hat den Vorteil, dass sie die Nichtlinearität exakt abbildet und die Toleranzrechnung nicht über eine Linearisierung im Arbeitspunkt nähert.

BEISPIEL:

Zur Veranschaulichung der Monte-Carlo-Simulation wird das Beispiel des Spannungsteilers aufgegriffen. Die Widerstände besitzen eine Normalverteilung mit Mittelwert R_0 = 100 Ω und einer Standardabweichung

2020-04-06 - SOCOS

2020-04-06 - SOCOS

von σ_R = 1 Ω. Die Spannungsquelle weist eine Gleichverteilung zwischen 4.975 und 5.025 V auf. Die Verteilungen werden bei der Generierung von Zufallszahlen berücksichtigt. Anschließend wird für jede Gruppe von Zufallszahlen die zugehörige Ausgangsspannung berechnet und das Ergebnis statistisch ausgewertet. Die Simulation kann z.B. mit einem MATLAB-Programm realisiert werden.

Das folgende Bild zeigt das Ergebnis einer Monte-Carlo-Simulation für die Ausgangsspannung des Spannungsteilers.

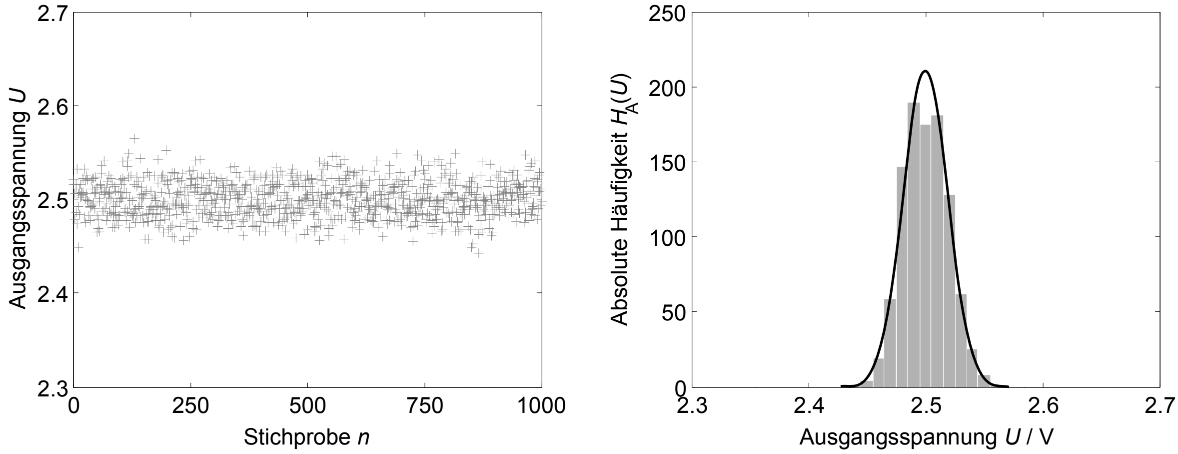


Bild 4.9: Bestimmung der Ausgangsspannung über eine Monte-Carlo-Simulation

Das Ergebnis zeigt in erster Näherung eine Normalverteilung mit einem Mittelwert von 2,5 V und einer Standardabweichung s = 0,0188 V. Aus dem Datensatz kann unter Annahme einer Normalverteilung das Prognoseintervall für zukünftige Ausgangspannungen berechnet werden. Das Prognoseintervall für künftige Beobachtungen bei einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 berechnet sich zu

$$PR\left\{\bar{x} + c_1 s\sqrt{1+\frac{1}{n}} \le x_{n+1} \le \bar{x} + c_2 s\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right\}, \tag{4.37}$$

wobei sich die Konstanten c_1 und c_2 aus der inversen t-Verteilung mit n - 1 Freiheitsgraden bei einer Konfidenzzahl γ ergeben. Für eine Konfidenzzahl γ = 99,73 % ergibt sich bei einem Stichprobenumfang von n = 1000 ein Toleranzbereich von

$$T_{U,MC1} = c_2 s\sqrt{1+\frac{1}{n}} - c_1 s\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 0{,}1134V\,. \tag{4.38}$$

Der Wert entspricht weitgehend dem Wert der statistischen Toleranzberechnung über das Fehlerfortpflanzungsgesetz.

4.3. Landkarte zur Toleranzrechnung bei unkorrelierten Einzelmerkmalen

In den Abschnitten 4.1 und 4.2 sind unterschiedliche Methoden zur statistischen Toleranzrechnung dargestellt. Der Zusammenhang zwischen den Verfahren ist im nachfolgenden Bild zusammengefasst.

Lineare Merkmalsketten können arithmetisch oder statistisch toleriert werden. Eine statistische Tolerierung ist bei normalverteilten Einzelmerkmalen besonders anschaulich und übersichtlich, es werden einfach die Varianzen der Einzelmerkmale zur Varianz des Gesamtmerkmals addiert. Dieses Verfahren kann auch angewendet werden, wenn eine ausreichende Zahl ($N \geq 4$) von Einzelmerkmalen mit beliebiger symmetrischer Verteilung vorliegt. Da das Gesamtmerkmal nur asymptotisch normalverteilt ist, ist diese Rechnung eine Näherung. Die exakte Verteilung des Gesamtmerkmals kann alternativ über die Faltung der Wahrscheinlichkeitsdichten der Einzelmerkmale berechnet werden. Dieses Verfahren ist präzise, die Berechnung erfordert jedoch spezielle Programme. Bei statistischen Simulationen (Monte-Carlo-Simulation) wird die Verteilungsfunktion des Gesamtmerkmals über numerische Simulation bestimmt.

Liegt eine nichtlineare Merkmalskette vor, kann sie linearisiert und anschließend wie eine lineare Merkmalskette behandelt werden. Die Linearisierung wird jedoch bei Systemen mit mehreren Einzelmerkmalen aufwändig. Alternativ kann eine statistische Simulation (Monte-Carlo-Simulation) durchgeführt werden.

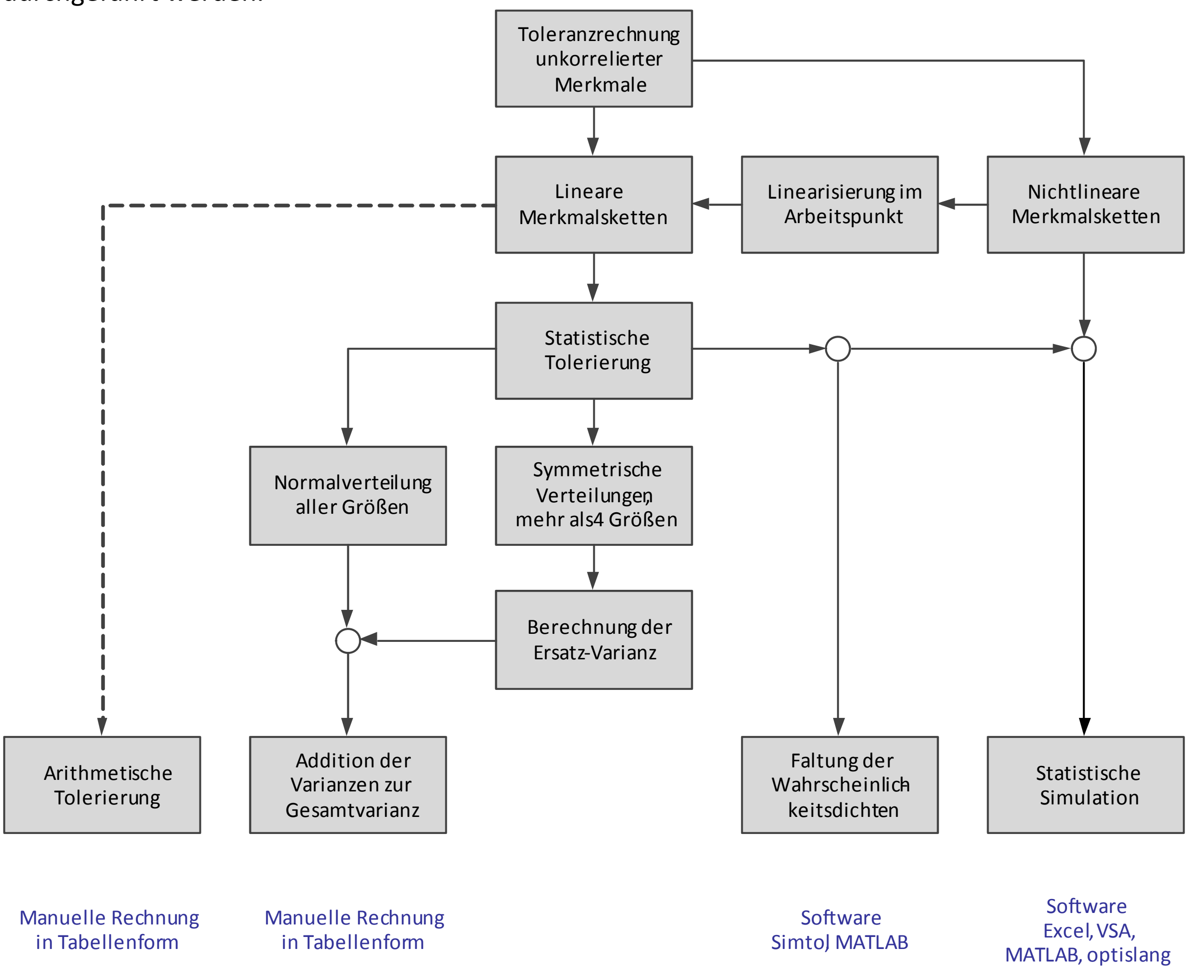


Bild 4.10: Verfahren der Toleranzrechnung bei unkorrelierten Einzelmerkmalen

2020-04-06 - SOCOS

5. Softwaretools

Wie in Bild 4.10 dargestellt, gibt es verschiedene Softwaretools, um Toleranzanalysen durchzuführen. Im Folgenden soll die prinzipielle Vorgehensweise bei der Anwendung dieser Tools vorgestellt werden.

5.1. Excel

Arithmetische und lineare statistische Toleranzanalysen lassen sich durch einfache Verkettung der Tabellenfelder durchführen. Entsprechende Vorlagen gibt es in praktisch allen Geschäftsbereichen.

Auch statistische Toleranzsimulationen nach der Monte-Carlo-Methode können in Excel durchgeführt werden. Dabei wird jedem Einzelmerkmal eine Spalte zugeordnet. In dieser Spalte werden Zufallszahlen in Abhängigkeit von Nominalwert und Verteilung des Merkmals ermittelt. In jeder Zeile wird über die Merkmalskette das zufällige Gesamtmerkmal bestimmt. Damit entspricht eine Excel-Zeile einem Simulationsschritt der Monte-Carlo-Simulation.

Ein dokumentiertes Beispiel für das verteilungsabhängige Ermitteln von Zufallszahlen ist im Intranet zu finden unter
https://inside-ws.bosch.com/FIRSTspiritWeb/permlink/wcms_corpfunc_-Statistical_Methods-DE.

5.2. CAD-gestützte 3D-Toleranzanalyse

Für die Toleranzanalyse mechanischer Baugruppen gibt es mehrere kommerzielle Softwaretools, die direkt auf den 3D-Konstruktionsdaten aufsetzen. Bei Bosch als Vorzugslinie festgelegt ist derzeit die Software eM-TolMate, die innerhalb der CAD-Programme Catia V5, ProE Wildfire und UG NX als Zusatzapplikation läuft. Zukünftiges Vorzugstool wird die Software Variation Analysis (VSA) sein, die innerhalb des 3D-Viewers Teamcenter Visualization (TCV) arbeitet. Diese Tools arbeiten intern mit Monte-Carlo-Simulation.

Im Gegensatz zu den bisher genannten Verfahren zur Toleranzanalyse wird bei der CAD-gestützten Toleranzanalyse nicht die Maßkette vorgegeben, sondern sie wird innerhalb der Software aus den Verknüpfungen von Geometrieelementen ermittelt. Für den Aufbau des Simulationsmodells sind 4 Schritte notwendig:

1. Definition der Toleranzfeatures: Für jedes Bauteil werden die Geometrieelemente definiert, die einen Einfluss auf die Maßkette haben. Dazu gehören Flächen (Ebenen, Zylinder, Freiformflächen, ...), Kanten, Achsen und Punkte, die für die Ausrichtung von Nachbarbauteilen verantwortlich sind oder das Schließmaß begrenzen oder als Bezugselement für Lagetoleranzen dienen.
2. Toleranzdefinition: Jedem Toleranzfeature werden die Maß-, Form- und Lagetoleranzen zugewiesen. Zu jeder Toleranz wird eine statistische Verteilung hinterlegt.
3. Definition der Fügebedingungen: Die einzelnen Komponenten einer Baugruppe werden der Reihe nach aneinander ausgerichtet. Dabei spielt die Reihenfolge der Verknüpfungen eine große Rolle, denn so können unterschiedliche Maßketten entstehen. Montagebedingungen, wie das zufällige Ausnutzen von Spiel zwischen Welle und Bohrung lassen sich berücksichtigen.
4. Definition der Messungen: Innerhalb des Simulationsmodells gibt es nicht nur ein Schließmaß, sondern es können nahezu beliebig viele geometrische Messungen (Abstände, Spalte, Winkel, resultierende Durchmesser) als Schließmaße definiert werden.

Als Ergebnis der Toleranzanalyse erhält man für jedes Schließmaß die ermittelte statistische Verteilung, die nicht unbedingt normalverteilt sein muss. Dazu gehören Angaben wie Mittelwert, Standardabweichung, erwartete Ausschussanteile und Prozessfähigkeit. Außerdem lässt sich in einer

2020-04-06 - SOCOS

zusätzlichen Simulation ermitteln, wie groß der prozentuale Anteil jeder einzelnen Toleranz an der Verteilung des Schließmaßes ist (Pareto-Analyse für Beitragsleister).

5.3. Simtol

Das Programm Simtol führt Toleranzrechnungen für lineare und linearisierte Merkmalsketten unkorrelierter Einzelmerkmale durch. Es können sowohl arithmetische, als auch statistische Tolerierungen vorgenommen werden.

Basis für die Toleranzrechnung ist eine tabellarische Darstellung der Merkmalskette, die vom Benutzer eingegeben wird. Die Tabelle beinhaltet im Wesentlichen den Nennwert und die Wahrscheinlichkeitsdichten der Einzelmerkmale, ihre Toleranzen und Empfindlichkeiten. Dabei können unterschiedliche Verteilungsmodelle ausgewählt und parametrisiert werden.

Simtol berechnet die Toleranz des Gesamtmerkmals auf Basis von numerischen Faltungsoperationen und gibt seine Wahrscheinlichkeitsdichte grafisch aus. Das Ergebnis kann unter anderem hinsichtlich Prozessfähigkeit und Einfluss der unterschiedlichen Beitragsleister analysiert werden.

Das Programm eignet sich damit bei übersichtlichen Tolerierungsaufgaben gut für eine schnelle und übersichtliche Tolerierung im Entwicklungsprozess.

5.4. MATLAB

MATLAB ist eine kommerzielle Software zur Lösung mathematischer Aufgabenstellungen und zur grafischen Darstellung. MATLAB wird in Entwicklungsabteilungen insbesondere eingesetzt, um dynamische Vorgänge und Algorithmen der Signalverarbeitung zu simulieren.

Mit der Statistics Toolbox bietet MATLAB umfangreiche Befehle zur statistischen Rechnung und Simulation. Auf Basis dieser Befehle können Verfahren zur arithmetischen und statistischen Tolerierung linearer und nichtlinearer Merkmalsketten implementiert werden, dazu zählen auch statistische Simulationen und umfangreiche Auswertemöglichkeiten.

Da für die Programmierung in MATLAB umfangreiches Fachwissen erforderlich ist, werden statistische Simulationen und Auswertungen insbesondere dann vorgenommen, wenn die zugrundeliegende Aufgabenstellung ohnehin in MATLAB berechnet wird.

2020-04-06 - SOCOS

2020-04-06 - SOCOS

6. Anhang

6.1. Die Normalverteilung

Übungsaufgabe:

Zum Serienanlauf werden Relais erprobt. Ein funktionsentscheidendes Merkmal ist die sogenannte Anzugsspannung. An 50 Relais wurden die nachfolgenden Werte der Anzugsspannung U_{an} in Volt gemessen.

6,2	6,5	6,1	6,3	5,9	6,0	6,0	6,3	6,2	6,4
6,5	5,5	5,7	6,2	5,9	6,5	6,1	6,6	6,1	6,8
6,2	6,4	5,8	5,6	6,2	6,1	5,8	5,9	6,0	6,1
6,0	5,7	6,5	6,2	5,6	6,4	6,1	6,3	6,1	6,6
6,4	6,3	6,7	5,9	6,6	6,3	6,0	6,0	5,8	6,2

a) Berechnen Sie $\overline{x}$ und s mit dem Taschenrechner!

b) Der Kunde fordert $U_{an} = 6{,}8V$. Schätzen Sie den Anteil der Relais, die die Kundenforderung nicht erfüllen (Überschreitungsanteil)!

c) Welcher Wert der Anzugsspannung wird von höchstens 0,1% aller gefertigten Relais überschritten?

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Größen $\overline{x}$, s und dem oberen Grenzwert $OGW = 6{,}8V$ den C_{pk}-Wert der Fertigung!

<u>Lösung:</u>

zu a) Mittelwert $\overline{x} = 6{,}15$, Standardabweichung $s = 0{,}2998 \approx 0{,}3$

zu b) Einsetzen in die Transformationsgleichung ergibt

$u = \frac{6{,}8 - 6{,}15}{0{,}3} = 2{,}17$. Tabellenwert $\Phi(2{,}17) = 0{,}985$, Überschreitungsanteil $p = 1 - 0{,}985 = 1{,}5\%$.

zu c) $p = 1 - \Phi(u) = 0{,}1\%$ oder: $\Phi(u) = 0{,}999$.

Aus der Tabelle das u ablesen, bei dem $\Phi(u)$ dem Wert 0,999 möglichst nahe kommt.

Abgelesen: u = 3,09.

Löst man die Gleichung $u = \frac{x - \overline{x}}{s}$ nach x auf und setzt die Werte ein, so ergibt sich:

$x = \overline{x} + us = 6{,}15 + 3{,}09 \cdot 0{,}3 \approx 7{,}1$.

Höchstens 0,1% aller Relais wird eine Anzugsspannung größer 7,1V aufweisen.

zu d) $C_{pk} = \frac{OGW - \overline{x}}{3s} = \frac{6{,}8 - 6{,}15}{3 \cdot 0{,}3} \approx 0{,}7$

© Robert Bosch GmbH | Stand 05.2013

6.2. Das Wahrscheinlichkeitsnetz

Wenn von einer Normalverteilung die Rede ist, assoziiert man diesen Begriff meist mit der Gauß'schen Glockenkurve. Die Gauß'sche Glockenkurve (zu Ehren des Mathematikers Carl Friedrich Gauß) ist eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte *f*(*x*) der Normalverteilung:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} . \tag{6.1}$$

Die Normalverteilung gibt zu jedem Wert *x* die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine Zufallsvariable *X* einen Wert zwischen -∞ und *x* annimmt. Man erhält die Verteilungsfunktion *Φ*(*x*) der Normalverteilung, indem man über die oben angegebene Wahrscheinlichkeitsdichte integriert:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2}dv . \tag{6.2}$$

Φ(*x*) entspricht der Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve bis zum Wert *x*.

Die graphische Darstellung dieser Funktion hat einen s-förmigen Verlauf. Streng genommen müsste man also stets an diese Kurve denken, wenn von einer Normalverteilung die Rede ist.

Verzerrt man nun die y-Achse in dieser Darstellung derart, dass aus der s-förmigen Kurve eine Gerade wird, so ergibt sich ein neues Koordinatensystem, das Wahrscheinlichkeitsnetz. Die x-Achse bleibt dabei unverändert.

Aufgrund dieses Zusammenhangs ergibt eine Darstellung einer Normalverteilung in diesem neuen Koordinatensystem, dem Wahrscheinlichkeitsnetz, also stets eine Gerade.

Man macht sich diesen Sachverhalt zunutze, um einen gegebenen Datensatz graphisch auf Normalverteilung zu prüfen. Sofern die Anzahl der gegebenen Messwerte groß genug ist, erstellt man dazu ein Histogramm dieser Werte, bestimmt also die relativen Häufigkeiten von Werten innerhalb der Klassen einer Klasseneinteilung. Trägt man nun die gefundenen relativen Summenhäufigkeiten über der rechten Klassengrenze im Wahrscheinlichkeitsnetz auf und ergibt sich dabei eine Folge von Punkten, die näherungsweise auf einer Geraden liegen, so kann man daraus schließen, dass die Werte des Datensatzes näherungsweise normalverteilt sind.

6.3. Die Standardnormalverteilung

Eine normalverteilte Zufallsgröße *x* mit Mittelwert *μ* und Standardabweichung *σ* wird durch die Transformation

$$u=\frac{x-\mu}{\sigma} \tag{6.3}$$

in eine ebenfalls normalverteilte Zufallsgröße *u* überführt. Der Mittelwert von *u* ist null, ihre Standardabweichung ist eins. Diese spezielle Normalverteilung heißt Standardnormalverteilung und wird mit *N*(0,1) bezeichnet.

Dieser Sachverhalt wird durch nachstehende Abbildung verdeutlicht. Hier ist μ = 23,8 und σ = 0,5. In diesem Beispiel ergibt sich

$$u=\frac{25-23{,}8}{0{,}5}=2{,}4 .$$

Die Verteilungsfunktion *Φ*(*u*) gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsgröße *u* einen Wert zwischen -∞ und *u* annimmt. *Φ*(*u*) entspricht dem Flächenanteil unter der Gauß'schen Glockenkurve bis zum Wert *u*. Die Gesamtfläche unter der Glockenkurve hat den Wert eins.

2020-04-06 - SOCOS

2020-04-06 - SOCOS

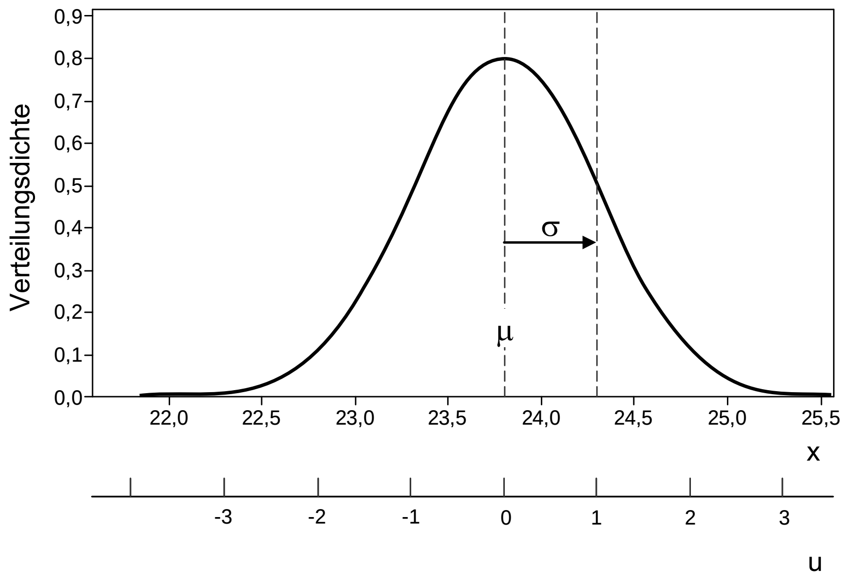


Bild 6.1: Standardnormalverteilung

Die Werte für $\Phi(u)$ können der Tabelle entnommen werden. Man findet z.B. $\Phi(2{,}4) = 0{,}9918$. Der Anteil aller x, die größer sind als 25, entspricht dem Anteil aller u, die den Wert $u = 2{,}4$ überschreiten. Er ist demnach $1 - 0{,}9918 \approx 0{,}8\%$.

Die folgenden Darstellungen zeigen einige Beispiele, aus denen die Bedeutung der Bezeichnungen und der Tabellenwerte ersichtlich sind.

Man beachte, dass $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$, $D(u) = \Phi(u) - \Phi(-u)$.

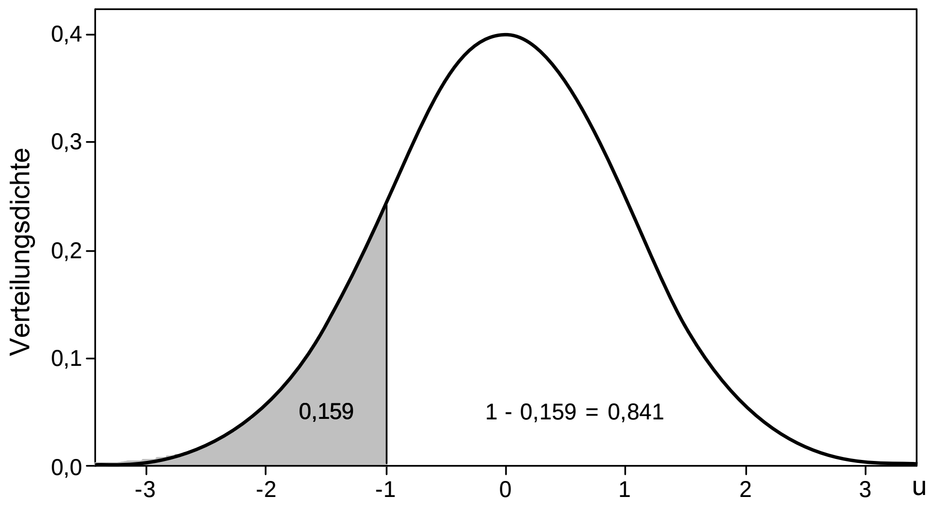


Bild 6.2: Standardnormalverteilung mit Überschreitungsanteil 84,1% (einseitig)

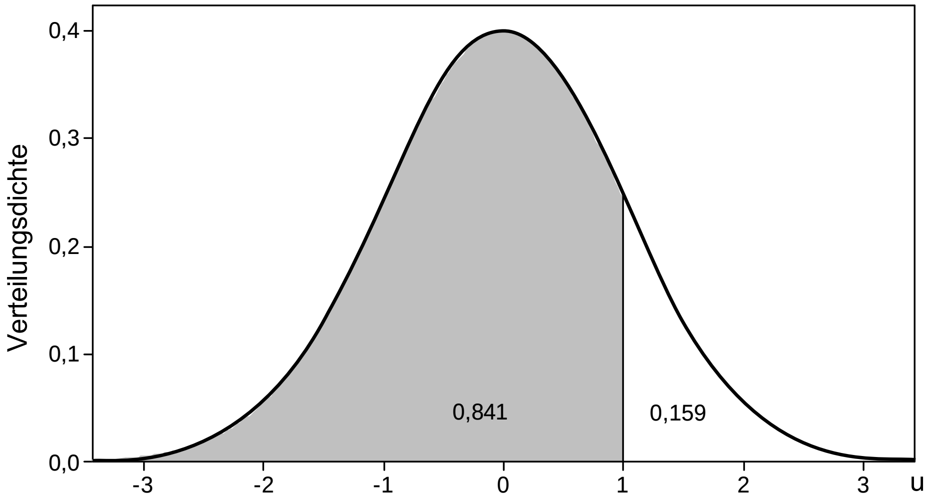


Bild 6.3: Standardnormalverteilung mit Überschreitungsanteil 15,9% (einseitig)

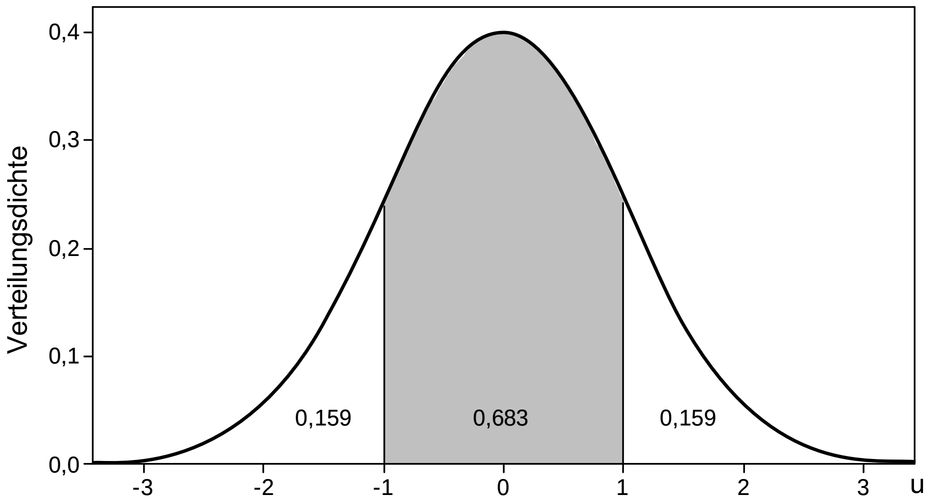


Bild 6.4: Standardnormalverteilung mit Überschreitungsanteil 31,8% (zweiseitig)

2020-04-06 - SOCOS

u	Φ(-u)	Φ(u)	D(u)
0,01	0,496011	0,503989	0,007979
0,02	0,492022	0,507978	0,015957
0,03	0,488034	0,511966	0,023933
0,04	0,484047	0,515953	0,031907
0,05	0,480061	0,519939	0,039878
0,06	0,476078	0,523922	0,047844
0,07	0,472097	0,527903	0,055806
0,08	0,468119	0,531881	0,063763
0,09	0,464144	0,535856	0,071713
0,10	0,460172	0,539828	0,079656
0,11	0,456205	0,543795	0,087591
0,12	0,452242	0,547758	0,095517
0,13	0,448283	0,551717	0,103434
0,14	0,444330	0,555670	0,111340
0,15	0,440382	0,559618	0,119235
0,16	0,436441	0,563559	0,127119
0,17	0,432505	0,567495	0,134990
0,18	0,428576	0,571424	0,142847
0,19	0,424655	0,575345	0,150691
0,20	0,420740	0,579260	0,158519
0,21	0,416834	0,583166	0,166332
0,22	0,412936	0,587064	0,174129
0,23	0,409046	0,590954	0,181908
0,24	0,405165	0,594835	0,189670
0,25	0,401294	0,598706	0,197413
0,26	0,397432	0,602568	0,205136
0,27	0,393580	0,606420	0,212840
0,28	0,389739	0,610261	0,220522
0,29	0,385908	0,614092	0,228184
0,30	0,382089	0,617911	0,235823
0,31	0,378280	0,621720	0,243439
0,32	0,374484	0,625516	0,251032
0,33	0,370700	0,629300	0,258600
0,34	0,366928	0,633072	0,266143
0,35	0,363169	0,636831	0,273661
0,36	0,359424	0,640576	0,281153
0,37	0,355691	0,644309	0,288618
0,38	0,351973	0,648027	0,296055
0,39	0,348268	0,651732	0,303463
0,40	0,344578	0,655422	0,310843
0,41	0,340903	0,659097	0,318194
0,42	0,337243	0,662757	0,325515
0,43	0,333598	0,666402	0,332804
0,44	0,329969	0,670031	0,340063
0,45	0,326355	0,673645	0,347290
0,46	0,322758	0,677242	0,354484
0,47	0,319178	0,680822	0,361645
0,48	0,315614	0,684386	0,368773
0,49	0,312067	0,687933	0,375866
0,50	0,308538	0,691462	0,382925

u	Φ(-u)	Φ(u)	D(u)
0,51	0,305026	0,694974	0,389949
0,52	0,301532	0,698468	0,396936
0,53	0,298056	0,701944	0,403888
0,54	0,294599	0,705401	0,410803
0,55	0,291160	0,708840	0,417681
0,56	0,287740	0,712260	0,424521
0,57	0,284339	0,715661	0,431322
0,58	0,280957	0,719043	0,438085
0,59	0,277595	0,722405	0,444809
0,60	0,274253	0,725747	0,451494
0,61	0,270931	0,729069	0,458138
0,62	0,267629	0,732371	0,464742
0,63	0,264347	0,735653	0,471305
0,64	0,261086	0,738914	0,477827
0,65	0,257846	0,742154	0,484308
0,66	0,254627	0,745373	0,490746
0,67	0,251429	0,748571	0,497142
0,68	0,248252	0,751748	0,503496
0,69	0,245097	0,754903	0,509806
0,70	0,241964	0,758036	0,516073
0,71	0,238852	0,761148	0,522296
0,72	0,235762	0,764238	0,528475
0,73	0,232695	0,767305	0,534610
0,74	0,229650	0,770350	0,540700
0,75	0,226627	0,773373	0,546745
0,76	0,223627	0,776373	0,552745
0,77	0,220650	0,779350	0,558700
0,78	0,217695	0,782305	0,564609
0,79	0,214764	0,785236	0,570472
0,80	0,211855	0,788145	0,576289
0,81	0,208970	0,791030	0,582060
0,82	0,206108	0,793892	0,587784
0,83	0,203269	0,796731	0,593461
0,84	0,200454	0,799546	0,599092
0,85	0,197663	0,802337	0,604675
0,86	0,194895	0,805105	0,610211
0,87	0,192150	0,807850	0,615700
0,88	0,189430	0,810570	0,621141
0,89	0,186733	0,813267	0,626534
0,90	0,184060	0,815940	0,631880
0,91	0,181411	0,818589	0,637177
0,92	0,178786	0,821214	0,642427
0,93	0,176186	0,823814	0,647629
0,94	0,173609	0,826391	0,652782
0,95	0,171056	0,828944	0,657888
0,96	0,168528	0,831472	0,662945
0,97	0,166023	0,833977	0,667954
0,98	0,163543	0,836457	0,672914
0,99	0,161087	0,838913	0,677826
1,00	0,158655	0,841345	0,682689

2020-04-06 - SOCOS

2020-04-06 - SOCOS

u	Φ(-u)	Φ(u)	D(u)
1,01	0,156248	0,843752	0,687505
1,02	0,153864	0,846136	0,692272
1,03	0,151505	0,848495	0,696990
1,04	0,149170	0,850830	0,701660
1,05	0,146859	0,853141	0,706282
1,06	0,144572	0,855428	0,710855
1,07	0,142310	0,857690	0,715381
1,08	0,140071	0,859929	0,719858
1,09	0,137857	0,862143	0,724287
1,10	0,135666	0,864334	0,728668
1,11	0,133500	0,866500	0,733001
1,12	0,131357	0,868643	0,737286
1,13	0,129238	0,870762	0,741524
1,14	0,127143	0,872857	0,745714
1,15	0,125072	0,874928	0,749856
1,16	0,123024	0,876976	0,753951
1,17	0,121000	0,879000	0,757999
1,18	0,119000	0,881000	0,762000
1,19	0,117023	0,882977	0,765954
1,20	0,115070	0,884930	0,769861
1,21	0,113139	0,886861	0,773721
1,22	0,111232	0,888768	0,777535
1,23	0,109349	0,890651	0,781303
1,24	0,107488	0,892512	0,785025
1,25	0,105650	0,894350	0,788700
1,26	0,103835	0,896165	0,792331
1,27	0,102042	0,897958	0,795915
1,28	0,100273	0,899727	0,799455
1,29	0,098525	0,901475	0,802949
1,30	0,096800	0,903200	0,806399
1,31	0,095098	0,904902	0,809804
1,32	0,093418	0,906582	0,813165
1,33	0,091759	0,908241	0,816482
1,34	0,090123	0,909877	0,819755
1,35	0,088508	0,911492	0,822984
1,36	0,086915	0,913085	0,826170
1,37	0,085343	0,914657	0,829313
1,38	0,083793	0,916207	0,832413
1,39	0,082264	0,917736	0,835471
1,40	0,080757	0,919243	0,838487
1,41	0,079270	0,920730	0,841460
1,42	0,077804	0,922196	0,844392
1,43	0,076359	0,923641	0,847283
1,44	0,074934	0,925066	0,850133
1,45	0,073529	0,926471	0,852941
1,46	0,072145	0,927855	0,855710
1,47	0,070781	0,929219	0,858438
1,48	0,069437	0,930563	0,861127
1,49	0,068112	0,931888	0,863776
1,50	0,066807	0,933193	0,866386

u	Φ(-u)	Φ(u)	D(u)
1,51	0,065522	0,934478	0,868957
1,52	0,064255	0,935745	0,871489
1,53	0,063008	0,936992	0,873983
1,54	0,061780	0,938220	0,876440
1,55	0,060571	0,939429	0,878858
1,56	0,059380	0,940620	0,881240
1,57	0,058208	0,941792	0,883585
1,58	0,057053	0,942947	0,885893
1,59	0,055917	0,944083	0,888165
1,60	0,054799	0,945201	0,890401
1,61	0,053699	0,946301	0,892602
1,62	0,052616	0,947384	0,894768
1,63	0,051551	0,948449	0,896899
1,64	0,050503	0,949497	0,898995
1,65	0,049471	0,950529	0,901057
1,66	0,048457	0,951543	0,903086
1,67	0,047460	0,952540	0,905081
1,68	0,046479	0,953521	0,907043
1,69	0,045514	0,954486	0,908972
1,70	0,044565	0,955435	0,910869
1,71	0,043633	0,956367	0,912734
1,72	0,042716	0,957284	0,914568
1,73	0,041815	0,958185	0,916370
1,74	0,040930	0,959070	0,918141
1,75	0,040059	0,959941	0,919882
1,76	0,039204	0,960796	0,921592
1,77	0,038364	0,961636	0,923273
1,78	0,037538	0,962462	0,924924
1,79	0,036727	0,963273	0,926546
1,80	0,035930	0,964070	0,928139
1,81	0,035148	0,964852	0,929704
1,82	0,034380	0,965620	0,931241
1,83	0,033625	0,966375	0,932750
1,84	0,032884	0,967116	0,934232
1,85	0,032157	0,967843	0,935686
1,86	0,031443	0,968557	0,937114
1,87	0,030742	0,969258	0,938516
1,88	0,030054	0,969946	0,939892
1,89	0,029379	0,970621	0,941242
1,90	0,028717	0,971283	0,942567
1,91	0,028067	0,971933	0,943867
1,92	0,027429	0,972571	0,945142
1,93	0,026803	0,973197	0,946393
1,94	0,026190	0,973810	0,947620
1,95	0,025588	0,974412	0,948824
1,96	0,024998	0,975002	0,950004
1,97	0,024419	0,975581	0,951162
1,98	0,023852	0,976148	0,952296
1,99	0,023295	0,976705	0,953409
2,00	0,022750	0,977250	0,954500

u	Φ(-u)	Φ(u)	D(u)
2,01	0,022216	0,977784	0,955569
2,02	0,021692	0,978308	0,956617
2,03	0,021178	0,978822	0,957643
2,04	0,020675	0,979325	0,958650
2,05	0,020182	0,979818	0,959636
2,06	0,019699	0,980301	0,960601
2,07	0,019226	0,980774	0,961548
2,08	0,018763	0,981237	0,962474
2,09	0,018309	0,981691	0,963382
2,10	0,017864	0,982136	0,964271
2,11	0,017429	0,982571	0,965142
2,12	0,017003	0,982997	0,965994
2,13	0,016586	0,983414	0,966828
2,14	0,016177	0,983823	0,967645
2,15	0,015778	0,984222	0,968445
2,16	0,015386	0,984614	0,969227
2,17	0,015003	0,984997	0,969993
2,18	0,014629	0,985371	0,970743
2,19	0,014262	0,985738	0,971476
2,20	0,013903	0,986097	0,972193
2,21	0,013553	0,986447	0,972895
2,22	0,013209	0,986791	0,973581
2,23	0,012874	0,987126	0,974253
2,24	0,012545	0,987455	0,974909
2,25	0,012224	0,987776	0,975551
2,26	0,011911	0,988089	0,976179
2,27	0,011604	0,988396	0,976792
2,28	0,011304	0,988696	0,977392
2,29	0,011011	0,988989	0,977979
2,30	0,010724	0,989276	0,978552
2,31	0,010444	0,989556	0,979112
2,32	0,010170	0,989830	0,979659
2,33	0,009903	0,990097	0,980194
2,34	0,009642	0,990358	0,980716
2,35	0,009387	0,990613	0,981227
2,36	0,009137	0,990863	0,981725
2,37	0,008894	0,991106	0,982212
2,38	0,008656	0,991344	0,982687
2,39	0,008424	0,991576	0,983152
2,40	0,008198	0,991802	0,983605
2,41	0,007976	0,992024	0,984047
2,42	0,007760	0,992240	0,984479
2,43	0,007549	0,992451	0,984901
2,44	0,007344	0,992656	0,985313
2,45	0,007143	0,992857	0,985714
2,46	0,006947	0,993053	0,986106
2,47	0,006756	0,993244	0,986489
2,48	0,006569	0,993431	0,986862
2,49	0,006387	0,993613	0,987226
2,50	0,006210	0,993790	0,987581

u	Φ(-u)	Φ(u)	D(u)
2,51	0,006037	0,993963	0,987927
2,52	0,005868	0,994132	0,988265
2,53	0,005703	0,994297	0,988594
2,54	0,005543	0,994457	0,988915
2,55	0,005386	0,994614	0,989228
2,56	0,005234	0,994766	0,989533
2,57	0,005085	0,994915	0,989830
2,58	0,004940	0,995060	0,990120
2,59	0,004799	0,995201	0,990402
2,60	0,004661	0,995339	0,990678
2,61	0,004527	0,995473	0,990946
2,62	0,004396	0,995604	0,991207
2,63	0,004269	0,995731	0,991462
2,64	0,004145	0,995855	0,991709
2,65	0,004025	0,995975	0,991951
2,66	0,003907	0,996093	0,992186
2,67	0,003793	0,996207	0,992415
2,68	0,003681	0,996319	0,992638
2,69	0,003573	0,996427	0,992855
2,70	0,003467	0,996533	0,993066
2,71	0,003364	0,996636	0,993272
2,72	0,003264	0,996736	0,993472
2,73	0,003167	0,996833	0,993667
2,74	0,003072	0,996928	0,993856
2,75	0,002980	0,997020	0,994040
2,76	0,002890	0,997110	0,994220
2,77	0,002803	0,997197	0,994394
2,78	0,002718	0,997282	0,994564
2,79	0,002635	0,997365	0,994729
2,80	0,002555	0,997445	0,994890
2,81	0,002477	0,997523	0,995046
2,82	0,002401	0,997599	0,995198
2,83	0,002327	0,997673	0,995345
2,84	0,002256	0,997744	0,995489
2,85	0,002186	0,997814	0,995628
2,86	0,002118	0,997882	0,995764
2,87	0,002052	0,997948	0,995895
2,88	0,001988	0,998012	0,996023
2,89	0,001926	0,998074	0,996148
2,90	0,001866	0,998134	0,996268
2,91	0,001807	0,998193	0,996386
2,92	0,001750	0,998250	0,996500
2,93	0,001695	0,998305	0,996610
2,94	0,001641	0,998359	0,996718
2,95	0,001589	0,998411	0,996822
2,96	0,001538	0,998462	0,996924
2,97	0,001489	0,998511	0,997022
2,98	0,001441	0,998559	0,997118
2,99	0,001395	0,998605	0,997210
3,00	0,001350	0,998650	0,997300

2020-04-06 - SOCOS

u	Φ(-u)	Φ(u)	D(u)
3,01	0,001306	0,998694	0,997388
3,02	0,001264	0,998736	0,997472
3,03	0,001223	0,998777	0,997554
3,04	0,001183	0,998817	0,997634
3,05	0,001144	0,998856	0,997712
3,06	0,001107	0,998893	0,997787
3,07	0,001070	0,998930	0,997859
3,08	0,001035	0,998965	0,997930
3,09	0,001001	0,998999	0,997998
3,10	0,000968	0,999032	0,998065
3,11	0,000935	0,999065	0,998129
3,12	0,000904	0,999096	0,998191
3,13	0,000874	0,999126	0,998252
3,14	0,000845	0,999155	0,998311
3,15	0,000816	0,999184	0,998367
3,16	0,000789	0,999211	0,998422
3,17	0,000762	0,999238	0,998476
3,18	0,000736	0,999264	0,998527
3,19	0,000711	0,999289	0,998577
3,20	0,000687	0,999313	0,998626
3,21	0,000664	0,999336	0,998673
3,22	0,000641	0,999359	0,998718
3,23	0,000619	0,999381	0,998762
3,24	0,000598	0,999402	0,998805
3,25	0,000577	0,999423	0,998846
3,26	0,000557	0,999443	0,998886
3,27	0,000538	0,999462	0,998925
3,28	0,000519	0,999481	0,998962
3,29	0,000501	0,999499	0,998998
3,30	0,000483	0,999517	0,999033
3,31	0,000466	0,999534	0,999067
3,32	0,000450	0,999550	0,999100
3,33	0,000434	0,999566	0,999132
3,34	0,000419	0,999581	0,999162
3,35	0,000404	0,999596	0,999192
3,36	0,000390	0,999610	0,999221
3,37	0,000376	0,999624	0,999248
3,38	0,000362	0,999638	0,999275
3,39	0,000349	0,999651	0,999301
3,40	0,000337	0,999663	0,999326
3,41	0,000325	0,999675	0,999350
3,42	0,000313	0,999687	0,999374
3,43	0,000302	0,999698	0,999396
3,44	0,000291	0,999709	0,999418
3,45	0,000280	0,999720	0,999439
3,46	0,000270	0,999730	0,999460
3,47	0,000260	0,999740	0,999480
3,48	0,000251	0,999749	0,999499
3,49	0,000242	0,999758	0,999517
3,50	0,000233	0,999767	0,999535

u	Φ(-u)	Φ(u)	D(u)
3,51	0,000224	0,999776	0,999552
3,52	0,000216	0,999784	0,999568
3,53	0,000208	0,999792	0,999584
3,54	0,000200	0,999800	0,999600
3,55	0,000193	0,999807	0,999615
3,56	0,000185	0,999815	0,999629
3,57	0,000178	0,999822	0,999643
3,58	0,000172	0,999828	0,999656
3,59	0,000165	0,999835	0,999669
3,60	0,000159	0,999841	0,999682
3,61	0,000153	0,999847	0,999694
3,62	0,000147	0,999853	0,999705
3,63	0,000142	0,999858	0,999717
3,64	0,000136	0,999864	0,999727
3,65	0,000131	0,999869	0,999738
3,66	0,000126	0,999874	0,999748
3,67	0,000121	0,999879	0,999757
3,68	0,000117	0,999883	0,999767
3,69	0,000112	0,999888	0,999776
3,70	0,000108	0,999892	0,999784
3,71	0,000104	0,999896	0,999793
3,72	0,000100	0,999900	0,999801
3,73	0,000096	0,999904	0,999809
3,74	0,000092	0,999908	0,999816
3,75	0,000088	0,999912	0,999823
3,76	0,000085	0,999915	0,999830
3,77	0,000082	0,999918	0,999837
3,78	0,000078	0,999922	0,999843
3,79	0,000075	0,999925	0,999849
3,80	0,000072	0,999928	0,999855
3,81	0,000069	0,999931	0,999861
3,82	0,000067	0,999933	0,999867
3,83	0,000064	0,999936	0,999872
3,84	0,000062	0,999938	0,999877
3,85	0,000059	0,999941	0,999882
3,86	0,000057	0,999943	0,999887
3,87	0,000054	0,999946	0,999891
3,88	0,000052	0,999948	0,999896
3,89	0,000050	0,999950	0,999900
3,90	0,000048	0,999952	0,999904
3,91	0,000046	0,999954	0,999908
3,92	0,000044	0,999956	0,999911
3,93	0,000042	0,999958	0,999915
3,94	0,000041	0,999959	0,999919
3,95	0,000039	0,999961	0,999922
3,96	0,000037	0,999963	0,999925
3,97	0,000036	0,999964	0,999928
3,98	0,000034	0,999966	0,999931
3,99	0,000033	0,999967	0,999934
4,00	0,000032	0,999968	0,999937

2020-04-06 - SOCOS

6.4. Umgang mit korrelierten Größen

In den vorhergehenden Abschnitten wurde die Toleranz des Gesamtmerkmals für den Fall bestimmt, dass die Einzelmerkmale unkorreliert (statistisch unabhängig) voneinander sind. Diese Voraussetzung ist im Allgemeinen jedoch nicht erfüllt, so dass eine Erweiterung des Ansatzes für korrelierte Merkmale notwendig wird [5].

Statistisches Maß für die gegenseitige Abhängigkeit von Merkmalen ist der Korrelationskoeffizient r einer Stichprobe:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} , \qquad (6.4)$$

sowie der Korrelationskoeffizient ρ der zugrundeliegenden Grundgesamtheit

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} . \qquad (6.5)$$

Auf diesen Kenngrößen basiert die Überlagerung korrelierter Einzelmerkmale. Oft ist der Korrelationskoeffizient ρ der Grundgesamtheit nicht bekannt. Deshalb wird er über den Korrelationskoeffizient r der Stichprobe geschätzt:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \rho \approx r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} . \qquad (6.6)$$

6.4.1. Korrelation bei linearen Merkmalsketten

Die Varianz einer Summe von korrelierten Zufallszahlen kann berechnet werden durch

$$\sigma_z^2 = \sigma_{z1}^2 + \sigma_{z2}^2 + 2\sigma_{z1z2} . \qquad (6.7)$$

Da sich die Einzeltoleranzen z_i aus den Einzelmerkmalen x_i und den jeweiligen Empfindlichkeiten E_{xi} ergeben, kann die Toleranz des Gesamtmerkmals mit

$$\sigma_{z1z2} = E_{x1} E_{x2} \sigma_{x1x2} \qquad (6.8)$$

berechnet werden zu

$$\sigma_z^2 = \sigma_{z1}^2 + \sigma_{z2}^2 + 2\sigma_{z1z2} = E_{x1}^2 \sigma_{x1}^2 + E_{x2}^2 \sigma_{x2}^2 + 2 E_{x1} E_{x2} \sigma_{x1x2} . \qquad (6.9)$$

Besitzen zwei Einzelmerkmale x_1 und x_2 eine Korrelation ρ, ergibt sich wegen

$$\sigma_{x1x2} = \rho \sigma_{x1} \sigma_{x2} \qquad (6.10)$$

die Varianz des Gesamtmerkmals zu

$$\sigma_z^2 = E_{x1}^2 \sigma_{x1}^2 + E_{x2}^2 \sigma_{x2}^2 + 2 E_{x1} E_{x2} \rho \sigma_{x1} \sigma_{x2} . \qquad (6.11)$$

Die Korrelation der Einzelmerkmale x_1 und x_2 kann sich positiv oder negativ auf die Gesamttoleranz auswirken.

2020-04-06 - SOCOS

6.4.2. Korrelation bei nicht-linearen Merkmalsketten

Bei nichtlinearen Merkmalsketten kann eine Linearisierung im Arbeitspunkt erfolgen, so dass die Toleranzrechnung auf lineare Merkmalsketten zurückgeführt wird. Ist die Linearisierung aufgrund einer ausgeprägten Nichtlinearität nicht möglich, kann eine statistische Simulation durchgeführt werden. Im Gegensatz zu der beschriebenen Toleranzsimulation muss bei der Generierung der Zufallszahlen jedoch die Korrelation der Einzelmerkmale berücksichtigt werden.

Zur Generierung zweier korrelierter Merkmale x_1 und x_2 werden zunächst zwei unkorrelierte Merkmale w_1 und w_2 mit einer Standardabweichung $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ und $\mu_1 = \mu_2 = 0$ generiert. Durch eine Transformation

$$x_1 = \sigma_{x1} w_1 \,, \; x_2 = \rho \sigma_{x2} w_1 + \sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_{x2} w_2 \tag{6.12}$$

ergeben sich zwei Merkmale x_1 und x_2 mit den Standardabweichungen σ_{x1} und σ_{x2} sowie den Mittelwerten $\mu_{x1} = 0$ und $\mu_{x2} = 0$. Sie weisen eine Kovarianz von

$$\sigma_{x1x2} = E\left(\left(x_1 - \mu_{x1}\right)\left(x_2 - \mu_{x2}\right)\right) = E\left(x_1 x_2\right) = \rho \sigma_{x1} \sigma_{x2} \tag{6.13}$$

auf und besitzen damit die Korrelation ρ. Gegebenenfalls werden die Mittelwerte μ_{x1} und μ_{x2} zu den Zufallsvariablen addiert. Mit den so generierten Zufallsvariablen erfolgt eine statistische Toleranzsimulation, wie sie in Kap. 4.2.2 beschrieben ist.

6.4.3. Beispiel einer statistischen Tolerierung mit korrelierten Einzelmerkmalen

Für das Beispiel des Spannungsteilers aus Bild 4.8 wird davon ausgegangen, dass die beiden Widerstände gemeinsam auf einem Schaltkreis integriert sind. Sie werden deshalb in demselben Fertigungsprozess hergestellt, und es ist davon auszugehen, dass die beiden Widerstände eine Korrelation ρ nahe 1 haben. Der Toleranzeinfluss der Spannungsquelle wird weiter als statistisch unabhängig angenommen. Damit ergibt sich die Toleranz der Ausgangsspannung U nach Linearisierung zu

$$\sigma_U^2 = E_{R1}^2 \sigma_{R1}^2 + E_{R2}^2 \sigma_{R2}^2 + 2\rho E_{R1} \sigma_{R1} E_{R2} \sigma_{R2} + E_{Uref}^2 \sigma_{Uref}^2 \,. \tag{6.14}$$

Für die Widerstände wird eine Normalverteilung mit Mittelwert von $R_0 = 100\ \Omega$ und einer Standardabweichung von $\sigma_R = 1\ \Omega$ angenommen. Dann sind die Empfindlichkeiten E_{R1} und E_{R2} vom Betrag gleich, aber vom Vorzeichen verschieden

$$E_R = -E_{R1} = E_{R2} \,. \tag{6.15}$$

Damit vereinfacht sich obige Gl. zu

$$\begin{aligned} \sigma_U^2 &= E_{R1}^2 \sigma_{R1}^2 + E_{R2}^2 \sigma_{R2}^2 + 2\rho E_{R1} \sigma_{R1} E_{R2} \sigma_{R2} + E_{Uref}^2 \sigma_{Uref}^2 \\ &= E_R^2 \sigma_R^2 + E_R^2 \sigma_R^2 - 2\rho E_R \sigma_R E_R \sigma_R + E_{Uref}^2 \sigma_{Uref}^2 \\ &= 2E_R^2 \sigma_R^2 (1-\rho) + E_{Uref}^2 \sigma_{Uref}^2 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Es wird deutlich, dass mit steigendem Korrelationskoeffizient ρ die Varianz des Gesamtmerkmals sinkt. Im Idealfall sind beide Widerstände identisch, so dass sich ein Korrelationskoeffizient $\rho = 1$ ergibt. In dem Fall hat der absolute Wert des Widerstandes keinen Einfluss auf die Varianz des Gesamtmerkmals.

Der Effekt der Toleranzkompensation kann auch an der Übertragungsfunktion

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{ref} = \frac{1{,}1 R_2}{1{,}1 R_1 + 1{,}1 R_2} U_{ref} \tag{6.17}$$

2020-04-06 - SOCOS

abgelesen werden. Weisen alle Bauelemente einen 10 % höheren Wert auf, kürzt sich der Faktor 1,1 aus dem Bruch. Der Absolutwert der Widerstände ist für die Funktion nicht relevant, lediglich das Widerstandsverhältnis ist für die Ausgangsspannung von Bedeutung.

2020-04-06 - SOCOS

7. Literatur

[1] B. Klein: Prozessorientierte statistische Tolerierung, Expert-Verlag, 2007

[2] G. Kirschling: Qualitätssicherung und Toleranzen, Springer-Verlag Berlin, 1988

[3] Schriftenreihe Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe, Heft Nr. 7: Statistische Prozessregelung SPC, 2005

[4] DIN EN ISO 286-1:2010-11: Geometrische Produktspezifikation (GPS) – ISO-Toleranzsystem für Längenmaße – Teil 1: Grundlagen für Toleranzen, Abmaße und Passungen

DIN ISO 3534-1:2009-10: Statistik –Begriffe und Formelzeichen – Teil 1: Wahrscheinlichkeit und allgemeine statistische Begriffe

[5] M. Strohrmann: Design For Six Sigma Skriptum, www.home.hs-karlsruhe.de/~stma0003, Zugriff 23.08.2012

[6] Schriftenreihe Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe, Heft Nr. 9: Maschinen und Prozessfähigkeit, 2005

2020-04-06 - SOCOS

2020-04-06 - SOCOS

Robert Bosch GmbH
C/QMM
Postfach 30 02 20
D-70442 Stuttgart
Germany
Phone +49 711 811-4 47 88
Fax +49 711 811-2 31 26
www.bosch.com