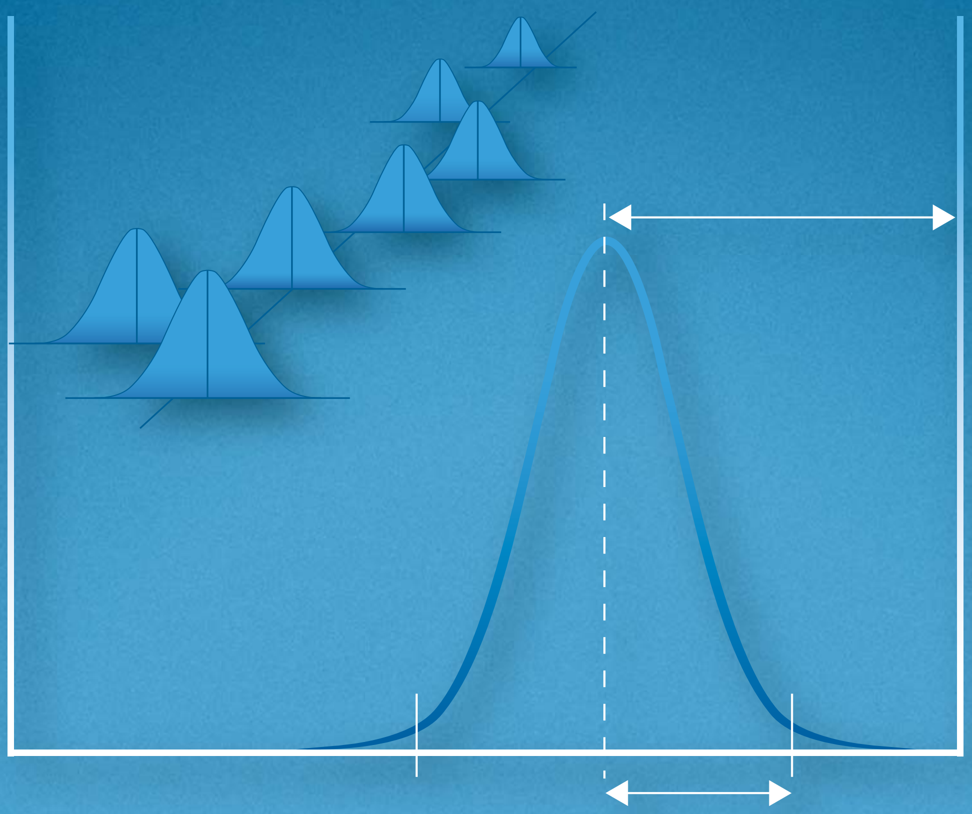


Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe | Technische Statistik

# 9. Maschinen- und Prozessfähigkeit

BOSCH
Technik fürs Leben

**Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe**
**Technische Statistik**

# Heft Nr. 9

# Maschinen- und Prozessfähigkeit

**Ausgabe**
**11.2019**

**5. Ausgabe 05.11.2019**

4. Ausgabe 01.06.2016
3. Ausgabe 01.07.2004
2. Ausgabe 29.07.1991
1. Ausgabe 11.04.1990

Alle im vorliegenden Heft angegebenen Mindestanforderungen zu Fähigkeits- und Leistungskriterien entsprechen dem Stand bei Drucklegung (Ausgabedatum). Für die aktuelle Festlegung ist CDQ 0301 maßgeblich.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Die Erforderlichkeit von Fähigkeits- und Leistungsnachweisen ergibt sich u. a. aus Anforderungen der Norm [ISO 9001]. Einige diesbezüglich relevante Auszüge:

*Die Organisation muss die Produktion und die Dienstleistungserbringung unter beherrschten Bedingungen durchführen. Falls zutreffend, müssen beherrschte Bedingungen Folgendes enthalten:*

- *Die Durchführung von Überwachungs- und Messtätigkeiten in geeigneten Phasen, um zu verifizieren, dass die Kriterien zur Steuerung von Prozessen oder Ergebnissen sowie die Annahmekriterien für Produkte und Dienstleistungen erfüllt wurden [ISO 9001; 8.5.1 c)];*
- *Die Validierung und regelmäßig wiederholte Validierung der Fähigkeit, geplante Ergebnisse der Prozesse der Produktion oder Dienstleistungserbringung zu erreichen, wenn das resultierende Ergebnis nicht durch anschließende Überwachung oder Messung verifiziert werden kann [ISO 9001; 8.5.1 f)].*
- *Wenn eine Nichtkonformität auftritt, einschließlich derer, die sich aus Reklamationen ergeben, muss die Organisation darauf reagieren und, falls zutreffend, Maßnahmen zur Überwachung und zur Korrektur ergreifen [ISO 9001; 10.2.1 a) 1)].*

Diese Anforderungen waren inhaltlich bereits in Vorgängerversionen und branchenspezifischen Ausprägungen dieser Norm enthalten. Vereinfacht ausgedrückt bedeutet das, dass Fähigkeits- und Leistungsnachweise insbesondere dann erforderlich sind, wenn Produkteigenschaften als Ergebnis eines Fertigungsprozesses nicht vollständig überprüft werden, weil z. B. aus Effizienz- oder Kostengründen keine 100 %-Prüfung durchgeführt werden kann.

*ANMERKUNG: 100 %-Prüfung bedeutet, dass ein bestimmtes Merkmal an jedem einzelnen Teil geprüft wird, das hergestellt wurde. Entgegen einer gelegentlichen Fehlinterpretation bedeutet 100 %-Prüfung hingegen nicht, dass alle an einem einzigen Teil vorhandenen Merkmale geprüft werden.*

Grundlage des vorliegenden Heftes bildet die Normenreihe ISO 22514, insbesondere die Norm [ISO 22514-2]. Verwendete Begriffe werden hauptsächlich aus [ISO 22514-1], [ISO 3534-2], [ISO 3534-1], [ISO 9000] und [VIM] übernommen. Das Kapitel *Begriffe* enthält eine Auswahl wichtiger Definitionen.

Zweck eines Prozesses ist[1], ein Produkt herzustellen oder eine Dienstleistung zu erbringen, die vorher festgelegte Anforderungen erfüllen. Die Anforderungen sind für ein oder mehrere Merkmale des Produktes oder der Dienstleistung festgelegt. Fähigkeit und Leistung eines Prozesses können immer nur bzgl. eines bestimmten Merkmals untersucht und ggf. nachgewiesen werden. Dies bedeutet, dass in der Regel für jedes Merkmal ein eigenständiger Nachweis zu erbringen ist. Das Merkmal kann eine messbare physikalische Größe sein (z. B. Länge, Strom, Temperatur) oder eine zählbare Eigenschaft (z. B. innerhalb oder außerhalb des Toleranzintervalls).

Die drei wesentlichen Schritte, um Prozessfähigkeit nachzuweisen[1]:

1. Bewertung, ob es sich um einen stationären Prozess handelt, der sich über eine angemessene Zeitspanne stabil und damit vorhersagbar verhält;
2. Ermittlung eines statistischen Prozessmodells, d. h. einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Prozessergebnisse mit zugehörigen Schätzwerten für die Parameter dieser Verteilung;
3. Bewertung der Prozessergebnisse auf Basis dieses Prozessmodells, ob die Eigenschaften der erzeugten Produktmerkmale die Anforderungen erfüllen. Ist dies nicht der Fall, sind die Prozessmerkmale zu optimieren, um Prozessergebnisse mit den geforderten Eigenschaften zu realisieren.

Anschließend ist sicherzustellen, dass sich die Prozessmerkmale und damit der Prozess nicht oder nur in vorhersagbarer Weise ändern. Dies kann z. B. mittels statistischer Prozessregelung erfolgen [Heft 7].

[1] In Anlehnung an [ISO 22514-1; 1]

Im vorliegenden Heft werden diese Schritte unter den Gesichtspunkten *Maschinenfähigkeit* sowie *Kurz- und Langzeitfähigkeit und -leistung von Fertigungsprozessen* behandelt. Das Heft gliedert sich in den Hauptteil und den Anhang. Der Anhang enthält zahlreiche Hinweise, Ergänzungen und — soweit Bedarf anhand häufig wiederkehrender Anfragen erkennbar war — Erläuterungen zu theoretischen Grundlagen, die erhöhten Anspruch an das mathematische Verständnis stellen und sich vorzugsweise an Leser mit entsprechendem Informationsbedarf wenden.

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass bei Anwendung der Inhalte und Methoden des vorliegenden Heftes ein hohes Maß an „Eigenkompetenz“ mit entsprechend „qualifiziertem Denken“ unverzichtbar ist. Aussagekräftige Fähigkeitsnachweise können niemals das Ergebnis einer per Knopfdruck unüberlegt durchgeführten Auswertung unspezifisch erfasster Messdaten sein. Wesentliches Ziel eines Fähigkeitsnachweises mit den dafür benötigten Untersuchungen ist, neben der Ermittlung statistischer Kennwerte, die vorgegebene Kriterien erfüllen, auch ein grundsätzliches Verständnis des Prozessverhaltens zu erreichen.

# 2 Anwendungsbereich

Die in den Kapiteln 3 bis 11 beschriebenen statistischen Verfahren und Methoden auf Basis von [ISO 22514-3] (Fähigkeit von Fertigungsmaschinen) und [ISO 22514-2] (Fähigkeit und Leistung von Fertigungsprozessen) beziehen sich auf eindimensionale, kontinuierliche Qualitätsmerkmale. Diese Ansätze sind auf Prozesse in allen industriellen und wirtschaftlichen Bereichen anwendbar[2].

Kapitel 14 führt zusätzlich in die Thematik zweidimensionaler, kontinuierlicher Merkmale ein [ISO 22514-6]. Dazu gehören z. B. sogenannte Positionstoleranzen.

Anhang J erläutert schließlich einen Ansatz zur Behandlung von diskreten Merkmalen auf Basis von [ISO 22514-5]. )

Typische Anwendungsbeispiele[3]:

- Es besteht die Notwendigkeit festzustellen, ob das Bearbeitungsergebnis einer Fertigungsmaschine oder das Ergebnis eines Fertigungsprozesses (inkl. Montage) vorgegebenen Kriterien entspricht und annehmbar ist, weil eine 100 %-Prüfung nicht durchgeführt wird (z. B. aus Effizienz- und/oder Kostengründen) oder grundsätzlich nicht möglich ist (z. B. bei zerstörenden Prüfungen).
- Der Fähigkeitsnachweis ist eine notwendige Voraussetzung zur Freigabe neu anlaufender oder geänderter Prozesse für die Serienfertigung (Anforderung auf Basis interner Regelwerke und Vorgaben oder wird vom Kunden gefordert (z. B. aufgrund vertraglicher Vereinbarungen).
- Ermittlung von Parametern zur Prozessregelung.
- Analyse und Bewertung von Fertigungsergebnissen im Rahmen der Problemlösung (z. B. bei unerwartetem Prozessverhalten oder bei der Ursachenanalyse von Feldausfällen).
- Ermittlung von Maßnahmen zur Prozessoptimierung.
- Vorgabe für Lieferanten, um darauf vertrauen zu können, dass geforderte Produktspezifikationen erfüllt werden.

Dabei ist grundsätzlich zu beachten, dass alle im Rahmen von Fähigkeitsanalysen ermittelten Werte für Kenngrößen lediglich Schätzungen der wahren Werte darstellen, d. h. eine Art „Schnappschuss“ der momentanen Situation. Es wird deshalb dringend empfohlen, auch die Vertrauensbereiche für diese Kenngrößen zu ermitteln und zu dokumentieren. Statistik-Software (z. B. qs-STAT®) ist üblicherweise bereits entsprechend voreingestellt.

[2] In Anlehnung an [ISO 22514-2; 1]

[3] In Anlehnung an [ISO 22514-1; 1]

# 3 Ablaufdiagramm

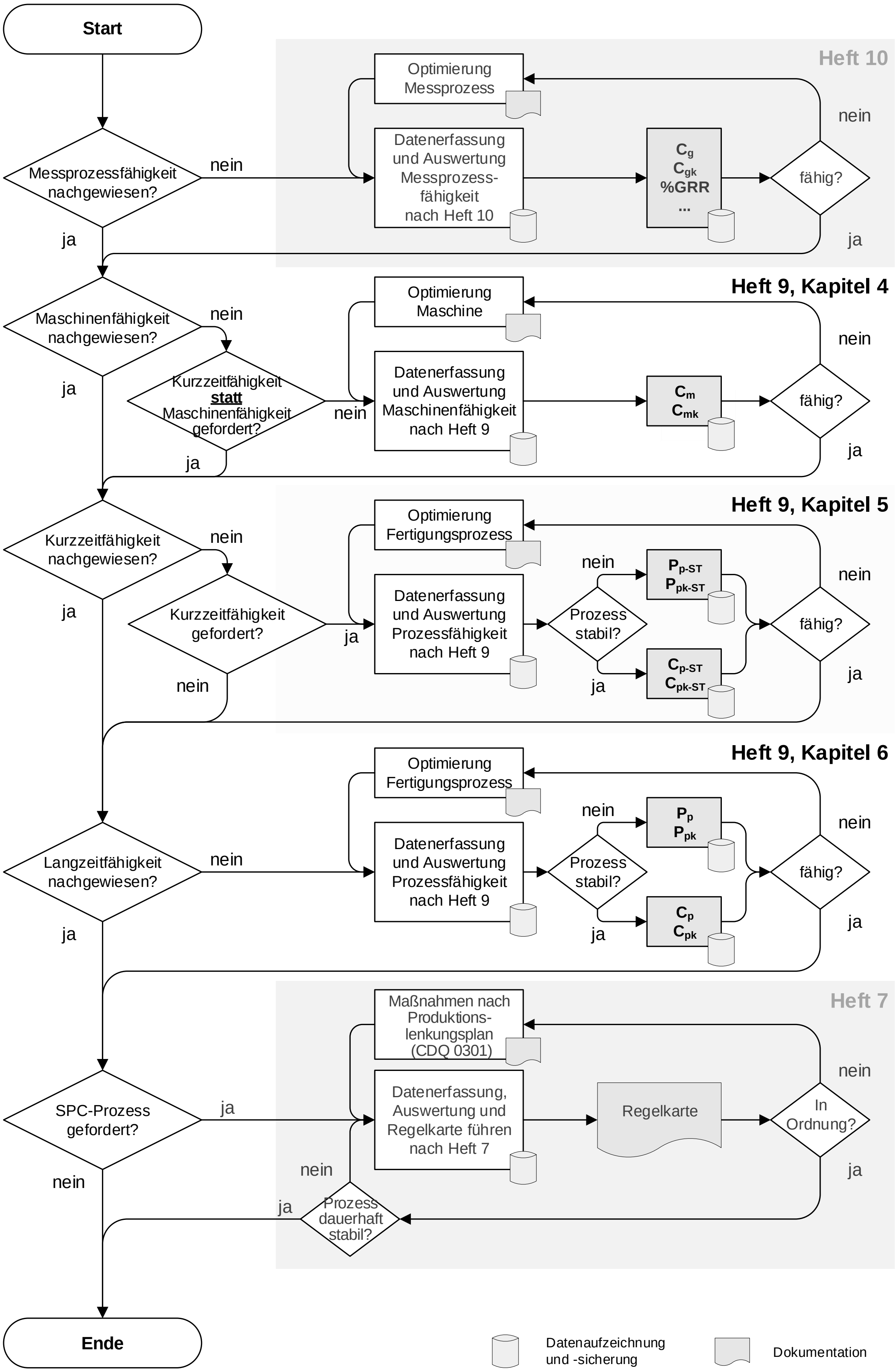



Abbildung 1: Ablauf der Fähigkeitsuntersuchungen und Prozessüberwachung

# 4 Maschinenfähigkeit

Die Untersuchung der Maschinenfähigkeit ist eine Kurzzeitstudie. Ziel ist, ausschließlich maschinenbedingte Einflüsse auf den Fertigungsprozess zu erfassen und zu bewerten – und möglichst zu verstehen.

Zusätzlich wirken jedoch zahlreiche weitere Einfluss- und Störgrößen. Typische Beispiele für nicht maschinenbedingte Einflüsse:

| | | |
|---|---|---|
| Mensch | • Personal<br>• Schichtwechsel | • ... |
| Maschine[4] | • Drehzahl<br>• Vorschub<br>• Werkzeuge<br>• Taktzeiten<br>• Kühlmittelstrom und - temperatur<br>• Druck | • Strom (z. B. bei Schweißgeräten)<br>• Leistung (z. B. beim Laserschweißen)<br>• Änderungsstand bei Optimierungsmaßnahmen<br>• … |
| Material | • Halbzeuge und Rohteile aus verschiedenen Lieferungen oder von verschiedenen Herstellern<br>• … | • ... |
| Methode | • Einlaufzeit der Bearbeitungseinrichtung vor der Stichprobenentnahme<br>• … | • unterschiedliche Vorbearbeitung, unterschiedlicher Fertigungsfluss<br>• ... |
| Umwelt<br>*(Milieu, Mitwelt, „Mutter Natur“)* | • Raumtemperatur *(z. B. Temperaturänderung während der Produktion der Stichprobe)*<br>• Luftfeuchtigkeit, Luftdruck<br>• Erschütterungen, die auf die Bearbeitungseinrichtung einwirken | • Standort der Bearbeitungseinrichtung im Gebäude *(z. B. Stockwerk)*<br>• Außergewöhnliche Ereignisse *(z. B. Fenster öffnen, Heizung ein- oder ausschalten)*<br>• … |

Um Effekte durch nicht maschinenbedingte Einfluss- und Störgrößen auszuschließen oder zumindest zu minimimieren, versucht man diese Größen möglichst konstant zu halten. Man erwartet dann, dass sich nur noch Einflüsse der Maschine und deren Änderungen auf das Erzeugnis und dessen Merkmale auswirken.

Sofern es im Einzelfall nicht möglich ist, nicht maschinenbedingte Einflüsse konstant zu halten (z. B. Raumtemperatur), sind Veränderungen der entsprechenden Einfluss- und Störgrößen aufzuzeichnen und zu dokumentieren. Diese Information liefert möglicherweise Ansätze für Optimierungsmaßnahmen, wenn Fähigkeitskriterien nicht erfüllt werden.

Voraussetzung für eine Maschinenfähigkeitsstudie sind fähige Mess- und Prüfprozesse (vgl. Kap. 9.3, [Heft 10] und [CDQ 0301]).

---

[4] Die aufgezählten Größen sind Beispiele für Einstellgrößen, deren Einstellwerte *nicht* maschinenbedingt sind. Maschinenbedingt sind hingegen Schwankungen und Abweichungen von diesen Einstellwerten, die der Anwender in der Regel nicht beeinflussen und kontrollieren kann.

## Ablauf und Auswertekonfiguration

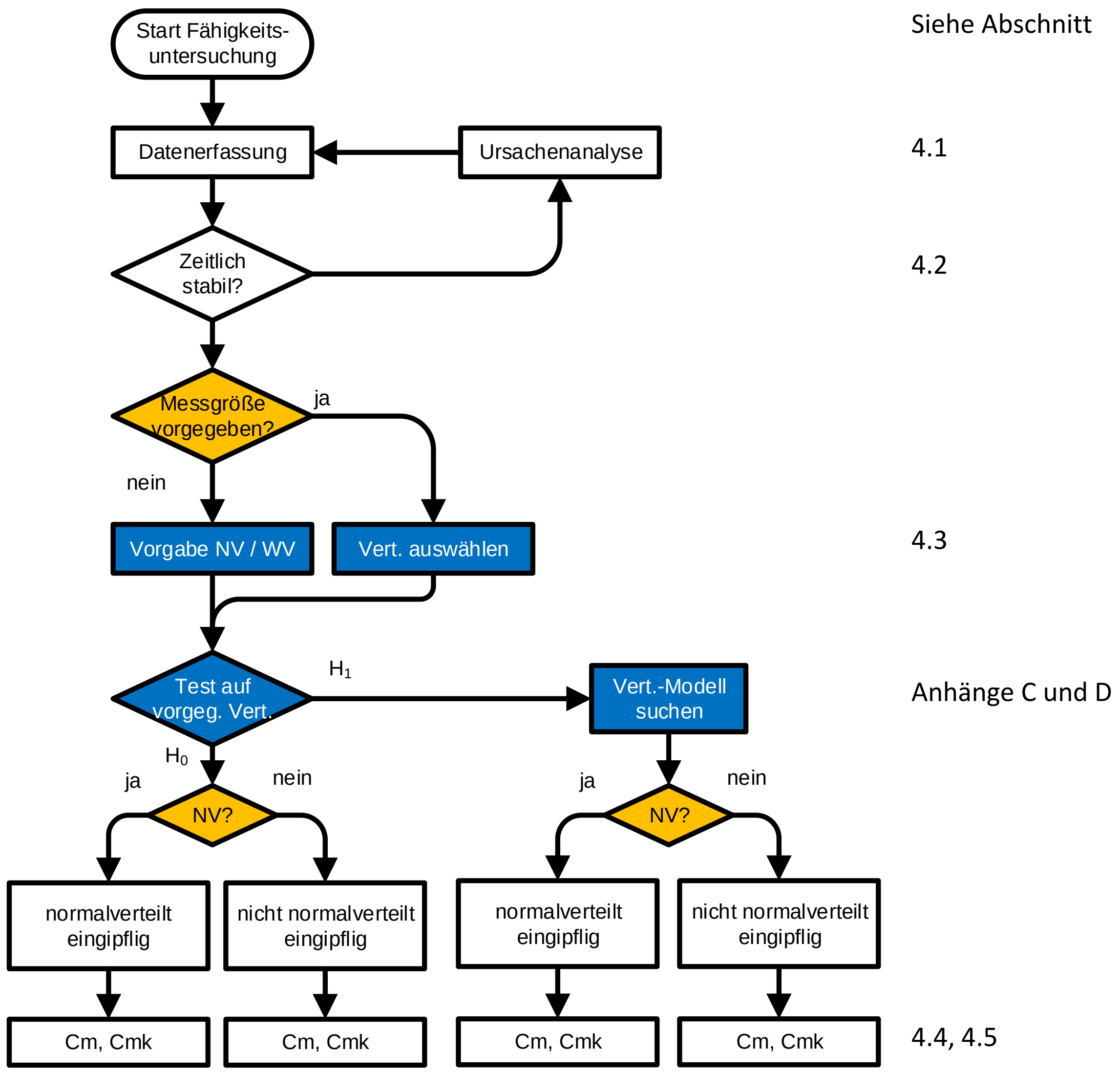



Abbildung 2: Ablauf einer Maschinenfähigkeitsstudie

## 4.1 Datenerfassung

Die Datenerfassung für eine Maschinenfähigkeitsstudie erfolgt in drei Schritten:

1. Vorbereitung der Bearbeitungseinrichtung, so dass die Messwerte möglichst in der Mitte des Toleranzintervalls liegen (Vorlauf). Bei einseitig begrenzten Merkmalen ist die bestmögliche Einstellung bzgl. des Sollwertes zu wählen.
2. Herstellung einer repräsentativen Anzahl von Teilen (mindestens $n = 50$, möglichst $n = 100$) in einem kontinuierlichen Fertigungslauf, d. h. in ununterbrochener Folge. Abweichungen davon sind zu dokumentieren.
3. Messung des Teilemerkmals bzw. der Teilemerkmale und Dokumentation der Ergebnisse entsprechend der Produktionsreihenfolge.

Wesentlich für die Auswertung ist, dass alle $n$ Messwerte als eine einzige Stichprobe ($m = 1$) mit Stichprobenumfang $n$ betrachtet werden.

## 4.2 Untersuchung der zeitlichen Stabilität

Zunächst wird anhand der Urwertkarte oder des Urwertdiagramms qualitativ beurteilt, ob die erfassten Einzelmesswerte zeitlich stabil sind oder nicht:

- Zeigen sich im zeitlichen Verlauf systematische Veränderungen?
- Konzentrieren sich die Einzelwerte in der Nähe des eingestellten Sollwerts?
- Liegen alle Einzelwerte innerhalb einer Zone, die etwa 60 % des Toleranzintervalls entspricht?

Hinweise darauf, dass der Prozess nicht stabil ist, geben z. B. folgende Beobachtungen:

- Es gibt einzelne unerklärliche Ausreißer (Ansprechen des Ausreißertests oder Werte außerhalb der Plausibilitätsgrenzen).
- Es gibt unerklärliche Sprünge, Stufen oder Trends.
- Einzelwerte liegen überwiegend oberhalb oder unterhalb des Sollwerts.
- Bei einem zweiseitig begrenzten Merkmal liegen die Einzelwerte überwiegend in der Nähe der Grenzwerte.

Sofern der Werteverlauf nicht plausibel ist, sind die Ursachen für dieses Verhalten zu untersuchen und zu beseitigen. Anschließend muss die Fähigkeitsuntersuchung wiederholt werden.

## 4.3 Untersuchung der statistischen Verteilung

Die Kenntnis des Produktionsverfahrens und die Art der Toleranzangabe erlauben häufig einen Schluss auf das Verteilungsmodell, das zur Beschreibung der empirischen Merkmalsverteilung geeignet ist.

- Man kann z. B. erwarten, dass ein Merkmal, dessen Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit sowohl nach oben als auch nach unten vom Sollwert abweichen (positive oder negative Abweichung), näherungsweise normalverteilt ist. Dies ist aber nicht zwangsläufig immer so.
- Demgegenüber folgen Merkmale, die eine einseitige „natürliche“ Grenze besitzen, im Allgemeinen einer schiefen, asymmetrischen Verteilung. Beispielsweise können Rundlauf und Rauheit definitionsgemäß keine negativen Werte annehmen. Der Wert 0 stellt in diesem Fall eine natürliche untere Grenze dar ($LL^* = 0$). Erfahrungsgemäß können viele nullbegrenzte Merkmale der Form und Lage nach [ISO 1101] mit einer Betragsverteilung 1. oder 2. Art beschrieben werden.

Im Rahmen einer Maschinenfähigkeitsstudie erfolgt daher eine Unterscheidung nach dem folgenden Schema. Die konkrete Verteilungszuordnung geschieht dann mit Hilfe der Verfahren nach Anhang C, insbesondere C.2.

| | |
|---|---|
| Merkmal (Messgröße) vorgegeben | • Normalverteilung<br>• Betragsverteilung<br>• Rayleigh-Verteilung (Betragsverteilung 2. Art) |
| Merkmal (Messgröße) nicht vorgegeben | • zweiseitig begrenzt: Normalverteilung<br>• einseitig begrenzt: Weibull-Verteilung |

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich ein Merkmal entsprechend diesen Regeln verhalten *kann*, sich aber nicht grundsätzlich so verhalten *muss*. Im Einzelfall können deutliche Abweichungen beobachtet werden (siehe auch Hinweise in Abschnitt 6.5).

Aus diesem Grund wird im nächsten Schritt ein Test auf vorgegebene Verteilung durchgeführt. Die Raute beinhaltet sowohl einen Chi-Quadrat-Test als auch mehrere Tests auf Normalverteilung, die je nach Stichprobenumfang ausgewählt werden (siehe Anhang D.7).

Wurde das vordefinierte Verteilungsmodell von dem Test auf Normalverteilung bzw. Test auf beliebige Verteilung verworfen, so wird eine zu den Werten passende Verteilung bestimmt.

Letztlich obliegt es dem Anwender zu prüfen und zu beurteilen, ob den vorliegenden Messdaten in Anbetracht aller statistischen Sachverhalte und unter Berücksichtigung der technischen Gegebenheiten ein sinnvolles Verteilungsmodell zugeordnet wurde.

## 4.4 Berechnung von Fähigkeitskennwerten

Grundlagen und Berechnungsmethoden für Fähigkeitskennwerte werden in Kap. 8 dargestellt.

Als **Standardmethode** zur Berechnung der Fähigkeitskennwerte wird die Quantilmethode $M_{2,1}$ nach [ISO 22514-2] eingesetzt (siehe Kap. 8.2). Dies ist die einzige Methode, die für alle Verteilungsmodelle ohne Einschränkung verwendbar ist. Die Berechnungen erfordern allerdings den Einsatz geeigneter Statistik-Software (z. B. qs-STAT®).

Daten, die in guter Näherung durch eine **Normalverteilung** beschrieben werden können, könnten alternativ mit allen nach [ISO 22514-2] möglichen Methoden ausgewertet werden (siehe Kap. 8.3 und Anhang E, Tabelle 4). Dabei ist die Anzahl Stichproben auf $m = 1$ zu setzen[5]. In der Praxis kommt meist die Methode $M_{3,5}$ zum Einsatz. Diese Berechnungen können auch „von Hand“ durchgeführt werden (oder z. B. mit Hilfe von MS-EXCEL®).

**Andere eingipflige Verteilungen** könnten alternativ zu $M_{2,1}$ insbesondere mit Methode $M_{4,5}$ nach [ISO 22514-2] und $m = 1$ ausgewertet werden, die ebenfalls Berechnungen „von Hand“ erlaubt (siehe Kap. 8.3). Da keine Information über das Verteilungsmodell vorliegt und daher $s_{total}$ benutzt wird, führt diese Methode im Vergleich zu $M_{2,1}$ in der Regel zu ungünstigeren Ergebnissen.

Für alle übrigen Verteilungsmodelle ist mit wenigen Ausnahmen (siehe Anhang E, Tabelle 4) die Quantilmethode $M_{2,1}$ erforderlich.

## 4.5 Kriterien für Maschinenfähigkeit

Die Kennwerte für Maschinenfähigkeiten werden mit $C_m$ und $C_{mk}$ bezeichnet.

*ANMERKUNG 1: Abweichende Bezeichnungen entsprechend Kundenforderungen sind möglich.*

*ANMERKUNG 2: [ISO 22514-3] verwendet die Variablennamen $P_m$ und $P_{mk}$ anstelle von $C_m$ bzw. $C_{mk}$.*

Maßgeblich für die aktuellen Grenzwerte ist [CDQ 0301] in der jeweils gültigen Fassung. Zum Zeitpunkt der Veröffentlichung der vorliegenden Ausgabe von Heft 9 gelten folgende Anforderungen und Grenzwerte:

| | Anforderung |
|---|---|
| Anzahl Teile (Messwerte) | $n \geq 50$ ($n \geq 100$ *empfohlen*) |
| Potentieller Fähigkeitsindex | $C_m \geq 1{,}67$ |
| Kritischer Fähigkeitsindex | $C_{mk} \geq 1{,}67$ |

*ANMERKUNG 3: Die Grenzwerte sind als absolute Mindestanforderungen zu betrachten, die nicht unterschritten werden sollen. Die Anforderungen können abhängig vom Anwendungsfall angehoben werden.*

Werden die Fähigkeitskriterien nicht erfüllt, ist eine Ursachenanalyse und ggf. eine Wiederholung der Fähigkeitsstudie erforderlich.

[5] Im Fall $m = 1$ werden einige Berechungsmethoden nach [ISO 22514-2] identisch (z. B. $M_{3,2}$ und $M_{3,5}$, $M_{2,5}$ und $M_{4,5}$)

## 4.6 Maschinenfähigkeitsuntersuchung mit reduziertem Aufwand

Nach Kap. 4.5 beträgt die Vorgabe für die Anzahl zu fertigender und zu vermessender Teile mindestens $n = 50$ (besser $n = 100$). In der Praxis kann es in **Sonderfällen** jedoch unumgänglich sein, unabhängig von dieser Vorgabe mit einem reduzierten Stichprobenumfang $n < 50$ auszukommen, z. B. bei sehr aufwändigen Messungen, die mit außergewöhnlich hohen Kosten verbunden sind, oder bei zerstörenden Prüfungen.

Allerdings verringert sich mit abnehmendem Stichprobenumfang die Aussagesicherheit, da der Vertrauensbereich des daraus berechneten Kennwertes größer wird. Dies kann durch Anheben der Mindestanforderungen für die Fähigkeitskennwerte bis zu einem gewissen Grad ausgeglichen werden (siehe Anhang I.1).

Statistik-Software ist mittlerweile häufig so voreingestellt (z. B. qs-STAT®), dass diese Anhebung in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang automatisch erfolgt.

> *ANMERKUNG 1: Grundidee ist, dass die untere Vertrauensgrenze, die für $n = 50$ Teile gilt, auch im Fall $n < 50$ Teile nicht unterschritten wird. Weitere Einzelheiten werden im Anhang I.1 erläutert.*

> *ANMERKUNG 2: Reduktionen des Stichprobenumfangs unter $n = 50$ sollten grundsätzlich mit der lokalen, qualitätsverantwortlichen Stelle abgestimmt werden.*

Sofern keine geeignete Statistik-Software zur Verfügung steht, ist alternativ folgende zweistufige Vorgehensweise möglich:

1. Von den $n = 50$ nacheinander gefertigten Teilen wird zunächst nur jedes 2. Teil vermessen, d. h. die Teile Nr. 2, 4, 6, ..., 50. Man erhält so 25 Messwerte (pro Merkmal). Die Maschine ist fähig, wenn der aus diesen 25 Werten berechnete Fähigkeitsindex das Kriterium $C_{mk} \geq 2{,}0$ erfüllt.
2. Wird lediglich $1{,}67 \leq C_{mk} < 2{,}0$ erreicht, werden auch die übrigen 25 Teile Nr. 1, 3, 5, …, 49 vermessen und die bereits vorliegenden Messwerte um diese Messergebnisse ergänzt. Die Maschine ist fähig, wenn der aus diesen ingesamt 50 Werten berechnete Fähigkeitsindex das Kriterium $C_{mk} \geq 1{,}67$ erfüllt.

Der erste Schritt dieses Vorgehens ist mit einer Reduktion des Stichprobenumfangs auf $n = 25$ Teile und entsprechender Anhebung der Mindestanforderungen vergleichbar. Der zweite Schritt beinhaltet eine Art „Zusatzoption auf Nachbesserung“, falls das Ziel mit Schritt 1 nicht erreicht wird. Es ist allerdings nur in Ausnahmefällen plausibel (z. B. bei sehr aufwändigen Messungen), wenn nicht alle Teile gemessen und ausgewertet werden, die ohnehin verfügbar sind.

> *ANMERKUNG 3: Die vertragliche festgelegte Forderung gegenüber dem Maschinenhersteller bleibt weiterhin $C_{mk} \geq 1{,}67$ bei $n = 50$ Teilen. Eine Maschinenabnahme entsprechend obiger Vorgehenweise ($C_{mk} \geq 2{,}0$ bei $n = 25$ Teilen) ist jedoch auch beim Maschinenhersteller zulässig.*

# 5 Prozessfähigkeit (Kurzzeit)

Bei Untersuchungen der Maschinenfähigkeit (Kap. 4) werden Merkmale von Erzeugnisteilen ausgewertet, die in einem kontinuierlichen Fertigungslauf in ununterbrochener Folge hergestellt wurden, so dass **möglichst nur** die Einflussgröße Maschine wirksam ist.

Im Gegensatz dazu stammen die zu vermessenden Erzeugnisteile bei Untersuchungen der Langzeitprozessfähigkeit (Kap. 6) aus einem größeren, für die Serienfertigung repräsentativen Zeitraum, so dass **möglichst alle** Einflüsse auf den Prozess wirksam werden, die zu erwarten sind.

Insbesondere bei Serienanlauf sind häufig weder genügend Erzeugnisteile verfügbar noch können dem Fertigungsprozess Teile über einen ausreichend langen Zeitraum entnommen werden. Trotzdem kann alternativ oder zusätzlich zur Maschinenfähigkeit zumindest eine vorläufige Aussage über die zu erwartende Fertigungsprozessfähigkeit gefordert werden (vgl. *„Initial Process Capability“* [AIAG PPAP] und *„Vorläufige Prozessfähigkeit“* [VDA-4]). In diesem Fall wird eine Kurzzeituntersuchung durchgeführt, die sich von der Langzeituntersuchung in den folgenden Punkten unterscheiden *kann*.

- **Art der Probennahme:** Die zu untersuchenden Teile dürfen dem Fertigungsprozess über einen kürzeren Zeitraum in kürzerer Folge entnommen werden, falls nötig im Extremfall auch unmittelbar nacheinander.
- **Anzahl Teile:** Sofern nicht ausreichend Teile zur Verfügung stehen, ist es zulässig, weniger als die für die Langzeituntersuchung erforderlichen 125 Teile zu entnehmen.
- **Grenzwerte für Fähigkeits- und Leistungsindizes:** Bei mehr als 125 Teilen gilt der erhöhte Grenzwert 1,67. Bei weniger als 125 Teilen wird der Grenzwert abhängig von der Teilezahl auf den gleichen Wert angehoben wie bei der Langzeituntersuchung mit Mindermengen (s. Anhang I).
- **Bezeichnung der Kennwerte:** Fähigkeitsindizes werden mit $C_{p-ST}$ und $C_{pk-ST}$ bezeichnet, Leistungsindizes mit $P_{p-ST}$ und $P_{pk-ST}$ *(Kurzzeit, engl. <u>s</u>hort <u>t</u>erm)*.

Die Auswertung der Daten erfolgt in exakt derselben Weise wie bei der Langzeituntersuchung (Kap. 6).

*ANMERKUNG: Die Angaben zu Stichprobenumfängen und Fähigkeitsanforderungen gelten zum Zeitpunkt der Drucklegung der vorliegenden Richtlinie. Maßgeblich ist die aktuell gültige Ausgabe der [CDQ 0301].*

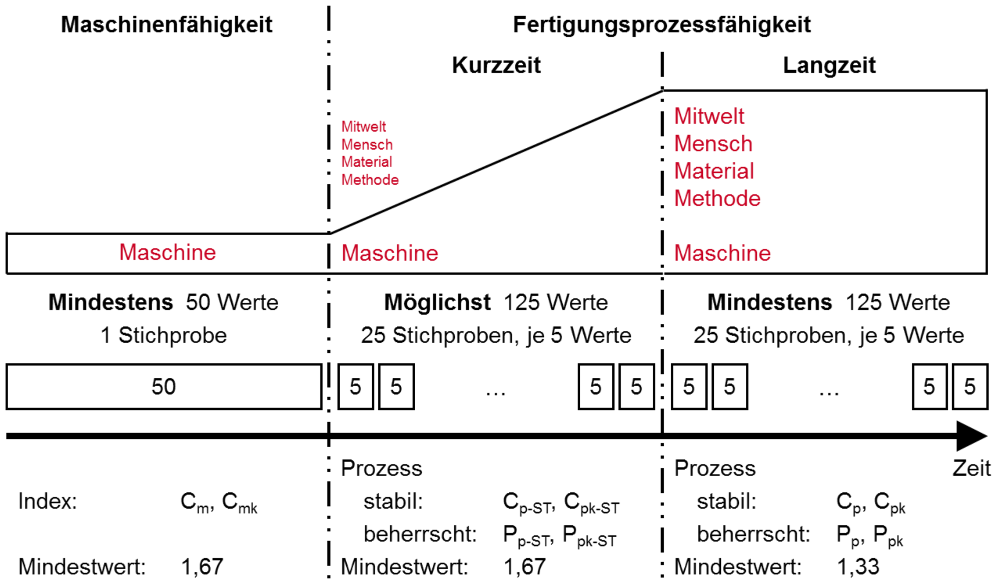



Abbildung 3: Maschinenfähigkeit, Kurz- und Langzeitfähigkeit eines Fertigungsprozesses

Je weniger Teile zur Verfügung stehen und je kürzer der Entnahmezeitraum ist, so dass die Teile dem Fertigungsprozess in zunehmend unmittelbarer Folge entnommen werden müssen, umso mehr entspricht die Kurzzeitfähigkeit der Maschinenfähigkeit. Je mehr Teile zur Verfügung stehen und je länger der Zeitraum ist, über den die Teile entnommen werden, umso mehr entspricht die Kurzzeitfähigkeit der Langzeitfähigkeit. Grundsätzlich sollte die Kurzzeituntersuchung einer Langzeituntersuchung so nahe wie möglich kommen.

# 6 Prozessfähigkeit (Langzeit)

Die Prozessfähigkeit ist das Ergebnis einer längerfristigen Untersuchung. Zusätzlich zu den rein maschinenbedingten Einflüssen sollen möglichst alle Einflüsse erfasst werden, die auf den Fertigungsprozess während einer längeren Betriebszeit einwirken. Diese Störeinflüsse lassen sich durch die Oberbegriffe Mensch, Maschine, Material, Methode und Milieu (Umwelt) in Kategorien zusammenfassen, häufig mit *5M* abgekürzt.

## Auswertekonfiguration

Die Auswertekonfiguration zur Prozessfähigkeit besteht im Wesentlichen aus den 3 Bereichen (Hauptästen), die in der folgenden Abbildung grau hinterlegt sind. Die Verteilungsmodelle (Prozessergebnisverteilungen) nach [ISO 22514-2] des linken Bereichs werden gewählt, wenn Lage und Streuung des Prozesses stabil sind. Bei instabilem Prozessverhalten verzweigt der Auswertealgorithmus in den mittleren oder rechten Bereich. Die zugehörigen Kenngrößen heißen dann Prozessleistungsindex (engl.: performance index) $P_p$ und $P_{pk}$.

| Prozess-verhalten: | Prozess-Streuung stabil<br>Prozesslage stabil | Prozess-Streuung stabil<br>Prozesslage instabil | Prozess-Streuung instabil |
|---|---|---|---|
| Verteilungs-modell: | A1, A2 | C1, C2, C3, C4 | B, D |
| Index: | $C_p$, $C_{pk}$ | $P_p$, $P_{pk}$ | $P_p$, $P_{pk}$ |

⇓ ⇓ ⇓

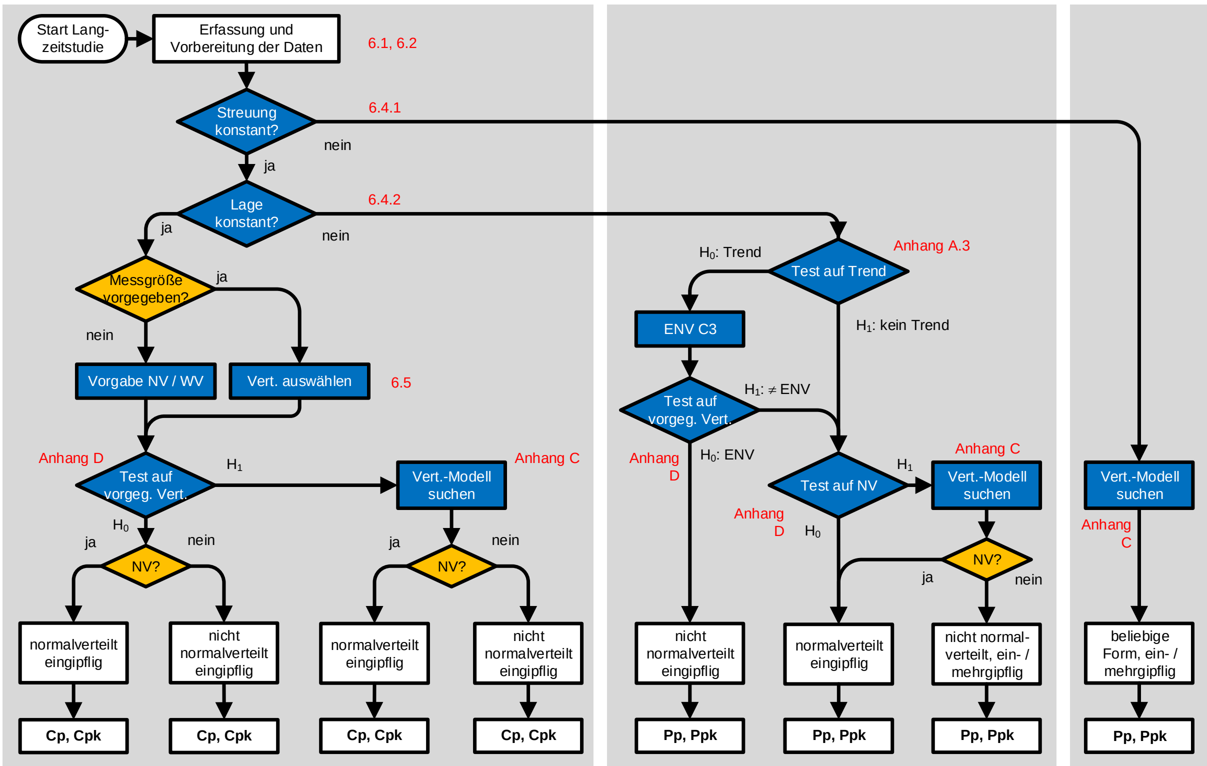



Abbildung 4: Auswertekonfiguration zur Prozessfähigkeitsuntersuchung

## 6.1 Datenerfassung

Die Untersuchung erfordert, der Fertigungsmenge eine repräsentative Anzahl, mindestens aber 125 nicht verlesene Teile (z. B. $m = 25$ Stichproben jeweils mit Stichprobenumfang $n = 5$) über einen ausreichend langen Zeitraum zu entnehmen, so dass möglichst alle zu erwartenden Störeinflüsse auf den Prozess wirken können.

*ANMERKUNG 1: In Sonderfällen kann es unumgänglich sein, mit weniger als 125 Teilen auszukommen, z. B. bei sehr aufwändigen Messverfahren oder zerstörender Prüfung. In diesen Fällen verringert sich allerdings die „Verlässlichkeit" der statistischen Aussage mit abnehmendem Stichprobenumfang, d. h. der Vertrauensbereich für den daraus berechneten Kennwert wird größer. Dies kann bis zu einem gewissen Grad kompensiert werden, indem die Grenzwerte für die Fähigkeits- und Leistungskennwerte angehoben werden (siehe Anhang I.1 bzgl. weiterer Informationen). Reduzierte Stichprobenumfänge sollten mit der qualitätsverantwortlichen Stelle abgestimmt werden.*

*ANMERKUNG 2: [VDA 4] empfiehlt einen Zeitraum von mindestens 20 Produktionstagen. Dies ist jedoch nur als grober Anhaltspunkt zu sehen. Stattdessen sollte der Zeitraum auf das Verhalten und die Rand- und Umgebungsbedingungen des jeweiligen Prozesses sinnvoll abgestimmt werden.*

Bei der Datenerfassung sind drei Fälle zu unterscheiden.

**Fall 1: Erster Fähigkeitsnachweis während der Anlaufphase**

Für die erste Analyse während der Anlaufphase eines Fertigungsprozesses werden die Daten in der Regel speziell zur Ermittlung von Fähigkeitskennwerten erfasst.

Zu diesem Zeitpunkt liegt meist keine verwertbare Information zum Prozessverhalten vor, so dass ein auf diesen Prozess abgestimmtes Intervall zur Entnahme der einzelnen Stichproben abgeschätzt werden muss. Nationale und internationale Normen und Richtlinien enthalten dazu keine Vorgaben oder Anhaltspunkte. Das nachstehend beschriebene Vorgehen ist ein in der Praxis gängiger, halbquantitativer Ansatz.

Dürfen höchstens 75 % des Toleranzintervalls genutzt werden (entsprechend $C_{pk} = 1{,}33$) und liegt der Sollwert in der Mitte dieses Intervalls, dürfen die Abweichungen der Stichprobenmittelwerte von diesem Sollwert nicht größer werden als $\pm 37{,}5$ % der Toleranz T.

*ANMERKUNG 3: Bei höheren Anforderungen wie z. B. höchstens 60 % oder 50 % Toleranzausnutzung (entsprechend $C_{pk}$ = 1,67 bzw. $C_{pk}$ = 2,00) verringern sich die maximal akzeptablen Abweichungen auf ±30 % bzw. ±25 % der Toleranz T.*

*ANMERKUNG 4: Liegt der Sollwert nicht in der Mitte des Toleranzintervalls, ist diese Unsymmetrie zu berücksichtigen. Beispiel: Sollwert 5,0 mm, Spezifikationsgrenzen 4,9 mm und 5,4 mm, d. h. Toleranz 0,5 mm, davon 0,1 mm (20 %) unterhalb und 0,4 mm (80 %) oberhalb des Sollwertes; normierte Grenzwerte bei höchstens 75 % Toleranzausnutzung: −15 % (entsprechend −0,075 mm, d. h. 75 % von −0,1 mm) bzw. +60 % (entsprechend 0,3 mm, d. h. 75 % von 0,4 mm). Null-begrenzte Merkmale stellen einen Extremfall unsymmetrischer Intervalle dar, d. h. Abweichungen in eine Richtung entfallen.*

Zur Visualisierung des Prozessverhaltens ist die Darstellung der Mittelwerte als Zeitreihendiagramm mit Grenzlinien im Abstand von z. B. $\pm 37{,}5$ % der Toleranz T zum Sollwert zweckmäßig.

*ANMERKUNG 5: Ein solches Zeitreihendiagramm ist lediglich ein temporäres Hilfsmittel und nicht mit einer Qualitätsregelkarte zu verwechseln oder als solche verwendbar.*

In der Regel ist es sinnvoll, mit einem möglichst kurzen Stichprobenintervall (z. B. mehreren Stichproben pro Schicht) zu beginnen und dieses Intervall sukzessive den Beobachtungen anzupassen.

- Alle Mittelwerte liegen innerhalb der Abweichgrenzen, die Änderungen von Wert zu Wert sind gut erkennbar und unsystematisch (zufällig): Stichprobenintervall angemessen; keine Maßnahmen erforderlich.
- Alle Mittelwerte liegen innerhalb der Abweichgrenzen, jedoch sind keine oder nur minimale Änderungen von Wert zu Wert erkennbar: Stichprobenintervall möglicherweise zu kurz; Intervall verlängern (z. B. verdoppeln); Anpassung erforderlichenfalls mehrfach wiederholen.
- Einige Mittelwerte liegen außerhalb der Abweichgrenzen: Stichprobenintervall möglicherweise zu lang; Intervall verkürzen (z. B. halbieren); Anpassung erforderlichenfalls mehrfach wiederholen.

Führen auch mehrfache Anpassungen des Stichprobenintervalls nicht zum Erfolg, sollte nach möglichen Ursachen für dieses Prozessverhalten gesucht und diese ggf. beseitigt werden.

**Fall 2: Revalidierung der Fähigkeit von Prozessen, die mittels Regelkarten überwacht werden**

Wird ein laufender Fertigungsprozess mittels Qualitätsregelkarte überwacht (SPC-Prozess), werden die zuletzt erfassten Daten der Regelkarten zur regelmäßigen Überprüfung (Revalidierung) der Prozessfähigkeit herangezogen. Das Stichprobenintervall, das während einer einzelnen Revalidierung verwendet wird, ist daher identisch mit dem Stichprobenintervall der Regelkarten [Heft 7].

**Fall 3: Revalidierung der Fähigkeit von Prozessen, die nicht mittels Regelkarten überwacht werden**

Bei allen übrigen Prozessen werden die Daten in bestimmten zeitlichen Abständen wie in der Anlaufphase speziell zur Überprüfung und laufenden Verifikation der Fähigkeitskennwerte erfasst. Für eine einzelne Revalidierung wird in der Regel das Stichprobenintervall verwendet, das in der Anlaufphase ermittelt und ggf. später weiter optimiert wurde.

**In allen Fällen** werden die Merkmale an jedem Teil gemessen und die Ergebnisse für jedes Merkmal entsprechend der Produktionsreihenfolge dokumentiert. Die Auswertung der Messdaten erfolgt unabhängig davon, wie die Daten erfasst wurden.

## 6.2 Ausreißer

Die Datenauswertung im Rahmen der Prozessfähigkeitsuntersuchung setzt voraus, dass der zu analysierende Datensatz keine „Ausreißer“ enthält. Dies gilt insbesondere für die statistischen Tests in Abschnitt 6.3 sowie in den Anhängen B und D. Unter Ausreißern versteht man einzelne Werte, die sich „deutlich von der Mehrheit der übrigen Daten unterscheiden“. Ursachen können z. B. menschliche Irrtümer (Eingabe- und Übertragungsfehler, Verwechslungen, Fehlbedienungen) oder fehlerhafte Messsysteme sein. Ausreißer können z. B.

- zur Auswahl/Zuordnung einer anderen Verteilungs-Klasse (symmetrisch, asymmetrisch) oder
- zur Auswahl/Zuordnung einer anderen individuellen Verteilung oder
- zu einer größeren Schätzung der Streubreite führen, oder
- systematische zeitliche Veränderungen vortäuschen.

Die Auswertungen eines Datensatzes mit und ohne die potenziellen Ausreißer liefern im Allgemeinen unterschiedliche Ergebnisse in den Fähigkeits- oder Leistungskennwerten.

Man kann nicht sicher ausschließen, dass sich zunächst als Ausreißer betrachtete Werte im Nachhinein als korrekte Messwerte und wichtige Information herausstellen. Falls bei kleinen Datensätzen ein oder mehrere Ausreißer von der Auswertung ausgeschlossen wurden, sollte man beobachten, ob und wie sich mit zunehmender Datenbasis die Auswerteergebnisse zeitlich verändern.

Was ist aber ein „deutlicher Unterschied zur Mehrheit der Daten“? Um die Entscheidung darüber zu objektivieren, arbeitet man in der Regel mit den folgenden Optionen.

**Plausibilitätsgrenzen**

qs-STAT® bietet die Möglichkeit, sogenannte Plausibilitätsgrenzen vorzugeben. Sie können z. B. technisch unmögliche Wertebereiche ausschließen. Liegt ein Merkmalswert außerhalb dieser Grenzen, so wird er als Ausreißer betrachtet und von der Auswertung ausgeschlossen (aber nicht gelöscht).

**Ausreißertest**

Des Weiteren besteht die Möglichkeit, den Datensatz auf der Basis statistischer Kriterien auf Ausreißer zu untersuchen. Viele in der Literatur aufgeführte Ausreißertests basieren aber auf einem konkreten Verteilungsmodell. Im vorliegenden Fall können diese Tests nicht eingesetzt werden, da die Zuordnung eines Verteilungsmodells erst später erfolgt.

Der Ausreißertest nach Hampel betrachtet den Betrag der Abweichung eines potenziellen Ausreißers vom Median der Einzelwerte im Verhältnis zur Streuung der Einzelwerte [Hampel], [Sachs], [Schulze].

$|r_i|$ ist der Betrag der Abweichung des Einzelwerts $x_i$ vom Median $\tilde{x}$ der Einzelwerte: $|r_i| = |x_i - \tilde{x}|$.

$\tilde{r}$ ist der Median dieser Abweichungen $|r_i|$ und wird auch als Mediandeviation (engl.: Median Absolute Deviation, MAD) bezeichnet. $x_i$ wird als Ausreißer betrachtet, wenn $\frac{|r_i|}{\tilde{r}} \cdot 0{,}6745 \geq T_{(n;\,1-\alpha)}$. Für $n = 125$ und $(1-\alpha) = 95\ \%$ ist $T$=3,8. Der Test ist in der Lage, auch mehrere Ausreißer zu erkennen.

*Anmerkung: Im Fall einer Normalverteilung ist die Größe $\frac{\tilde{r}}{0{,}675}$ ein erwartungstreuer Schätzer der Stichproben-Standardabweichung $\sigma$.*

In dieser von Hampel beschriebenen ursprünglichen Form ist der Test für symmetrische Verteilungen gedacht. Schwächen bei der Anwendung auf asymmetrische Verteilungen können durch den Ansatz von [Kölling] beseitigt werden. Dazu werden in qs-STAT® für Ausreißer unterhalb und oberhalb des Medians unter Verwendung des Hampelschen Schwellenwerts $T_{(n;\,1-\alpha)}$ unterschiedliche Grenzwerte berechnet:

$$HG_p = \tilde{x} - \frac{\tilde{x} - \hat{Q}_p}{u_{1-p}} \cdot T_{(n;\,1-\alpha)} \qquad HG_{1-p} = \tilde{x} + \frac{\hat{Q}_{1-p} - \tilde{x}}{u_{1-p}} \cdot T_{(n;\,1-\alpha)}$$

Beispiel:

$$HG_{5\%} = \tilde{x} - \frac{\tilde{x} - \hat{Q}_{5\%}}{u_{95\%}} \cdot T_{(n;\,1-\alpha)} \qquad HG_{95\%} = \tilde{x} + \frac{\hat{Q}_{95\%} - \tilde{x}}{u_{95\%}} \cdot T_{(n;\,1-\alpha)}$$

$\hat{Q}_p$ ist das empirische $p$%-Quantil der Stichprobe, $u_{1-p}$ das $(1-p)$-Quantil der Standardnormalverteilung. Für den Parameter $p$ empfiehlt [Kölling] je nach Stichprobenumfang $n$ unterschiedliche Werte, z. B. $p = 5\ \%$ für $n = 125$.

## 6.3 Klassierung und Rundung

**Klassierung**

Offensichtlich hat die Klasseneinteilung, d. h. die Anzahl von Klassen und die Klassenbreite, einen großen Einfluss auf das „Aussehen“ eines Histogramms. In der statistischen Literatur gibt es zahlreiche Faustregeln für diese Wahl oder Festlegung (siehe z. B. [Heft 1]). Gründe dafür sind z. B. die Vergleichbarkeit verschiedener Datensätze desselben Merkmals oder die Relevanz bei der Anwendung des Chi-Quadrat-Tests. qs-STAT® wählt als Klassenbreite ein ganzzahliges Vielfaches der Auflösung.

**Rundung**

Runden bedeutet, den Wert einer Zahl durch das ganzzahlige Vielfache eines Rundestellenwerts (en: place value) zu ersetzen [DIN EN 80000-1]. Das Thema betrifft einerseits den Aspekt der Rundungsregeln (siehe [DIN 1333]), andererseits aber auch den messtechnischen Aspekt.

Nach [GUM] dürfen Zahlenwerte für ein Messergebnis $x$ nicht mit einer übermäßigen Anzahl Stellen angegeben werden. Insbesondere ist es nicht sinnvoll, das Messergebnis mit mehr als einer zusätzlichen Dezimalstelle anzugeben, als der Auflösung des Messsystems entspricht. Weitere Dezimalstellen sind mit der eingesetzten Messeinrichtung nicht zu erfassen und daher wertlos (vgl. [Heft 8]).

*Anmerkung: Rundung, Gruppierung und Klassierung können die Zuordnung des Verteilungsmodells beeinflussen und damit die Ergebnisse für die Fähigkeits- und Leistungskennwerte. Beispielsweise hat die Klassierung über die Häufigkeiten im Histogramm einen möglichen Einfluss auf das Ergebnis des Chi-Quadrat-Tests.*

## 6.4 Untersuchung der Prozess-Stabilität

Im nächsten Schritt wird festgestellt, ob die Messwerte zeitlich stabil sind oder nicht. Ziel der Analyse ist, als Ergebnis der Fähigkeitsuntersuchung einen Kennwert angeben zu können, unabhängig davon ob der Prozess z. B. einen Trend oder Chargensprünge aufweist oder nicht.

Kennzeichnend für stabile Prozesse sind folgende, inhaltlich gleichwertige Informationen:

- Mittelwert und Streuung sind (nahezu) konstant.
- Es treten keine systematischen Mittelwertsveränderungen auf (z. B. Trends, Chargensprünge).
- Zwischen Stichprobenstreuung und Gesamtstreuung besteht kein signifikanter Unterschied.
- Jede einzelne Stichprobe repräsentiert bzgl. Lage und Streuung den Gesamtprozess.

Die Untersuchung der Zeitreihe umfasst zunächst die Aspekte Stabilität der Prozessstreuung und Stabilität der Prozesslage. Bei instabiler Lage erfolgt zur weiteren Differenzierung ein Test auf Trend. Siehe Anhang A.3.

**Test auf Stabilität der Prozess-Streuung**

Eine instabile Prozessstreuung deutet darauf hin, dass das Prozessverhalten im Grunde statistisch nicht erklärbar und der Prozess somit nicht beherrscht ist. Es ist notwendig, die Ursachen für dieses „chaotische“ Verhalten zu untersuchen, zu beseitigen und die Fähigkeitsuntersuchung zu wiederholen.

- Mit Cochrans C-Test lässt sich feststellen, ob sich die größte der Varianzen von k Stichproben signifikant von den Varianzen der übrigen Stichproben unterscheidet. Siehe Anhang A.1.1.
- Varianzanalyse und F-Test (Anhang A.1.2 und [Heft 3])
- Der Test in Anhang B.2 verwendet die Streuung der Einzelstichproben.

**Test auf Stabilität der Prozess-Lage**

Eine instabile Prozesslage deutet darauf hin, dass es nicht-zufällige Einflüsse auf das Prozessverhalten gibt. Die Auswertekonfiguration verzweigt in diesem Fall in den mittleren Bereich, siehe Abb. 4.

Zur Stabilitätsprüfung stehen folgende Möglichkeiten zur Verfügung:

- Kruskal-Wallis-Test (Anhang A.2.1)
- Lage der Einzelstichproben (Anhang B.1)
- Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte (Anhang B.3)

## 6.5 Untersuchung der statistischen Verteilung

Die gemessenen Merkmalswerte werden als Realisationen einer statistischen Zufallsgröße interpretiert. Insbesondere wird vorausgesetzt, dass die vermessenen Teile repräsentativ für die in Zukunft noch zu fertigenden Teile sind. Wenn in diesem Zusammenhang von einer „Grundgesamtheit“ die Rede ist, darf man nicht vergessen, dass diese eine fiktive, noch nicht existierende Menge von Objekten ist. Durch Formulierungen wie z. B. „Ermittlung der Verteilungsform“ wird möglicherweise der Eindruck erweckt, als stecke hinter den Messwerten eine bestimmte Verteilung, die zunächst nicht bekannt ist, die man aber mit statistischen Methoden objektiv feststellen könne.

Tatsächlich kann man lediglich ein Verteilungsmodell (z. B. Normalverteilung) auswählen und durch statistische Tests prüfen, ob die Messwerte mit diesem Modell zumindest näherungsweise verträglich sind (vgl. Anhänge C und D). Alle weiteren aus dem Modell abgeleiteten Aussagen stehen und fallen mit dessen Gültigkeit.

Die Norm [ISO 22514-2] stellt qualitativ 8 zeitabhängige Verteilungsmodelle (Prozessergebnisverteilungen) dar, die zur Beschreibung realer Fertigungsprozesse geeignet sind. „Qualitativ“ bedeutet hier, dass lediglich angegeben wird, wie sich die resultierende Verteilung aus einer „Momentanverteilung“ mit zeitlich veränderlichen Lage- und Streuparametern ergibt und ob dabei eine ein- oder mehrgipflige Verteilung entsteht.

*ANMERKUNG 1: Die „Momentanverteilung“ kann man als Verteilung verstehen, die durch eine einzelne Stichprobe repräsentiert wird, deren Einzelwerte quasi gleichzeitig erfasst werden, d. h. mit sehr geringem zeitlichem Abstand. Die zeitliche Entwicklung der „Momentanverteilung“ wird dann durch die Verteilungen der verschiedenen Einzelstichproben repräsentiert, die in größerem zeitlichen Abstand voneinander erfasst werden.*

*ANMERKUNG 2: Damit wird auch die Sichtweise von [AIAG SPC] verständlich, dass auf Basis von Einzelstichproben ermittelte Fähigkeiten als „Kurzzeitfähigkeiten“ betrachtet werden (siehe hierzu auch Anhang H).*

Für den Anwender besteht die Aufgabe, die *„richtige“*, d. h. die den vorliegenden Messdaten unter Berücksichtigung der technischen Gegebenheiten bestmöglich angepasste Verteilung auszuwählen.

*ANMERKUNG 3: Die Auswahl sinnvoller Verteilungsmodelle muss sich grundsätzlich daran orientieren, welche Modelle auf Basis der jeweils bekannten physikalischen und technischen Randbedingungen möglich und sinnvoll sind. Die Auswahl darf keinesfalls willkürlich erfolgen, d. h. auf rein mathematischer Basis unter dem Gesichtspunkt, ein möglichst optimales Ergebnis für die Fähigkeiten zu erreichen (siehe Anhang C.4).*

Die drei Tests nach Abschnitt 6.4 auf Stabilität der Streuung, Stabilität der Lage und Trend stellen eine Art „Filter“ dar, mit dem eine grobe Zuordnung zu einem der Prozessergebnisverteilungen nach [ISO 22514-2] erfolgt (siehe Anhang E, Tabelle 4). Mit Hilfe der Verfahren nach Anhang C, insbesondere C.2, können dann folgende Verteilungen in geeigneter Weise explizit zugeordnet werden:

- Normalverteilung
- Logarithmische Normalverteilung
- Betragsverteilung 1. Art
- Betragsverteilung 2. Art (Rayleigh-Verteilung)
- Weibull-Verteilung
- erweiterte Normalverteilung
- Mischverteilung

Sofern keine automatisierte Verteilungsanpassung zur Verfügung steht, kann die Auswahl einer bestmöglich angepassten Verteilung z. B. durch Darstellung der Einzelwerte in den Wahrscheinlichkeitsnetzen der in Frage kommenden Verteilungen (vgl. hierzu auch Anhang C) oder durch statistische Anpassungstests erleichtert werden.

## 6.6 Berechnung von Fähigkeits- und Leistungskennwerten

Die Berechnungsmethoden für Fähigkeits- und Leistungskennwerte werden in Kap. 8 dargestellt.

Als **Standardmethode** zur Berechnung von Kennwerten der Prozessfähigkeit und -leistung wird die Quantilmethode $M_{2,1}$ nach [ISO 22514-2] eingesetzt (siehe Kap. 8.2). Dies ist die einzige Methode, die für alle Prozessergebnisverteilungen nach [ISO 22514-2] ohne Einschränkung verwendbar ist. Die Berechnungen erfordern allerdings den Einsatz geeigneter Statistik-Software (z. B. qs-STAT®).

Daten, die in guter Näherung durch eine **Normalverteilung mit stabiler Lage**[6] beschrieben werden können, könnten alternativ auch mit allen nach [ISO 22514-2] möglichen Methoden ausgewertet werden (siehe Kap. 8.3 und Anhang E, Tabelle 4). In der Praxis kommen davon meist die Methoden $M_{3,2}$, $M_{3,3}$, $M_{3,4}$ und $M_{3,5}$ zum Einsatz. Alle alternativen Berechnungen können auch „von Hand“ durchgeführt werden (oder z. B. mit Hilfe von MS-EXCEL®).

**Andere eingipflige Verteilungen mit stabiler Lage**[7] könnten alternativ zu $M_{2,1}$ insbesondere noch mit den Methoden $M_{2,5}$ und $M_{4,5}$ nach [ISO 22514-2] ausgewertet werden, die ebenfalls Berechnungen „von Hand“ erlauben (siehe Kap. 8.3). Da keine Information über das Verteilungsmodell vorliegt und daher $s_{total}$ benutzt wird, führen diese Methoden im Vergleich zu $M_{2,1}$ in der Regel zu ungünstigeren Ergebnissen.

Für alle übrigen Verteilungsmodelle ist mit wenigen Ausnahmen (siehe Anhang E, Tabelle 4) die Quantilmethode $M_{2,1}$ erforderlich.

## 6.7 Kriterien für Prozessfähigkeit und -leistung

Langzeitfähigkeit und -leistung eines Fertigungsprozesses setzen die dauerhafte Einhaltung vorgegebener Grenzwerte voraus. Maßgeblich für die aktuellen Grenzwerte ist [CDQ 0301] in der jeweils gültigen Fassung. Zum Zeitpunkt der Veröffentlichung der vorliegenden Ausgabe von Heft 9 gelten folgende Anforderungen und Grenzwerte:

| Stabiler Prozess | Anforderung | Beherrschter Prozess | Anforderung |
|---|---|---|---|
| Anzahl Teile (Messwerte) | $m \cdot n \geq 125$ | Anzahl Teile (Messwerte) | $m \cdot n \geq 125$ |
| Potentieller Fähigkeitsindex | $C_p \geq 1{,}33$ | Potentieller Leistungsindex | $P_p \geq 1{,}33$ |
| Kritischer Fähigkeitsindex | $C_{pk} \geq 1{,}33$ | Kritischer Leistungsindex | $P_{pk} \geq 1{,}33$ |

*ANMERKUNG: Die Grenzwerte sind als absolute Mindestanforderungen zu betrachten, die nicht unterschritten werden sollen und anhand von z. B. $m = 25$ Stichproben mit Stichprobenumfang $n = 5$ ermittelt werden, so dass $m \cdot n \geq 125$ Teile (Messwerte). Die Anforderungen können abhängig vom Anwendungsfall angehoben werden.*

Werden die Fähigkeits- bzw. Leistungskriterien nicht erfüllt, ist eine Ursachenanalyse und ggf. eine Wiederholung der Fähigkeitsstudie erforderlich.

[6] Verteilungsmodell A1 nach [ISO 22514-2]

[7] Verteilungsmodelle A2 und B nach [ISO 22514-2]

# 7 Verteilungsmodelle

In diesem Kapitel werden die Dichtefunktionen der im Zusammenhang mit den Fähigkeitsuntersuchungen gebräuchlichen Verteilungen dargestellt, um eine Vorstellung von den typischen Verläufen zu vermitteln. Details dazu findet man z. B. in [Hartung], [Sachs], (Wilrich], [Schulze].

Anmerkung zum Sprachgebrauch: Wenn von einer statistischen Verteilung die Rede ist, assoziiert man diesen Begriff meist mit der grafischen Darstellung (dem Graph) ihrer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, z. B. der Gaußschen Glockenkurve in 7.1. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion [Heft 3]. In der industriellen Praxis werden die Begriffe meist synonym gebraucht.

**Vorgegebene Verteilungen**

[CDQ 0301] gibt für bestimmte Merkmale, insbesondere Merkmale der „Form, Richtung, Ort und Lauf" nach [ISO 1101] eine Auswahl von Verteilungen vor, die sich erfahrungsgemäß zur Beschreibung der zugehörigen Messdaten eignen. Die meisten dieser Merkmale können nur Werte größer null annehmen. Folglich haben die ihnen zugeordneten Verteilungsmodelle eine natürliche untere Grenze bei null und heißen auch rechtsschiefe Verteilungen. Beispiele sind die Betragsverteilungen 1. Art und 2. Art. Mit ihnen kann eine Vielzahl empirischer Verteilungen dieser Merkmale abgedeckt werden.

Zu einseitig und natürlich begrenzten Merkmalen siehe auch Anhang K.

## 7.1 Normalverteilung

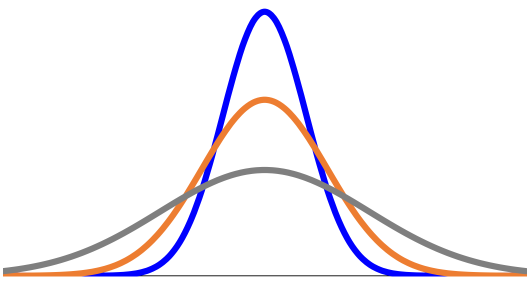


Abbildung 5: Normalverteilung (Dichtefunktionen)

Die Normalverteilung repräsentiert statistisch gesehen den Idealfall, der mathematisch relativ einfach behandelt werden kann, der aber bei realen Prozessen häufig nicht einmal näherungsweise erreicht wird.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

für $-\infty \leq x \leq \infty$

*ANMERKUNG 1: Zur Fähigkeit und Leistung von Prozessen sind von internationalen, regionalen und nationalen Normungsgremien sowie auch von der Industrie zahlreiche Normen veröffentlicht worden. Alle diese Normen gehen davon aus, dass der betrachtete Prozess stabil ist und einer stationären Normalverteilung folgt. Eine umfassende Analyse von Produktionsprozessen zeigt jedoch, dass Prozesse über die Zeit gesehen sehr selten in einem solchen Zustand verbleiben (in unmittelbarer Anlehnung an [ISO 22514-2], Einleitung).*

*ANMERKUNG 2: Wenn keine Normalverteilung vorliegt, ist es nicht zulässig, dies zu ignorieren und unter Annahme einer Normalverteilung*

- *auf der Basis des arithmetischen Mittelwerts* $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ *und der empirischen Standardabweichung* $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ *Vergleiche mit vorgegebenen Grenzwerten und der entsprechenden Toleranz eines Merkmals anzustellen, oder*
- *mit Hilfe von* $\bar{x}$ *und* $s$ *Grenzwerte und eine Toleranz für ein Merkmal zu berechnen.*

*Insbesondere ist es nicht sinnvoll, bei einer schiefen Verteilung symmetrische Grenzen* $\bar{x} \pm 3 \cdot s$ *um den Mittelwert anzugeben.*

## 7.2 Logarithmische Normalverteilung

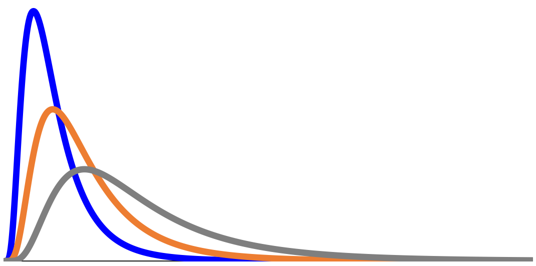


Abbildung 6: Lognormalverteilung (Dichtefunktionen)

Der Graph der Dichtefunktion der logarithmischen Normalverteilung (auch Lognormalverteilung genannt) zeigt eine asymmetrische, nullbegrenzte Kurve, die rechts flach ausläuft.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} \cdot x} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

für $x > 0$

Logarithmiert man die Werte einer solchen Verteilung, so findet man, dass die Ergebnisse normalverteilt sind. Eine stetige Zufallsvariable X heißt logarithmisch normalverteilt (lognormalverteilt), wenn $Y = ln(X)$ normalverteilt ist. Der linke Teil der Lognormalverteilung wird durch diese Transformation also stark gestreckt, der rechte Teil stark gestaucht.

## 7.3 Betragsverteilung 1. Art

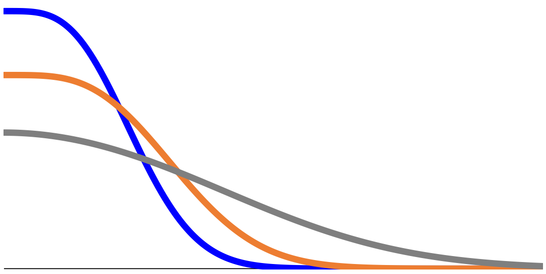


Abbildung 7: Betragsverteilung 1. Art (Dichtefunktionen)

Eine Betragsverteilung 1. Art ergibt sich z. B. für einige nullbegrenzte Merkmale der Form oder Lage, wie Geradheit, Ebenheit, Rundheit.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\mu}{\sigma}\right)^2}\right]$$

für $0 \leq x < \infty$

Da der Zielwert für solche Größen null ist, werden sich entsprechende Messwerte rechts des Nullpunkts häufen. Sie können aber nicht kleiner null werden.

Für den Spezialfall $\mu = 0$ ergibt sich eine sogenannte „Halbnormalverteilung“mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \qquad x > 0$$

## 7.4 Betragsverteilung 2. Art (Rayleigh-Verteilung)

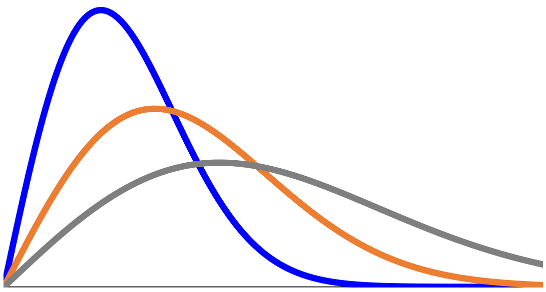


Abbildung 8: Rayleigh-Verteilung (Dichtefunktionen)

Durch diese Verteilung, auch Rayleigh-Verteilung genannt, beschreibbare Daten ergeben sich z. B., wenn eine zweidimensional normalverteilte Größe mit x- und y-Koordinate durch Berechnung des Betrags $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in eine eindimensionale Größe überführt wird.

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \qquad \text{für } x \geq 0$$

Das gilt u. a. für den Betrag einer „Unwucht“, wenn man statt der x- und y-Koordinate Polarkoordinaten mit Betrag und Richtung (Winkel) verwendet. Ein Beispiel zeigt Abbildung 25.

## 7.5 Weibull-Verteilung

Als generelle Option für natürlich begrenzte Merkmale bietet sich die Weibullverteilung an. Sie wird zwar häufig zur Auswertung von Lebensdauerdaten verwendet, eignet sich aber aufgrund ihrer Flexibilität in der zwei- oder dreiparametrigen Form auch im Falle beliebiger einseitig unten oder einseitig oben begrenzter Merkmale, sofern keine Verteilung vordefiniert ist.

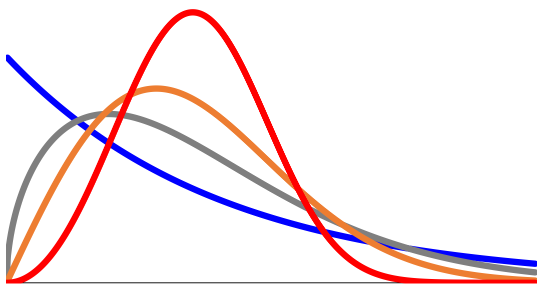


Abbildung 9: Weibull-Verteilungen (Dichtefunktionen)

In der zweiparametrigen Form ist die Weibullverteilung charakterisiert durch den Formparameter $\beta$ und den Lageparameter (Skalenparameter) $\alpha$.

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x^{\beta-1}}{\alpha} \; e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

für $x \geq 0$

Die Weibullverteilung entspricht für den Formparameter

$\beta = 1$ der Exponentialverteilung (blau) und für

$\beta = 2$ der Rayleigh-Verteilung (orange).

Für $\beta \approx 3{,}60235$ ergibt sich eine Verteilung, deren Schiefe verschwindend klein ist (rot). Sie ähnelt der Normalverteilung ist aber nur für $x \geq 0$ definiert.

## 7.6 Verteilungen für einseitig oben begrenzte Merkmale

In der Praxis sind einseitig oben begrenzte Merkmale vergleichsweise selten anzutreffen. Beispiele:

- Abreißkraft (von Drähten oder Klebeverbindungen)
- Haftfestigkeit (von Beschichtungen, Lacken)
- Berstdruck (von Membranen)
- Weiterdrehmoment oder Losbrechmoment (von Schraubverbindungen)

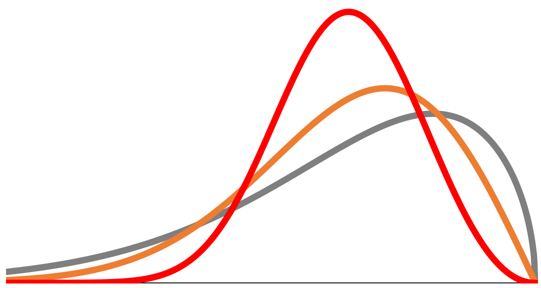


Abbildung 10: Weibull-Verteilungen (Dichtefunktionen) zur Größe $X^* = \mathrm{a} - \mathrm{X}$.

In solchen Fällen zeigen die Messdaten eine linksschiefe (rechts steile) Verteilung. Solche Merkmale haben also eine natürliche Grenze a, die nicht überschritten werden kann. Zu ihrer Beschreibung und Auswertung kommen die in den Abschnitten 7.2 und 7.3 genannten rechtsschiefen Verteilungen ebenso in Frage, sofern man die Messgröße X in $X^* = \mathrm{a} - \mathrm{X}$ transformiert. Ein Beispiel zeigt diese Abbildung.

## 7.7 Mischverteilung

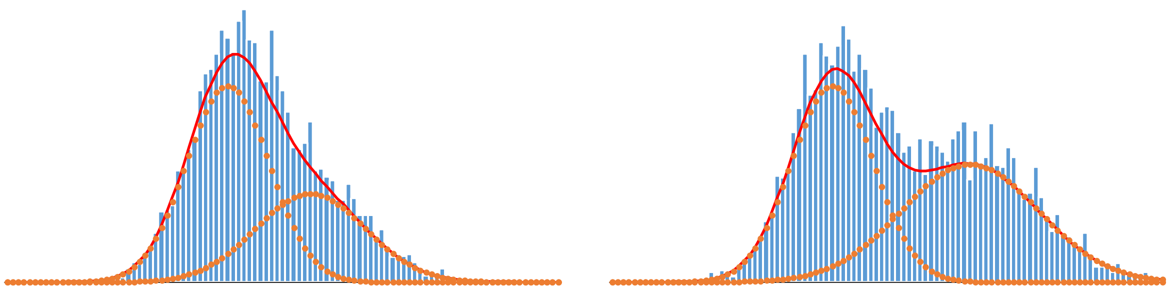
Alle übrigen in dieser Unterlage betrachteten Verteilungen sind eingipflig. Im Gegensatz dazu ist die Mischverteilung eine mehrgipflige, multimodale Verteilung. Sie ergibt sich durch Überlagerung mehrer Normalverteilungen. In der Realität könnte das z. B. einer chargenweisen Produktion mit gleichen oder unterschiedlichen Stückzahlen der einzelnen Chargen und verschiedenen Chargenmittelwerten entsprechen.

Um einem empirischen Datensatz eine Mischverteilung zuordnen zu können, ist es notwendig, der verwendeten Software die Anzahl $k$ der möglichen Gipfel (Komponenten) vorzugeben. Sofern diese Anzahl nicht auf der Basis des technischen Hintergrunds der Daten sinnvoll angegeben werden kann, wählt man z. B. zwei oder drei Gipfel.

Die Dichtefunktion der Mischverteilung setzt sich additiv aus den Dichtefunktionen $f_i(x, \mu_i, \sigma_i)$ der einzelnen Normalverteilungen zusammen, deren Gewichtung durch die Faktoren $a_i$ gegeben ist.

$$f_{mix} = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot f_i(x, \mu_i, \sigma_i) \qquad \text{mit } \sum_{i=1}^{k} a_i = 1 \qquad \text{und } k > 1$$

Die Mittelwerte und Varianzen der Komponenten können dabei verschieden sein und die Gewichte $a_i$ entsprechen dem jeweiligen Anteil an der Gesamtmenge.



Das Histogramm allein ließe auch eine eingipflige schiefe Verteilung vermuten.

Wenn sich die Mittelwerte deutlich unterscheiden und die $a_i$ nicht allzu verschieden sind, wird die Mischverteilung im Histogramm sichtbar.

Abbildung 11: Mischverteilungen

Bei kleinen Stichprobenumfängen entstehen Histogramme mit unterschiedlichen Säulenhöhen, welche eine Mehrgipfligkeit vortäuschen können. Auch das Klassierungsmodell hat einen Einfluss auf die Klassenzuordnung und das „Aussehen" des Histogramms, d. h. die relativen Häufigkeiten über den Klassen.

Die Histogramme in den Abbildungen 15, 17, 18, 24, 32 lassen gewisse Muster der Säulen erkennen, die z. B die Anpassung einer Mischverteilung nahelegen würden. Ob dies durch einen technischen Sachverhalt erklärbar wäre, kann aber nicht aus dem rein statistischen Blickwinkel entschieden werden (siehe auch C.4).

## 7.8 Erweiterte Normalverteilung

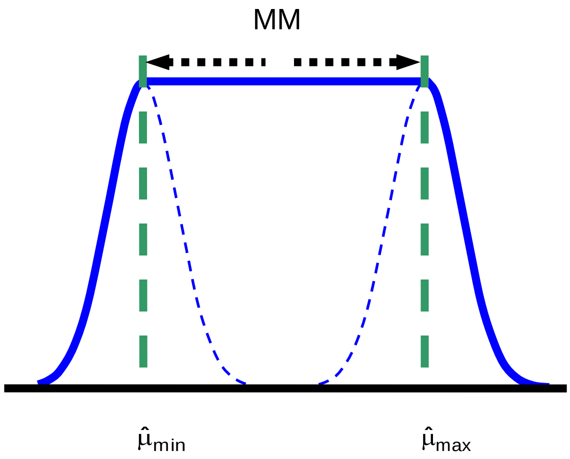



Abbildung 12: Erweiterte Normalverteilung

Der Graph der Dichtefunktion der erweiterten Normalverteilung zeigt eine streng symmetrische Form.

$$f(x) = f_1(x, \mu_{min}, \sigma) \quad \text{für} \quad x \leq \mu_{min}$$
$$f(x) = f_1(\mu_{min}, \mu_{min}, \sigma) \text{ für } \mu_{min} \leq x \leq \mu_{max}$$
$$f(x) = f_2(x, \mu_{max}, \sigma) \quad \text{für} \quad x \geq \mu_{max}$$

Die linke und rechte Flanke entsprechen Normalverteilungen mit identischen Standardabweichungen und um den Abstand MM (engl. Moving Mean) getrennten Mittelwerten: $\mu_{max} - \mu_{min} = MM$. Zur Ermittlung von Schätzwerten $\hat{\mu}_{max}$ und $\hat{\mu}_{min}$ siehe Abschnitt 8.4. Es ist der Grenzfall einer Mischverteilung aus unendlich vielen Momentanverteilungen, der in der Realität eher selten zu erwarten ist.

Die erweiterte Normalverteilung kann sich ergeben, wenn ein momentan normalverteilter Prozess langfristig eine zusätzliche stetige Veränderung der Mittellage besitzt, z. B. durch Werkzeugabnutzung.

Diese Modellvorstellung ist u. a. durch eine entsprechende Abbildung in [ISO 22514-2] motiviert. Sie ist dort unter Prozessmodell C3 zu finden, bei dem aber sowohl die Momentanverteilungen als auch die resultierende Verteilung eine „beliebige Form" haben. Wie die Abbildung in der Norm zeigt, bleibt die Form der Momentanverteilungen aber zeitlich unverändert. Bei einem linearen Trend müssten dann die Flanken der resultierenden Verteilung denjenigen der Momentanverteilung entsprechen. Insbesondere kann die rechte Flanke nicht derjenigen einer Normalverteilung entsprechen, wenn die Momentanverteilung eine andere ist.

In der Praxis kann man davon ausgehen, dass sich die Standardabweichungen $\sigma$ der Momentanverteilungen durch den Trend nicht verändern. In qs-STAT® werden sie daher als gleich angenommen.

## 7.9 Verteilungen mit Offset

Bei einigen Verteilungen, die nur für $x \geq 0$ definiert sind, ist es möglich, einen sogenannten Offset-Parameter zu berücksichtigen. In [Wilrich] wird er Lageparameter genannt. Er entspricht einer Transformation der Art $X^* = X - a$. Anschaulich bedeutet dies eine Verschiebung der Dichtefunktion auf der x-Achse. Das betrifft z. B. die Lognormalverteilung, die Betragsverteilung, die Rayleigh-Verteilung und die Weibullverteilung, deren Beschreibungsformeln dann 3 Parameter enthalten.

## 7.10 Verteilungen mit Faltung

Die Betragsverteilung 1. Art entsteht, wenn die negativen Ergebnisse einer normalverteilten Grundgesamtheit mit $\mu \geq 0$ als positive Werte behandelt werden. Bildlich geprochen wird der Teil der Normalverteilung, der sich links der Null befindet, nach rechts gefaltet. Die ursprünglich negativen Anteile im Histogramm werden also den Klassen rechts der Null zugeordnet.

Für den Spezialfall $\mu = 0$ und Faltungspunkt $a = 0$ ergibt sich eine sogenannte „Halbnormalverteilung“. Ihre Dichtefunktion ist an jeder Stelle $x \geq 0$ um den Faktor 2 größer als bei der Normalverteilung (s. 7.3.1).

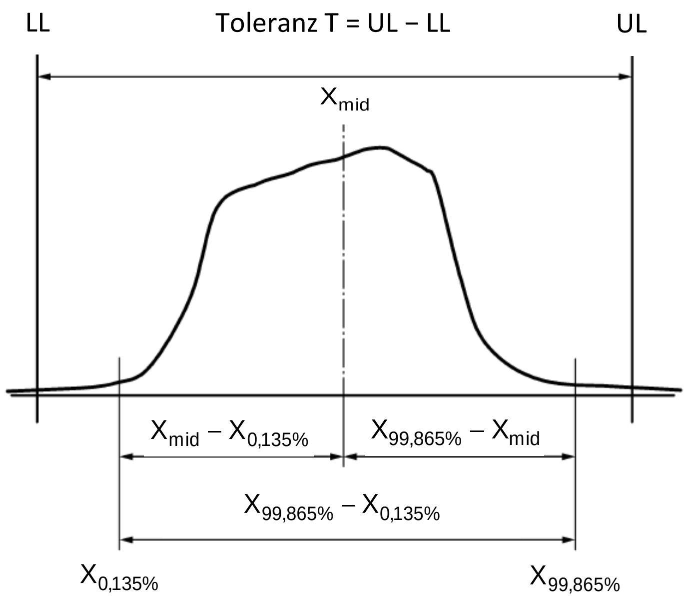
Eine solche Faltung kann aber auch an beliebiger Stelle $a > 0$ vorgenommen werden. Details dazu sind z. B. in [Schulze] beschrieben. Die Vorgehensweise dient dazu, eine Verteilungsfunktion durch einen zusätzlichen Parameter bestmöglich an den vorliegenden Datensatz anzupassen.

*Anmerkung: Im Kontext der Statistik bezeichnet der Begriff „Faltung“ üblicherweise eine Kombination von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Im vorstehenden Abschnitt dagegen ist der Begriff eher anschaulich zu verstehen.*

# 8 Berechnung von Fähigkeits- und Leistungskennwerten

## 8.1 Grundlagen

In der Regel ist das Verteilungsmodell für die Messwerte eines Produktmerkmals (das Prozessmodell) die Basis zur Ermittlung der statistischen Kenngrößen *Maschinenfähigkeit* ($C_m$, $C_{mk}$)[8], *Fertigungsprozessfähigkeit* ($C_p$, $C_{pk}$) und *Fertigungsprozessleistung* ($P_p$, $P_{pk}$) sowie deren Kurzzeitvarianten ($C_{p-ST}$, $C_{pk-ST}$, $P_{p-ST}$, $P_{pk-ST}$). Die Berechnung dieser Kenngrößen beruht auf der Prozesslage $X_{mid}$ *(engl. **mid**dle, dt. Mitte)*[9], der Streubreite der gemessenen Merkmalswerte $x$ und den Spezifikationsgrenzen $LL$ *(engl. „**l**ower limit“, dt. „untere Grenze“)* und $UL$ *(engl. „**u**pper limit“, dt. „obere Grenze“)*.




Die Streubreite wird nach allgemein akzeptierter Konvention durch die Quantile $X_{0{,}135\,\%}$ und $X_{99{,}865\,\%}$ begrenzt.

Zwischen beiden Quantilen sind 99,73 % aller Messwerte zu erwarten, unterhalb und oberhalb dieser Quantile jeweils 0,135 % aller Messwerte. Bei normalverteilten Messwerten entspricht dies der Streubreite $6 \cdot \sigma$.

Abbildung 13: Prozesslage und Prozessstreubreite eines beliebigen Verteilungsmodells[10]

Für die potentiellen Indizes $C_m$, $C_p$, $P_p$, $C_{p-ST}$ und $P_{p-ST}$ sowie die kritischen Indizes $C_{mk}$, $C_{pk}$, $P_{pk}$, $C_{pk-ST}$ und $P_{pk-ST}$ gelten jeweils dieselben Berechnungsvorschriften[11]:

$$\left.\begin{matrix} C_m \\ C_p \\ P_p \\ C_{p-ST} \\ P_{p-ST} \end{matrix}\right\} = \frac{UL - LL}{X_{99{,}856\%} - X_{0{,}135\%}} \qquad (8.1) \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} C_{mk} \\ C_{pk} \\ P_{pk} \\ C_{pk-ST} \\ P_{pk-ST} \end{matrix}\right\} = \min\left( \frac{X_{mid} - LL}{X_{mid} - X_{0{,}135\%}} ; \frac{UL - X_{mid}}{X_{99{,}865\%} - X_{mid}} \right) \qquad (8.2)$$

Bei der Anwendung hängt es von der konkreten Aufgabenstellung (Ermittlung der Maschinen-, Kurz- oder Langzeitfähigkeit) und dem konkreten Prozessverhalten (stabil oder instabil) ab, welche Indexbezeichnung zugeordnet wird. Diese Zuordnung hat keinen Einfluss auf den berechneten Zahlenwert.

---

[8] [ISO 22514-3] verwendet die Variablennamen $P_m$ und $P_{mk}$ anstelle von $C_m$ bzw. $C_{mk}$

[9] [ISO 22514-2] verwendet den Variablennamen $X_{mid}$ anstelle des in der Literatur häufig verwendeten µ

[10] Diagramm in unmittelbarer Anlehnung an [ISO 22514-2]

[11] Die Funktion *min („Minimum“)* liefert den kleineren der beiden Zahlenwerte, die sich aus den beiden durch Semikolon getrennten Berechnungsvorschriften in der Klammer ergeben.

## Potentielle und kritische Fähigkeits- und Leistungsindizes

Die potentiellen Indizes $C_m$, $C_p$, $P_p$, $C_{p-ST}$ und $P_{p-ST}$ sind nach Gl. (8.1) als Verhältnis der Breiten des Toleranzintervalls und des Zufallsstreubereichs der Grundgesamtheit definiert, der anhand der Messwerte abgeschätzt wird. Die potentiellen Indizes enthalten keine Information über die Prozesslage. Sie sind deshalb die Maßzahl für die maximale Fähigkeit bzw. Leistung eines Prozesses, die bei idealer Zentrierung des Prozesses erreichbar wäre. Sie setzen die technische Anforderung (Toleranz) in Bezug zu einer intrinsischen Eigenschaft des Prozesses (Streuung) und sind damit ein Maß dafür, wie gut der Streubereich des Prozesses und das Toleranzintervall miteinander „verträglich" wären, d. h. wie gut Anforderung und Eigenschaft *im Idealfall* miteinander vereinbar sind.

Im Gegensatz dazu beinhalten die kritischen Indizes $C_{mk}$, $C_{pk}$, $P_{pk}$, $C_{pk-ST}$ und $P_{pk-ST}$ auch die Prozesslage und sind deshalb ein quantitatives Maß dafür, wie gut der Streubereich des Prozesses *tatsächlich* mit dem Toleranzintervall „verträglich" ist, d. h. in das Toleranzintervall „passt".

Je größer der Unterschied zwischen potentiellem und zugehörigem kritischem Index, umso dezentraler wird die Prozesslage und umso größer die Wahrscheinlichkeit, dass Messwerte außerhalb des Toleranzintervalls liegen.

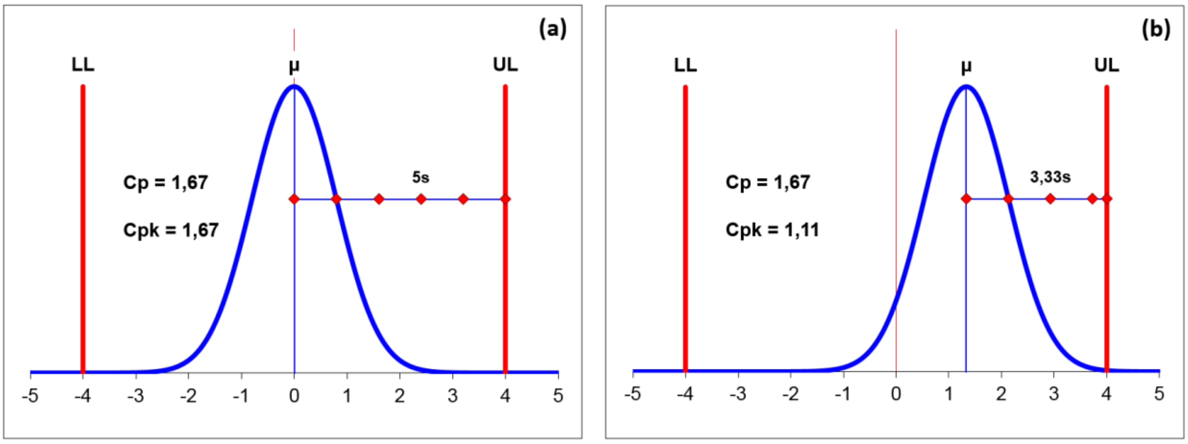



Abbildung 14: (a) Zentrale Prozesslage $C_p = C_{pk}$; (b) dezentrale Prozesslage $C_p > C_{pk}$

## Einseitig begrenzte Merkmale

Bei einseitig begrenzten Merkmalen existiert nur eine Spezifikationsgrenze ($LL$ oder $UL$). Eine Toleranz, die als Differenz $T = UL - LL$ definiert ist, existiert in diesem Fall nicht. Damit kann auch kein potentieller Index ($C_m$, $C_p$, $P_p$, $C_{p-ST}$ oder $P_{p-ST}$) angegeben werden.

> *ANMERKUNG: Es ist zu beachten, dass diese Aussage auch dann gilt, wenn eine sogenannte natürliche Grenze existiert (z. B. LL* = 0 bei Rauheit von Oberflächen, Breiten von Nuten und Fugen). Würde man diese natürliche Grenze wie eine „normale" Grenze behandeln, hätte dies zur Folge, dass der Prozess möglichst genau in der Mitte zwischen natürlicher und spezifizierter Grenze ausgerichtet würde. Stattdessen ist der Prozess in solchen Fällen aber möglichst nahe der natürlichen Grenze zu positionieren, so dass der Abstand zur spezifizierten Grenze möglichst groß wird.*

Die Berechnungsvorschriften für den verbleibenden kritischen Index reduzieren sich dann auf

$$\left.\begin{array}{c} C_{mk} \\ C_{pk} \\ P_{pk} \\ C_{pk-ST} \\ P_{pk-ST} \end{array}\right\} = \frac{X_{mid} - LL}{X_{mid} - X_{0,135\%}} \quad (8.3) \qquad \text{und} \qquad \left.\begin{array}{c} C_{mk} \\ C_{pk} \\ P_{pk} \\ C_{pk-ST} \\ P_{pk-ST} \end{array}\right\} = \frac{UL - X_{mid}}{X_{99,865\%} - X_{mid}} \quad (8.4)$$

wobei Gl. (8.3) für ein einseitig unten bzw. Gl. (8.4) für ein einseitig oben begrenztes Merkmal gilt.

## Schätzwerte

Zur Berechnung der Indizes werden die Schätzwerte $\hat{X}_{mid}$, $\hat{X}_{0{,}135\,\%}$ und $\hat{X}_{99{,}865\,\%}$ für die Lage $X_{mid}$ und die Grenzen $X_{0{,}135\,\%}$ und $X_{99{,}865\,\%}$ des Zufallsstreubereiches der Grundgesamtheit benötigt.

[ISO 22514-2] stellt 4 Methoden zur Schätzung der Prozesslage *(l = 1 … 4, engl. **l**ocation, dt. Lage)* und 5 Methoden zur Schätzung der Prozessstreuung *(d = 1 … 5, engl. **d**ispersion, dt. Streuung)* bereit, die unter Berücksichtigung der jeweiligen Eigenschaften der Messdatenverteilung miteinander kombiniert werden (vgl. Kap. 8.2 und 8.3 sowie Anhang E, Tabelle 4). Die verwendete Schätzmethode wird mit $M_{l,d}$ bezeichnet, wobei für l und d der Typ der jeweils gewählten Methode eingesetzt wird (z. B. $M_{2,1}$).

Wesentlich für die Ermittlung belastbarer Fähigkeitskennwerte ist insbesondere die realitätsnahe Schätzung der Prozessstreubreite anhand der 0,135 %- und 99,865 %-Quantile $X_{0{,}135\,\%}$ und $X_{99{,}865\,\%}$ der Messdatenverteilung. Dies bedeutet, dass in erster Linie die Randbereiche („Schwänze") der Verteilung maßgeblich sind, d. h. eine möglichst optimale Schätzung der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der kleinsten und größten Werte.

Die üblicherweise verfügbaren, aus statistischer Sicht relativ kleinen Datensätze (50 Werte für $C_{mk}$, 125 Werte für $C_{pk}$) enthalten in den Randbereichen meist keine ausreichende Anzahl Werte, um die benötigten Quantile verlässlich zu ermitteln. Die Wahrscheinlichkeiten für sehr kleine und sehr große Werte müssen deshalb mit Hilfe einer Verteilungsfunktion geschätzt werden, die auf Basis der häufig auftretenden Werte im mittleren Bereich um den Erwartungswert ermittelt wird.

Die verschiedenen Verteilungsfunktionen können sich in ihren Randbereichen allerdings sehr unterschiedlich verhalten, so dass der geschätzte Streubereich und damit die entsprechenden Kenngrößen stark von der gewählten Verteilung abhängen. Es ist daher äußerst wichtig, dass die geeignete Verteilung mit großer Sorgfalt ausgewählt wird [ISO 22514-1, Kap. 5].

## Fähigkeit und Leistung

Wie bereits erwähnt, entscheidet ausschließlich die Stabilität des Fertigungsprozesses, ob die errechneten Kennwerte als Fähigkeit oder Leistung zu interpretieren sind:

- Bei stabilen Prozessen spricht man von **Prozessfähigkeit** und bezeichnet die Kennwerte mit $C_p$, $C_{pk}$, $C_{p-ST}$ und $C_{pk-ST}$ *(engl. **c**apability, dt. Fähigkeit).*
- Bei instabilen Prozessen spricht man von **Prozessleistung** und bezeichnet die Kennwerte mit $P_p$, $P_{pk}$, $P_{p-ST}$ und $P_{pk-ST}$ *(engl. **p**erformance, dt. Leistung)*.

Die Bezeichnungsweise hat keinen Einfluss auf den Zahlenwert der Kenngröße.

Zu den instabilen, aber beherrschten Prozessen gehören insbesondere Prozesse mit systematischen Mittelwertsveränderungen (z. B. infolge von kontinuierlichen Trends durch Werkzeugabnutzung oder sprunghaften Änderungen bei verschiedenen Materialchargen; siehe auch Anhang G).

Eine sinnvolle Unterscheidung zwischen Fähigkeit und Leistung setzt eine größere Datenbasis aus einer längerfristigen Prozessverfolgung voraus (z. B. Ergebnis eines Vorlaufs mit etwa 125 Messwerten, Ergebnis einer Prozessfähigkeitsuntersuchung, Auswertung mehrerer Qualitätsregelkarten).

## 8.2 Quantilmethode $M_{2,1}$ nach ISO 22514-2

Die Methode $M_{2,1}$ (häufig als *Quantilmethode* bezeichnet) ist auf alle zeitabhängigen Verteilungsmodelle nach [ISO 22514-2] anwendbar und nicht an die zumindest näherungsweise Erfüllung bestimmter Voraussetzungen (wie z. B. Normalverteilung) gebunden (vgl. Anhang E, Tabelle 4). Sie wird deshalb bevorzugt für alle Auswertungen eingesetzt.

**Schätzung der Prozesslage:**

| Typ Berechnung | | |
|---|---|---|
| *l = 2*:* $X_{mid} \approx \hat{X}_{50\,\%}$ | Anpassung eines geeigneten Verteilungsmodells an den zu analysierenden Datensatz (vgl. Kapitel ⍰ und Anhang C) und Ermittlung des 50 %-Quantils[12] dieser Verteilungsfunktion mit Hilfe geeigneter Statistik-Software (z. B. qs-STAT®); siehe Anmerkung 1. | |
| *l = 2:* $X_{mid} \approx \hat{X}_{50\,\%} \approx \tilde{x}$ | $\tilde{x} = x_{\left(\frac{m \cdot n + 1}{2}\right)}$ | falls $m \cdot n$ ungerade |
| | $\tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot \left( x_{\left(\frac{m \cdot n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{m \cdot n}{2} + 1\right)} \right)$ | falls $m \cdot n$ gerade |

mit

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_{ik}$ | Wert Nr. i in Stichprobe Nr. k *(i = 1 … n; k = 1 … m)* | $x_{(j)}$ | Wert Nr. j in der nach aufsteigender Größe geordneten Reihe aller Werte $x_{ik}$ *(j = 1 … m·n)* |
| n | Anzahl Werte je Stichprobe *(Stichprobenumfang)* | $\tilde{x}$ | Median aller Werte $x_{ik}$ |
| m | Anzahl der Stichproben | $\hat{X}_{50\%}$ | 50 %-Quantil der Verteilungsfunktion *(Schätzwert für $X_{50\%}$ der Grundgesamtheit)* |

*ANMERKUNG 1: Der Berechnungstyp l = 2* ist kein Bestandteil von [ISO 22514-2].*

- *Die Quantilmethode schätzt die Prozessstreubreite mit Hilfe der Quantile $X_{0,135\,\%}$ und $X_{99,865\,\%}$ der Verteilungsfunktion (Berechnungstyp d = 1, siehe unten). Es wäre daher konsistent, auch die Prozesslage $X_{mid}$ mit Hilfe des Quantils $X_{50\,\%}$ dieser Verteilungsfunktion zu schätzen. Dies entspricht der Methode $M1_{3,6}$ nach [ISO 21747], die in gängiger Statistik-Software (z. B. qs-STAT®) als Option verfügbar und häufig voreingestellt ist.*
- *Im Gegensatz dazu sieht [ISO 22514-2] keine vergleichbare Schätzmethode mehr vor. Stattdessen wird der Median der Messwerte als Schätzer für $X_{50\,\%}$ verwendet und $X_{50\,\%}$ wiederum als Schätzer für $X_{mid}$. Diese Methode ist jedoch nicht allgemein anwendbar. Sie kann ungerechtfertigt zu deutlich günstigeren oder ungünstigeren Ergebnissen für Fähigkeit und Leistung führen als die Methode $M1_{3,6}$ nach [ISO 21747]. Abweichungen der Größenordnung $\pm$0,05 und mehr können z. B. auftreten, wenn einer Messdatenverteilung mit statistisch insignifikanter Schiefe eine symmetrische Verteilungsfunktion zugeordnet wird.*
- *Der Berechnungstyp l = 2 nach [ISO 22514-2] wird aus den genannten Gründen nicht empfohlen. Stattdessen wird empfohlen, entsprechend der früheren Methode $M1_{3,6}$ nach [ISO 21747] vorzugehen. Dieser Berechnungstyp wird im vorliegenden Heft mit l = 2* bezeichnet (vorbehaltlich einer späteren Berücksichtigung mit ggf. abweichender Bezeichnung in [ISO 22514-2]).*

*ANMERKUNG 2: Die Verwendung der Berechnungstypen l = 1, l = 3 und l = 4 (siehe Kap. 8.3) für die Prozesslage ist nach [ISO 22514-2] unter bestimmten Voraussetzungen ebenfalls möglich (siehe Anhang E, Tabelle 4, Methoden $M_{1,1}$, $M_{3,1}$, $M_{4,1}$), in Kombination mit Berechnungstyp d = 1 für die Prozessstreubreite jedoch weniger gebräuchlich.*

---

[12] Bei einfacheren Verteilungsfunktionen (z. B. Normalverteilung, logarithmische Normalverteilung) häufig mit Hilfe inverser Verteilungsfunktionen wie z. B. EXCEL-Arbeitsblattfunktionen NORM.INV, LOGNORM.INV lösbar.

**Schätzung der Prozessstreuung:**

| Typ | Berechnung | |
|---|---|---|
| *d = 1:* | $\hat{X}_{99{,}865\,\%} - \hat{X}_{0{,}135\,\%}$<br>$\hat{X}_{99{,}865\,\%} - X_{mid}$<br>$X_{mid} - \hat{X}_{0{,}135\,\%}$ | Anpassung eines geeigneten Verteilungsmodells an den zu analysierenden Datensatz (vgl. Kapitel ? und Anhang C) und Ermittlung der 0,135 %- und 99,865 %-Quantile[12] dieser Verteilungsfunktion mit Hilfe geeigneter Statistik-Software (z. B. qs-STAT®). |

mit

| | |
|---|---|
| $\hat{X}_{0{,}135\,\%}$ | 0,135 %-Quantil der Verteilungsfunktion<br>*(Schätzwert für $X_{0{,}135\,\%}$ der Grundgesamtheit)* |
| $\hat{X}_{99{,}865\,\%}$ | 99,865 %-Quantil der Verteilungsfunktion<br>(Schätzwert für $X_{99{,}865\,\%}$ der Grundgesamtheit) |

*ANMERKUNG 3: Alternativ ist die manuelle, grafische Ermittlung mittels Wahrscheinlichkeitsnetz möglich. Sofern die Daten im Wahrscheinlichkeitsnetz der Standardnormalverteilung nicht durch eine Gerade dargestellt werden, ist die Darstellung in den Wahrscheinlichkeitsnetzen anderer Verteilungen zu untersuchen und diejenige Verteilungsfunktion zu verwenden, die eine möglichst optimale Darstellung als Gerade liefert.*

Bei sehr umfangreichen Datensätzen sind u. U. weitere, alternative Vorgehensweisen möglich (siehe Anhang C.5).

## 8.3 Weitere Methoden nach ISO 22514-2

Die Anwendbarkeit der Berechnungsvorschriften dieses Kapitels setzt in den meisten Fällen voraus, dass die auszuwertenden Daten zumindest näherungsweise durch eine Normalverteilung mit konstanter Lage beschrieben werden können (siehe Anhang E, Tabelle 4). In diesem Fall gelten folgende Vereinfachungen:

$$X_{mid} \approx \hat{\mu} \qquad X_{99{,}865\,\%} - X_{0{,}135\,\%} \approx 6 \cdot \hat{\sigma} \qquad X_{99{,}865\,\%} - X_{mid} \approx 3 \cdot \hat{\sigma} \qquad X_{mid} - X_{0{,}135\,\%} \approx 3 \cdot \hat{\sigma}$$

Schätzung der Prozesslage:

| Typ | Berechnung | | |
|---|---|---|---|
| $l = 1$: | $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ | | |
| $l = 3$: | $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} \bar{x}_k$ | mit | $\hat{\mu} = \bar{x}_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ik}$ |
| $l = 4$: | $\hat{\mu} = \bar{\tilde{x}} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} \tilde{x}_k$ | | |

mit

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_{ik}$ | Wert Nr. i in Stichprobe Nr. k<br>*(i = 1 … n; k = 1 … m)* | $\bar{\bar{x}}$ | (Totaler) Mittelwert von m Stichprobenmittelwerten |
| $n$ | Anzahl Werte je Stichprobe<br>*(Stichprobenumfang)* | $\tilde{x}_k$ | Median der Stichprobe Nr. k |
| $m$ | Anzahl Stichproben | $\bar{\tilde{x}}$ | Mittelwert der Mediane von m Stichproben |
| $\bar{x}_k$ | Mittelwert der Stichprobe Nr. k | | |

*ANMERKUNG 1: Die Typen $l = 1$ und $l = 3$ unterscheiden sich lediglich durch die Nummerierung der Datenwerte ($l = 1$ betrachtet alle Werte als eine einzige Stichprobe, $l = 3$ berücksichtigt die Stichprobenstruktur und ist im Fall $m = 1$ identisch mit $l = 1$). Es ergibt sich derselbe totale Mittelwert. Die Unterscheidung ist nicht plausibel.*

**Schätzung der Prozessstreuung:**

| Typ | Berechnung | | |
|---|---|---|---|
| *d = 2:* | $\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{s^2}}$ | mit $\overline{s^2} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} s_k^2$ | $s_k = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - \bar{x}_k)^2}$ |
| *d = 3:* | $\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4}$ | mit $\bar{s} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} s_k$ | |
| *d = 4:* | $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ | mit $\bar{R} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} R_k$ | $R_k = max(x_{ik}) - min(x_{ik})$ |
| *d = 5:* | $\hat{\sigma} = s_{total}$ | mit $s_{total} = \sqrt{\frac{1}{m \cdot n-1} \cdot \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - \bar{\bar{x}})^2}$ | |

mit

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\overline{s^2}$ | Mittelwert von m Stichprobenvarianzen | $\bar{R}$ | Mittelwert der Spannweiten von m Stichproben |
| $\bar{s}$ | Mittelwert von m Stichproben-standardabweichungen | $R_k$ | Spannweite der Stichprobe Nr. k |
| $s_k$ | Standardabweichung der Stichprobe Nr. k | $s_{total}$ | Standardabweichung aller Messwerte (in allen Stichproben) |

und

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_4$ | 0,798 | 0,886 | 0,921 | 0,940 | 0,952 | 0,959 | 0,965 | 0,969 | 0,973 |
| $d_2$ | 1,128 | 1,693 | 2,059 | 2,326 | 2,534 | 2,704 | 2,847 | 2,970 | 3,078 |

Tabelle 1: Faktoren $c_4$ und $d_2$ für die Stichprobenumfänge $n = 2, 3, \dots, 10$

*ANMERKUNG 2: Die Faktoren $c_4$ und $d_2$ hängen vom Stichprobenumfang n ab. $c_4$ wird in älterer Literatur auch mit $a_n$ bezeichnet.*

*ANMERKUNG 3: Es wird gelegentlich als Vorteil gesehen, dass Fähigkeits- und Leistungskennwerte mit Hilfe der vorstehenden Berechnungsvorschriften auch „von Hand" (z. B. mit EXCEL) berechnet werden könnten. Dies kann jedoch **nicht** allgemein empfohlen werden, da in diesem Fall die Anwendbarkeit der Berechnungen meist nicht angemessen verifiziert wird, d. h. die Verträglichkeit der Messdaten mit einer Normalverteilung. Bei unzureichend normalverteilten Daten wären die Ergebnisse fehlerhaft und damit bedeutungslos.*

*ANMERKUNG 4: Der Wert der berechneten Fähigkeits- und Leistungskenngröße variiert geringfügig mit der zur Schätzung der Prozesslage und -streuung verwendeten Berechnungsart. Im Sinne transparenter und nachvollziehbarer Ergebnisse ist es deshalb nicht empfehlenswert, eine einmal gewählte Berechnungsart ohne zwingenden Grund zu wechseln.*

## 8.4 Erweiterte Normalverteilung

Die erweiterte Normalverteilung kann als einfacher Sonderfall einer Mischverteilung mit symmetrischen Flanken interpretiert werden (vgl. auch Abschnitt 7.8, Anhang C.5 und [ISO 22514-2, 6.1.4]).

**Alternativen zur Ermittlung von MM *(engl. Moving Mean)***

1. Empfohlene Berechnungsmethode (Standardmethode der qs-STAT®-Software): Varianzanalytische Ermittlung der Streuung der Mittelwerte und daraus Ermittlung des Streubereiches MM.

2. Falls die Stichprobenmittelwerte normalverteilt sind: $MM = 6 \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}$. Dabei bezeichnet

   $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \cdot \sum_{k=1}^{m}(\bar{x}_k - \bar{\bar{x}})^2}$ die Standardabweichung der m Stichprobenmittelwerte $\bar{x}_k$.

3. Sofern keine geeignete Statistik-Software zur Verfügung steht: Näherungsweise Berechnung von $MM$ als Differenz der untersten und obersten Prozesslage. Ermittlung der Schätzer $\hat{\mu}_{min}$ und $\hat{\mu}_{max}$ für die beiden Extremlagen des Prozesses als Mittelwerte der 3 kleinsten bzw. der 3 größten Stichprobenmittelwerte, d. h. der jeweiligen 3 Stichproben in Extremlage:

   $\hat{\mu}_{min} = \frac{1}{3} \cdot \left(\bar{x}_{1,\,min} + \bar{x}_{2,\,min} + \bar{x}_{3,\,min}\right)$ $\hat{\mu}_{max} = \frac{1}{3} \cdot \left(\bar{x}_{1,\,max} + \bar{x}_{2,\,max} + \bar{x}_{3,\,max}\right)$

   MM ist anschaulich der "Spielraum", den die systematische Mittelwertsveränderung beansprucht, und wird deshalb als Differenz der Extremlagen abgeschätzt: $MM = \hat{\mu}_{max} - \hat{\mu}_{min}$.

   Zur Schätzung der Prozessstreuung $\hat{\sigma}$ stehen die Berechnungsmethoden nach Kap. 8.3 zur Verfügung. Berechnung der Leistungsindizes

   für zweiseitig begrenzte Merkmale: $P_p = \frac{T - MM}{6 \cdot \hat{\sigma}}$ und $P_{pk} = min\left(\frac{UL - \hat{\mu}_{max}}{3 \cdot \hat{\sigma}}; \frac{\hat{\mu}_{min} - LL}{3 \cdot \hat{\sigma}}\right)$

   für einseitig oben oder unten begrenzte Merkmale: $P_{pk} = \frac{UL - \hat{\mu}_{max}}{3 \cdot \hat{\sigma}}$ bzw. $P_{pk} = \frac{\hat{\mu}_{min} - LL}{3 \cdot \hat{\sigma}}$

   *ANMERKUNG 1: Da es sich um einen instabilen, aber beherrschten Prozess handelt, werden die ermittelten Kenngrößen als Prozessleistungsindizes betrachtet und mit $P_p$ und $P_{pk}$ bezeichnet.*

   *ANMERKUNG 2: Bei einseitig begrenzten Merkmalen existiert keine Toleranz T, so dass die Kenngröße $P_p$ nicht angegeben werden kann*

   *ANMERKUNG 3: Bei einseitig begrenzten, insbesondere null-begrenzten Merkmalen sind die Messergebnisse häufig nicht symmetrisch um einen zentralen Wert verteilt, so dass z. B. das Vorgehen nach Anhang C.4 (Mischverteilung) eine geeignetere Lösung sein kann.*

# 9 Ergänzende Hinweise zu Fähigkeitskennwerten

Nachfolgend werden einige Aspekte betrachtet, die jedem, der eine Maschinen- oder Prozessfähigkeitsuntersuchung durchführt bzw. auswertet, bewusst sein sollten.

Ziel einer Fähigkeitsuntersuchung ist es, anhand der beobachteten Stichprobenergebnisse eine Aussage über das Prozessverhalten (beherrscht oder nicht) und eine noch nicht existierende Grundgesamtheit — nämlich die Gesamtheit der in Zukunft zu fertigenden Teile — abzuleiten. Man nennt dies einen *indirekten* oder *induktiven* Schluss. Dabei wird eigentlich vorausgesetzt, dass die Verteilung der Grundgesamtheit bereits bekannt ist. Anhand *repräsentativer* Stichproben sollen dann lediglich noch die Parameter dieser Verteilung geschätzt werden. Der Begriff *repräsentative Stichprobe* bedeutet, dass die Stichprobe möglichst alle Eigenschaften der aktuell oder erst zukünftig verfügbaren Grundgesamtheit besitzen soll.

Tatsächlich ist aber nach Ermittlung der Stichprobenwerte weder etwas bekannt bzgl. der zeitlichen Stabilität, noch bzgl. der Verteilung der Werte, noch bzgl. der Parameter der Verteilung und deren Zeitverhalten. All dies muss alleine anhand der wenigen vorliegenden Einzelwerte beurteilt werden.

## 9.1 Fähigkeitskennwerte und Überschreitungsanteile

In der Literatur zum Thema Prozessfähigkeit wird meist dargestellt, dass ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen einem berechneten $C_{pk}$ -Wert und einem Überschreitungsanteil besteht, z. B. $C_{pk} = 1{,}33$ entspricht 32 ppm (einseitig). Dieser Zusammenhang beruht auf dem Modell der Normalverteilung und gilt **ausschließlich** im Fall normalverteilter Messdaten. Weicht die reale Merkmalsverteilung von der Normalverteilung ab (vgl. Kap. 7), so ergeben sich in der Regel andere Überschreitungsanteile.

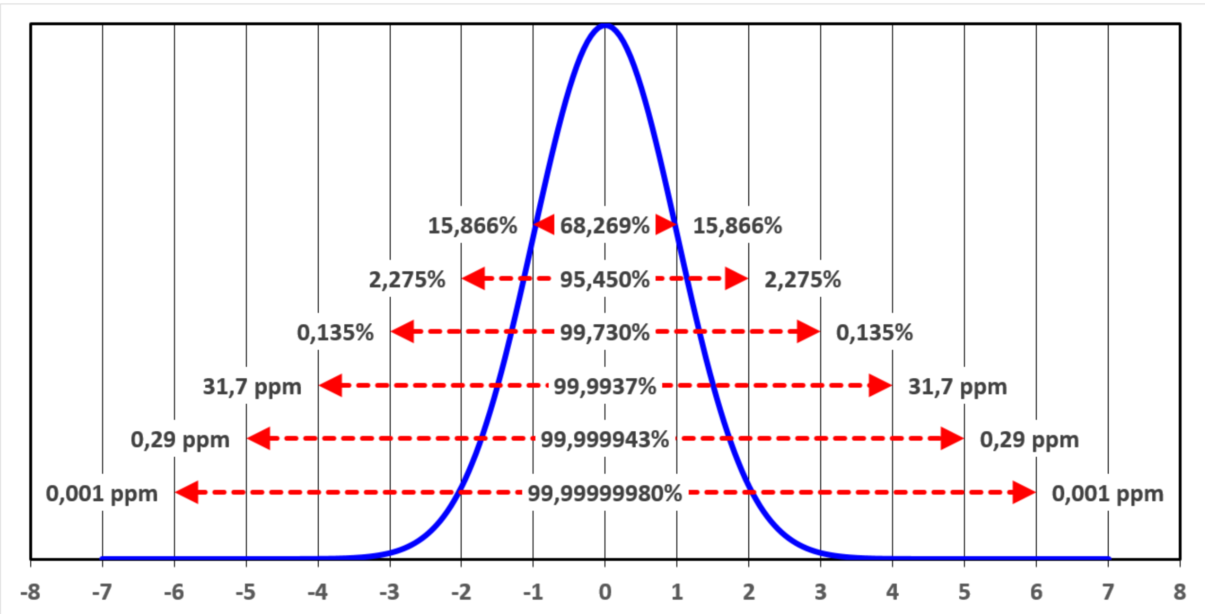



Abbildung 15: Überschreitungsanteile bei Normalverteilung

Innerhalb der Bereiche ±1s, ±2s, ±3s, ±4s, ±5s und ±6s zu erwartender Anteil Messwerte mit zugehörigen, einseitigen Überschreitungsanteilen unter- und oberhalb dieser Bereiche.

## 9.2 Einfluss des Stichprobenumfangs

Der Stichprobenumfang hat wesentlichen Einfluss auf die Güte statistischer Aussagen, was sich z. B. in der Größe der Vertrauensbereiche geschätzter Verteilungsparameter wie Mittelwert und Standardabweichung äußert. Statistisch gesehen ist ein Fähigkeitskennwert eine Zufallsgröße, die auch bei unverändertem Prozess von Stichprobe zu Stichprobe variieren kann.

Anhang C.3 stellt weitere Informationen zur Thematik „Vertrauensbereich" bereit, Anhang I zur Thematik „Unzureichende Anzahl Teile" und speziell Anhang I.1 zur Thematik „Anhebung von Fähigkeits- und Leistungsgrenzwerten"

Insbesondere die Zuordnung eines Verteilungsmodells wird umso kritischer, je kleiner der Stichprobenumfang wird. Die Auswahl und Anpassung eines geeigneten Verteilungsmodells basiert u. a. auf den Formkenngrößen *Schiefe* und *Wölbung*. Da diese Größen bei kleinem Stichprobenumfang empfindlich auf Extremwerte reagieren, kann eine geringfügige Änderung weniger Einzelwerte zu einem „Umschalten" bei der Auswahl des Verteilungsmodells und entsprechender Änderung des damit verknüpften Fähigkeitskennwerts führen.

Anhang C.4 stellt ergänzende Informationen zur Thematik „Verteilungsauswahl" bereit.

## 9.3 Einfluss des Messsystems

Die Messeinrichtung und das Messverfahren, die zum Ausmessen der Teile der Stichprobe eingesetzt werden, sind von großer Tragweite für die spätere Beurteilung des Prozesses. Messeinrichtungen mit zu großer Messunsicherheit und ungeeignete Messverfahren führen zu einer unnötigen Einengung des Toleranzintervalls für den Fertigungsprozess. Ein kleiner $C_g$-Wert oder ein großer %GRR-Wert verschlechtert die beobachteten Fähigkeits- und Leistungskennwerte (siehe Anhang F).

Weiter ist zu beachten, dass eine fähige Messeinrichtung nichts nützt, wenn die Teile bei der Prüfung z. B. verschmutzt, nicht temperiert oder verspannt sind oder z. B. zu große Formabweichungen besitzen.

[Heft 10] stellt die Verfahren zur Ermittlung der „Fähigkeit von Mess- und Prüfprozessen" mit Beispielen und zahlreichen Hinweisen und ergänzenden Erläuterungen bereit.

# 10 Bericht: Ermittelte Fähigkeits- und Leistungskennwerte

Um eine größtmögliche Transparenz im Zusammenhang mit der Ermittlung und Weitergabe von Fähigkeits- und Leistungskennwerten bei der Berichterstattung sicherzustellen, sollten stets folgende Mindestinformationen bereitgestellt werden (vgl. [ISO 22514-2] und Kapitel 13.

| | Beispiel: |
|---|---|
| Potentieller Prozessfähigkeitsindex | $C_p = 1{,}75$ |
| Kritischer Prozessfähigkeitsindex | $C_{pk} = 1{,}47$ |
| Berechnungsmethode | $M_{2,1}$ |
| Anzahl der zugrundeliegenden Werte | 200 |
| Optional:<br>• Stichprobenhäufigkeit<br>• Zeit und Dauer der Datenerfassung<br>• Verteilungsmodell (Begründung)<br>• Messsystem<br>• Technische Rahmenbedingungen | |

# 11 Wiederholung des Fähigkeitsnachweises

Während des produktiven Einsatzes muss die Fähigkeit des Fertigungsprozesses zu jedem Zeitpunkt gewährleistet werden. Dies wird durch angemessene Fristen für die Revalidierung des Fähigkeitsnachweises erreicht und kann im Zeitraum zwischen den Revalidierungen z. B. mit Hilfe von Qualitätsregelkarten [Heft 7] überwacht werden.

Zum Intervall für die regelmäßige Revalidierung der Prozessfähigkeit gibt es — ebenso wie zum Stichprobenintervall während einer einzelnen Revalidierung (siehe Kap. 6.1) — *keine* Vorgaben in nationalen und internationalen Normen und Richtlinien.

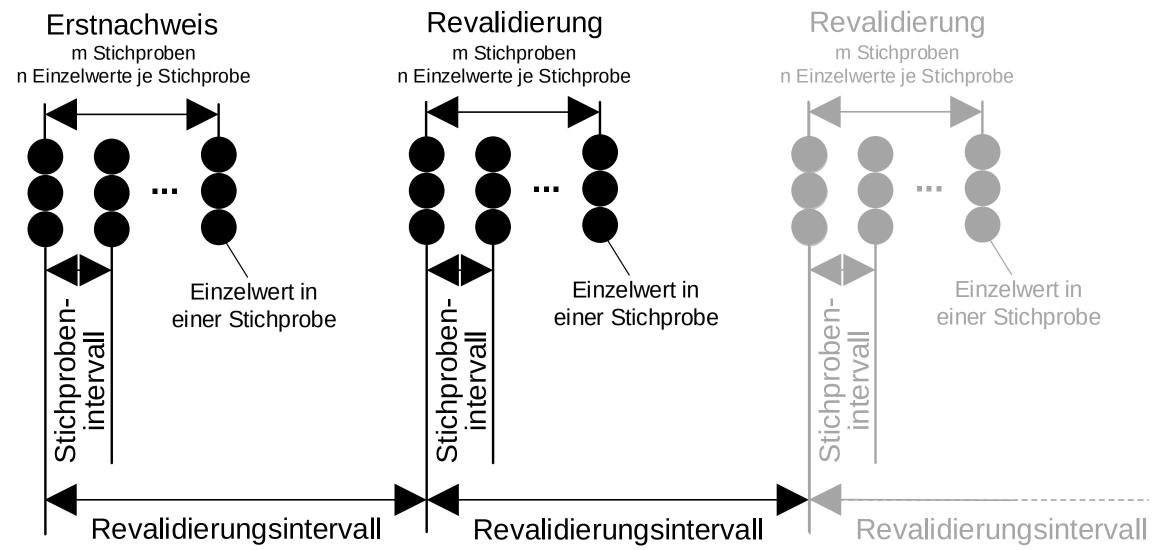



Abbildung 16: Stichprobenintervall und Revalidierungsintervall (schematisch)

*Zeitskalen nicht maßstabsgerecht: Revalidierungsintervalle sind üblicherweise deutlich länger als m Stichprobenintervalle, die für eine einzelne Revalidierung erforderlich sind.*

Das folgende Vorgehen ist ein in der Praxis gängiger Ansatz. Es sind drei Fälle zu unterscheiden.

**Fall 1: Geregelte Prozesse (SPC-Prozesse)**

Bei Prozessen, die mittels Regelkarte überwacht werden, kann jederzeit auf die zuletzt erfassten Daten zurückgegriffen werden, um die Prozessfähigkeit zu revalidieren. Wurde bisher nur der Erstnachweis für die Langzeitfähigkeit oder -leistung erbracht, liegen meist keine weiteren Informationen zum zukünftig zu erwartenden Prozessverhalten vor. In der Regel ist es dann sinnvoll, mit einem möglichst kurzen Revalidierungsintervall zu beginnen (z. B. Auswertung jeder oder jeder zweiten Regelkarte) und dieses Intervall auf Basis folgender Beobachtungen sukzessive anzupassen:

- Über alle verfügbaren Regelkarten betrachtet treten keine Verletzungen von Eingriffsgrenzen auf oder höchstens in der Anzahl, die zufällig zu erwarten ist.

  *ANMERKUNG 1: Eingriffsgrenzen begrenzen üblicherweise den Bereich, in dem 99,73 % (oder 99 %) aller Werte zu erwarten sind. Wenn eine größere Anzahl Werte erfasst wird, kann es deshalb zu zufälligen, d. h. nicht prozessbedingten Verletzungen der Eingriffsgrenzen kommen, da 0,27 % (bzw. 1 %) aller Werte außerhalb der Eingriffsgrenzen zu erwarten sind.*
- Von Regelkarte zu Regelkarte sind keine systematischen Änderungen (z. B. „Sprünge“) erkennbar.
- Diejenigen Regelkarten, die jeweils für eine Revalidierung ausgewertet werden, liefern reproduzierbare Fähigkeitskennwerte.

> *ANMERKUNG 2: „Reproduzierbare Werte“ bedeutet hier „Werte mit statistisch insignifikanter Streuung“. Diese „Insignifikanz“ kann bei Bedarf mit Hilfe statistischer Tests (vgl. [Heft 3]) quantifiziert werden. Damit sind Aussagen möglich wie z. B. „Die Werte sind mit einem Grad des Vertrauens von 95 % ununterscheidbar“.*

Wird ein solches Verhalten gleichbleibend über mehrere ausgewertete Regelkarten beobachtet, kommt eine Verlängerung (z. B. Verdopplung) des Revalidierungsintervalls in Betracht.

Eine solche Anpassung kann mehrfach wiederholt werden, wenn das Verhalten auch nach Verlängerung des Intervalls unverändert bleibt. Es ist jedoch darauf zu achten, dass das Intervall zwischen zwei Revalidierungen nicht unsinnig lang wird (z. B. mehrere Jahre). So sind beispielsweise auch die Fertigungsmenge (z. B. pro Tag, Woche, Monat), Komplexität und Kritikalität des Merkmals bei der Festlegung des Intervalls geeignet zu berücksichtigen.

Wird hingegen eines der obigen Kriterien verletzt, ist eine Verkürzung (z. B. Halbierung) des Revalidierungsintervalls in Betracht zu ziehen.

**Fall 2: Ungeregelte Prozesse**

Wurde bei einem Prozess, der *nicht* mittels Regelkarte überwacht wird, bisher nur der Erstnachweis für die Langzeitfähigkeit oder -leistung erbracht, liegen meist keine weiteren Informationen zum zukünftig zu erwartenden Prozessverhalten vor. In der Regel ist es dann sinnvoll, zumindest in der Anfangsphase eine Regelkarte zu führen und in gleicher Weise vorzugehen wie bei geregelten Prozessen bis ein angemessenes Revalidierungsintervall ermittelt ist.

**Fall 3: Erneuter Fähigkeitsnachweis unabhängig von Fristen**

Die folgenden Kriterien sind typische Beispiele, die unabhängig von festgelegten Fristen eine erneute Analyse mit Fähigkeitsnachweis in der Regel unumgänglich machen:

- Spezifikationsänderungen des zu fertigenden Merkmals;
- vermehrtes Auftreten unerwarteter Prozessergebnisse und/oder fehlerhafter Teile;
- Eingriffe in den Fertigungsprozess (z. B. nach Überschreitung von Eingriffsgrenzen) führen zu Prozessergebnissen, die sich signifikant von den Ergebnissen unterscheiden, ehe der Eingriff notwendig wurde (z. B. anhand einer Qualitätsregelkarte verifizierbar);
- Inbetriebnahme neuer, überholter oder instandgesetzter Fertigungseinrichtungen (z. B. nach Wartungsarbeiten, bei denen umfangreiche Demontagen, Umbauten und/oder der Austausch wesentlicher Komponenten erforderlich waren);
- technische Änderungen (z. B. Aufbau, Software), Änderungen von Prozessmerkmalen (z. B. Einstellungen) und/oder Randbedingungen des Fertigungsprozesses (z. B. Abläufe, Umgebung);
- Verlagerung von Fertigungseinrichtungen.

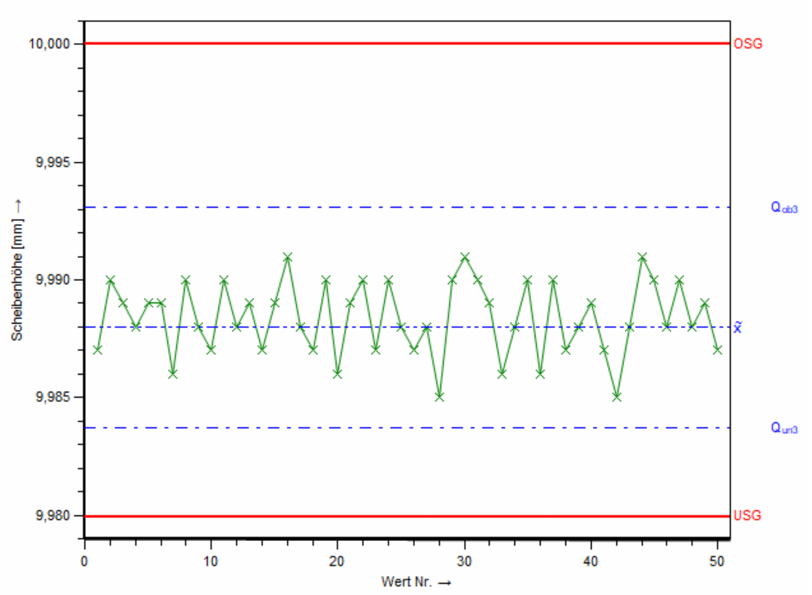
Im Zweifelsfall sind die Analysen zu wiederholen und die Fähigkeiten erneut nachzuweisen.

Da sich der Prozess in diesen Fällen ändert oder zumindest ändern kann, sind die Zustände vor und nach der Veränderung häufig sehr unterschiedlich. Es ist dann meist nicht sinnvoll, auf bereits vorliegende Messdaten zurückzugreifen. Möglicherweise sind auch die bisherigen Stichproben- und Revalidierungsintervalle nicht mehr angemessen.

# 12 Beispiele

**Beispiel 1: Maschinenfähigkeit**

| | |
|---|---|
| Merkmal: | Scheibenhöhe in mm |
| Grenzwerte: | $LL = 9{,}98\ mm$; $UL = 10{,}00\ mm$; zweiseitig begrenzt |
| Anzahl Messwerte (Teile): | $n = 50$ |
| Berechnungsmethode: | Quantilmethode $M_{2*,1}$ (mit $\hat{X}_{50\ \%}$ der Verteilungsfunktion) |



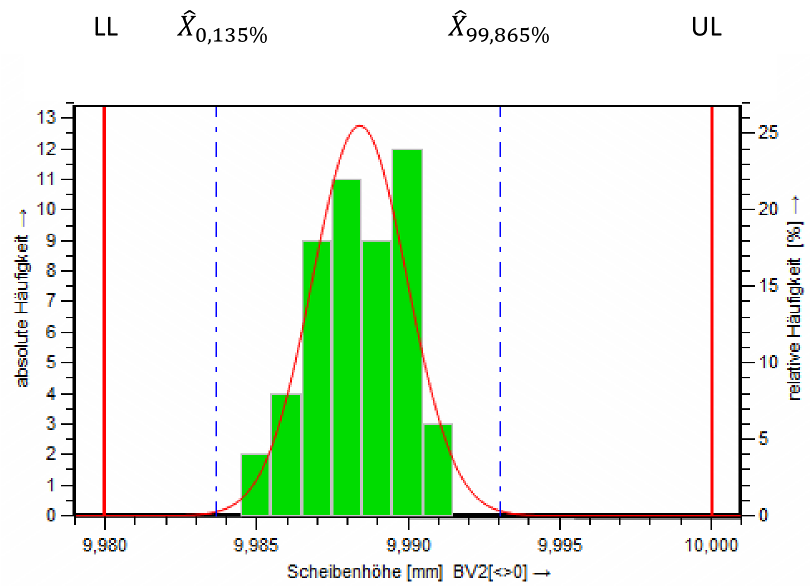




Abbildung 17: Beispiel „Scheibenhöhe"; Urwertdiagramm und Histogramm mit Verteilungsfunktion

Verteilungsmodell: Betragsverteilung 2. Art

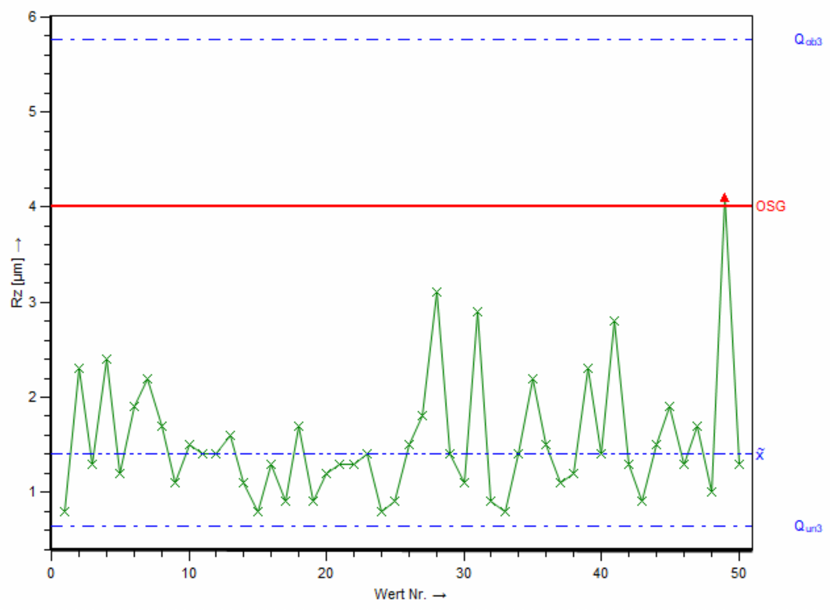
Quantile: $\hat{X}_{0,135\ \%} = 9{,}9837\ mm$; $\hat{X}_{50\ \%} = 9{,}9884\ mm$; $\hat{X}_{99,865\ \%} = 9{,}9931\ mm$

$$C_m = \frac{UL - LL}{\hat{X}_{99,865\ \%} - \hat{X}_{0,135\ \%}} = 2{,}13 \qquad C_{mk} = \frac{\hat{X}_{50\ \%} - LL}{\hat{X}_{50\ \%} - \hat{X}_{0,135\ \%}} = 1{,}79$$

Die Fähigkeitskriterien $C_m \geq 1{,}67$ und $C_{mk} \geq 1{,}67$ sind erfüllt.

**Beispiel 2: Maschinenfähigkeit**

| | |
|---|---|
| Merkmal: | Rauheit Rz in µm |
| Grenzwert: | $UL = 4{,}0\ \mu m$ ; einseitig oben begrenzt |
| Anzahl Messwerte (Teile): | $n = 50$ |
| Berechnungsmethode: | Quantilmethode $M_{2^*,1}$ (mit $\hat{X}_{50\,\%}$ der Verteilungsfunktion) |



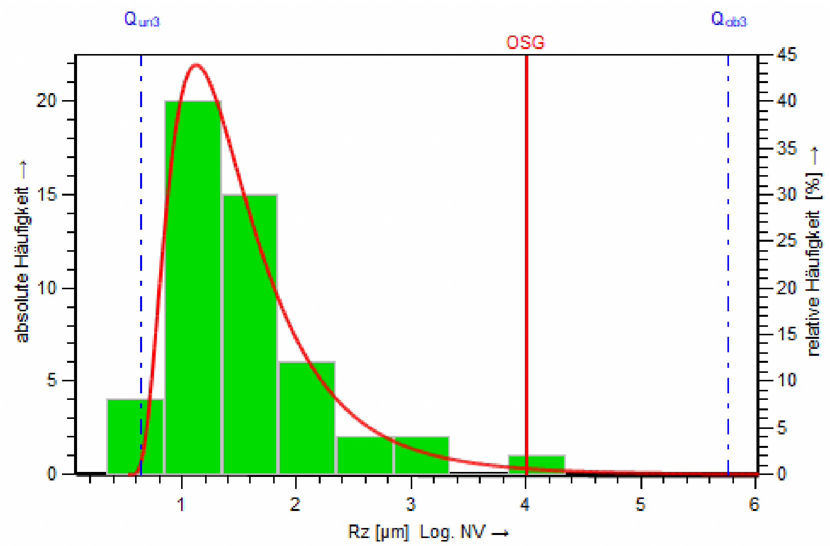




Abbildung 18: Beispiel „Rauheit"; Urwertdiagramm und Histogramm mit Verteilungsfunktion

Verteilungsmodell: Logarithmische Normalverteilung

Quantile: $\hat{X}_{0{,}135\,\%} = 0{,}650\ \mu m$; $\hat{X}_{50\,\%} = 1{,}332\ \mu m$; $\hat{X}_{99{,}865\,\%} = 5{,}758\ \mu m$

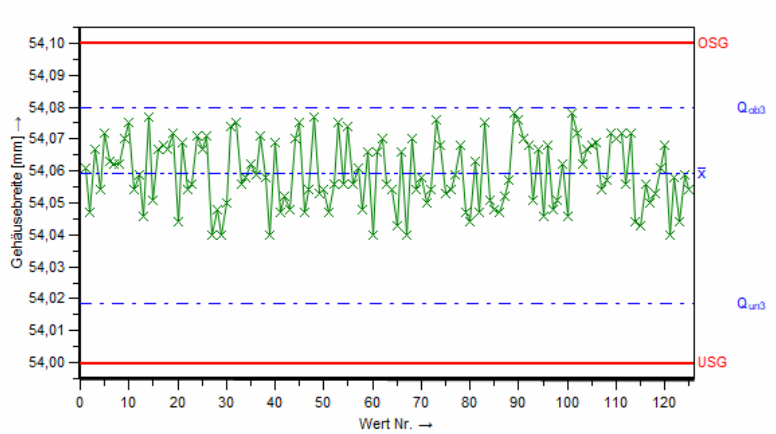
Berechnung von $C_m$ nicht sinnvoll, da einseitig begrenztes Merkmal

$$C_{mk} = \frac{UL - \hat{X}_{50\,\%}}{\hat{X}_{99{,}865\,\%} - \hat{X}_{50\,\%}} = 0{,}60$$

Das Fähigkeitskriterium $C_{mk} \geq 1{,}67$ ist **nicht** erfüllt.

**Beispiel 3: Langzeitfähigkeit eines Fertigungsprozesses**

| | |
|---|---|
| Merkmal: | Gehäusebreite in mm, zweiseitig begrenzt |
| Grenzwerte: | $LL = 54{,}0\ mm$; $LL = 54{,}1\ mm$; zweiseitig begrenzt |
| Anzahl Messwerte (Teile): | $m \cdot n = 125$ |
| Berechnungsmethode: | Quantilmethode $M_{2*,1}$ (mit $\hat{X}_{50\,\%}$ der Verteilungsfunktion) |



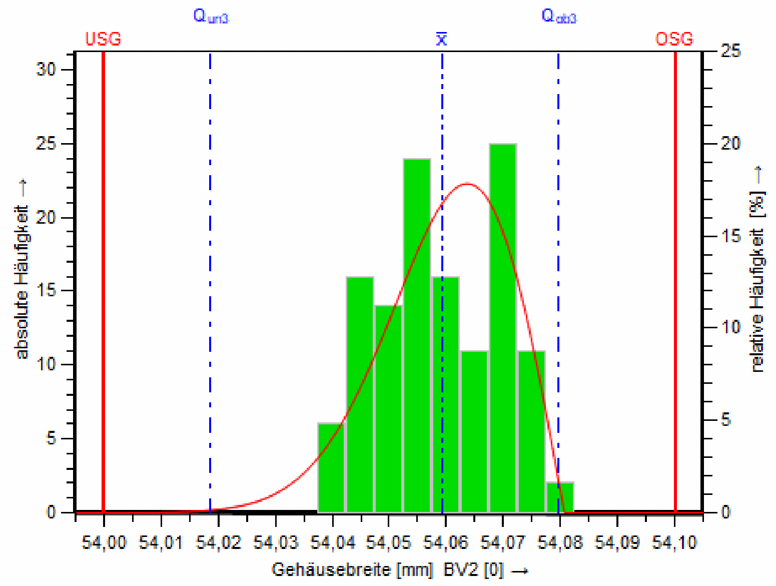




Abbildung 19: Beispiel „Gehäusebreite“; Urwertdiagramm und Histogramm mit Verteilungsfunktion

Verteilungsmodell: Betragsverteilung 2. Art

Quantile: $\hat{X}_{0{,}135\,\%} = 54{,}019\ mm$; $\hat{X}_{50\,\%} = 54{,}280\ mm$; $\hat{X}_{99{,}865\,\%} = 54{,}080\ mm$

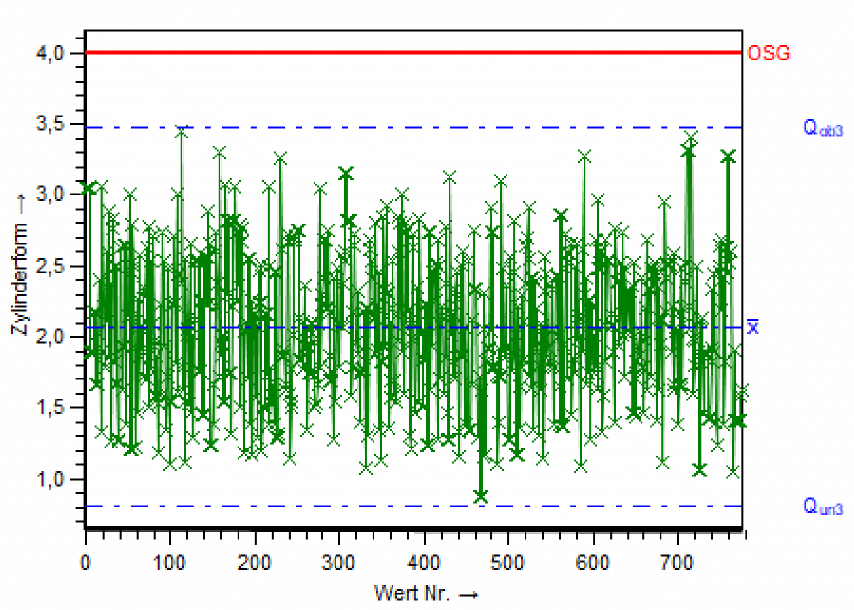
$$C_p = \frac{UL - LL}{\hat{X}_{99{,}865\,\%} - \hat{X}_{0{,}135\,\%}} = 1{,}64 \qquad C_{pk} = \frac{\hat{X}_{50\,\%} - LL}{\hat{X}_{50\,\%} - \hat{X}_{0{,}135\,\%}} = 1{,}45$$

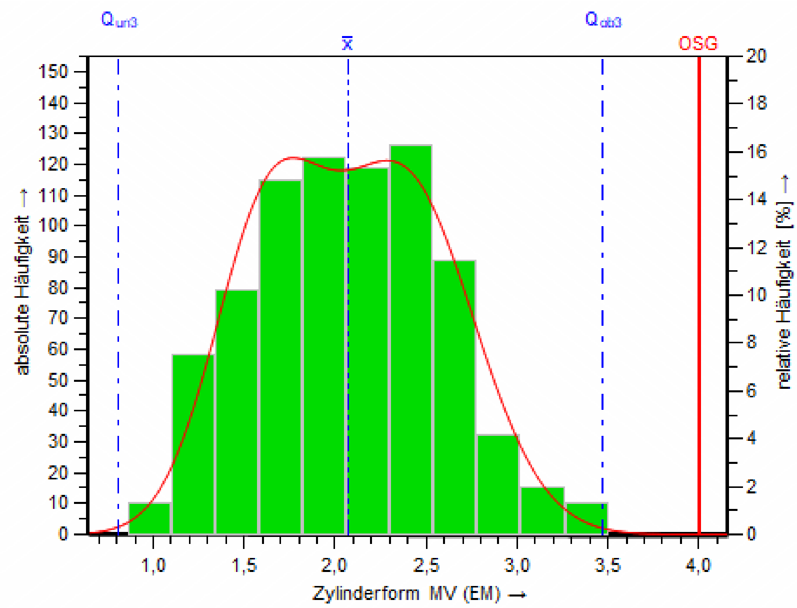
Die Fähigkeitskriterien $C_p \geq 1{,}33$ und $C_{pk} \geq 1{,}33$ sind erfüllt.

**Beispiel 4: Langzeitfähigkeit eines Fertigungsprozesses**

| | |
|---|---|
| Merkmal: | Zylindrizität in µm |
| Grenzwert: | $UL = 4{,}0\ \mu m$; einseitig oben begrenzt |
| Anzahl Messwerte (Teile): | $m \cdot n = 775$ |
| Berechnungsmethode: | Mischverteilung |




Mischverteilung

$\hat{X}_{0,135\,\%} = 0{,}81\ \mu m$

$\hat{X}_{50\,\%} = 2{,}06\ \mu m$

$\hat{X}_{99,865\,\%} = 3{,}47\ mm$

Berechnung von $P_p$ nicht sinnvoll, da einseitig begrenztes Merkmal

$$P_{pk} = \frac{UL - \hat{X}_{50\,\%}}{\hat{X}_{99,865\,\%} - \hat{X}_{50\,\%}} = 1{,}38$$

Abbildung 20: Beispiel „Zylindrizität“; Urwertdiagramm und Histogramm mit Verteilungsfunktion

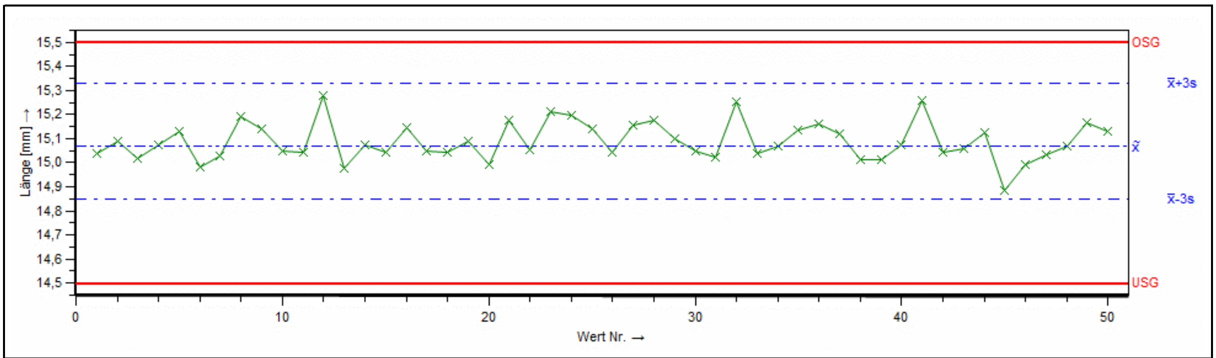
Das Kriterium $P_{pk} \geq 1{,}33$ für die Prozessleistung ist erfüllt.

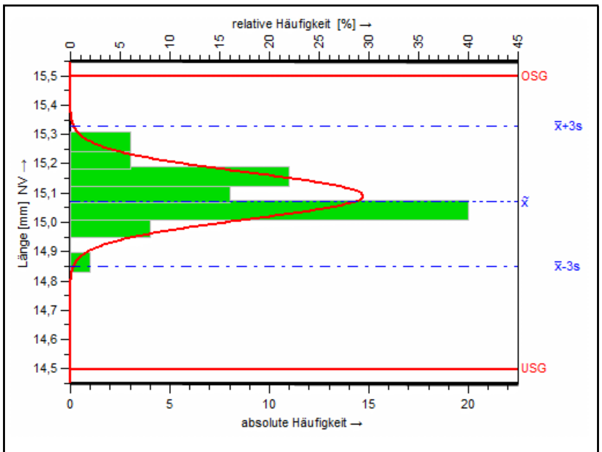
*ANMERKUNG: Hier wurden Langzeitdaten ausgewertet. Da der Prozess systematische Mittelwertsveränderungen aufweist, ist er im Sinne von [ISO 22514-2] nicht stabil. Daher wird der Prozessleistungsindex $P_{pk}$ angegeben.*

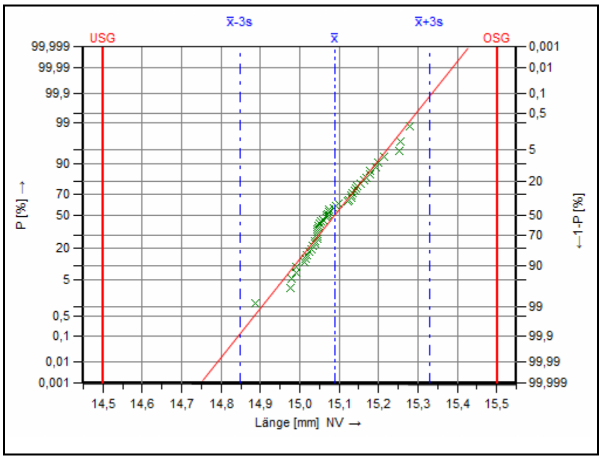
# 13 Formblätter

| BOSCH | Stichprobenanalyse | Blatt: 1/1 |
|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Bereich | : XyP/MSE9 | Arbeitsgang | : Stanzen | Merkmalsbez. | : Länge |
| Gruppe/Abt. | : MOE1.2 | Masch.-Bez. | : Stanzautomat | Merkmal Nr. | : 2.1 |
| Werkstatt/Ber. | : W123 | Masch.-Nr. | : 123 456 789 | Nennmaß | : 15,00 |
| Erzeugnis | : Gehäuse | Prüfplatz | : Linie 3 | Unt. Abmaß | : -0,50 |
| Teil | : Deckel | Prüfmittel | : Messschieber | Ob. Abmaß | : 0,50 |
| Sachnummer | : X01YZ3A456 | Prfm.-Nr. | : JML012X04-5/10 | Toleranz | : 1,00 |
| Änd.-Stand | : 2019-01-20 | Prfm.-Herst. | : Holex | Einheit | : mm |
| Kommentar | : | | | | |




| Zeichnungswerte | | Gemessene Werte | | Statistische Werte | |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_m$ | 15.000 | $\bar{x} - T_m$ | 0,089 | $\bar{x}$ | 15,08910 |
| USG | 14.500 | $x_{min}$ | 14,887 | $\bar{x} - 3\,s$ | 14,84926 |
| OSG | 15.500 | $x_{max}$ | 15,280 | $\bar{x} + 3\,s$ | 15,32894 |
| T | 1.000 | R | 0,393 | 6 s | 0,47969 |
| | | $n_{<T>}$ | 50 | $p_{<T>}$ | 99,99999 % |
| | | $n_{>OSG}$ | 0 | $p_{>OSG}$ | 0,00001 % |
| | | $n_{<USG}$ | 0 | $p_{<USG}$ | 0,00000 % |
| | | $n_{ges}$ | 50 | $n_{eff}$ | 50 |

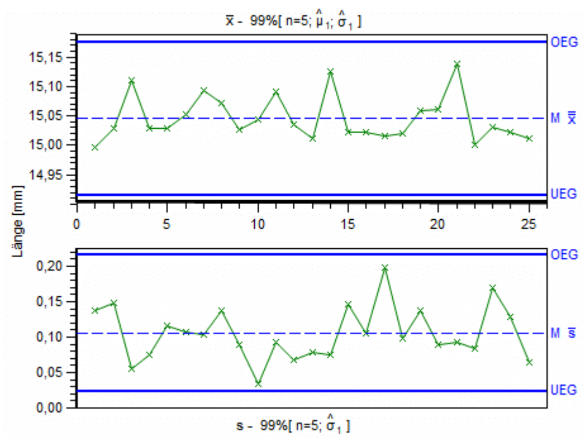
| | | | |
|---|---|---|---|
| Modellverteilung | | Normalverteilung | |
| Berechnungsart | | $M_{2,1}$ Perzentil (0.135%-50%-99.865%) | |
| potentieller Fähigkeitsindex | $C_m$ | $1{,}67 \le \mathbf{2{,}08} \le 2{,}50$ | 0 1,67 |
| kritischer Fähigkeitsindex | $C_{mk}$ | $1{,}36 \le \mathbf{1{,}71} \le 2{,}06$ | 0 1,67 |
| Die Anforderungen sind erfüllt ($C_m$, $C_{mk}$) | | | |
| Berechnungsmethode | | Bosch 2018 | |

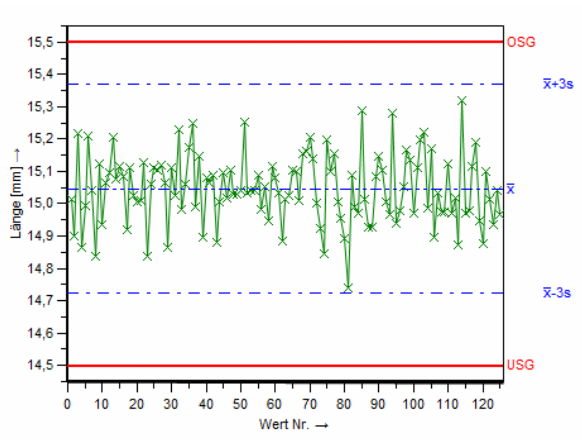
Abbildung 21: Inhalte des RB-Standardberichts zur Maschinenfähigkeit (qs-STAT®)

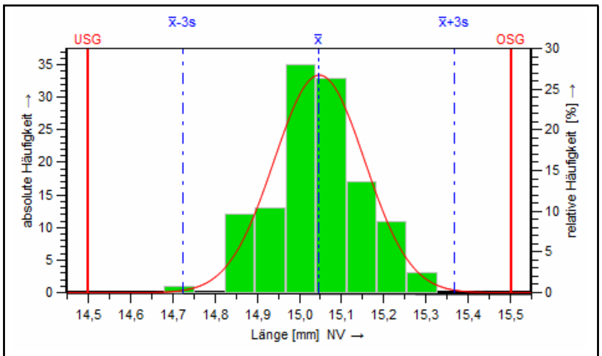
*ANMERKUNG 1: „Stichprobenanalyse“ und „Maschinenfähigkeitsstudie“ bezeichnen dieselbe Untersuchung.*

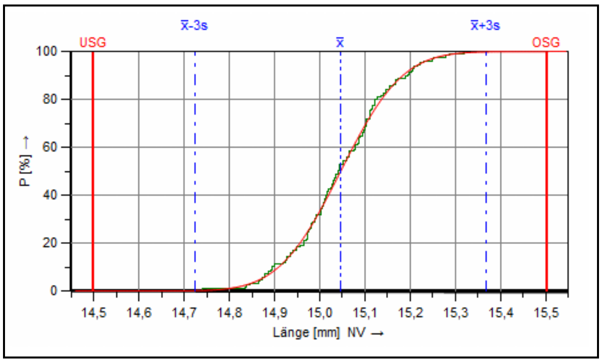
| BOSCH | Prozessanalyse | Blatt: 1/1 |
|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Bereich | : XyP/MSE9 | Arbeitsgang | : Stanzen | Merkmalsbez. | : Länge |
| Gruppe/Abt. | : MOE1.2 | Masch.-Bez. | : Stanzautomat | Merkmal Nr. | : 2.1 |
| Werkstatt/Ber. | : W123 | Masch.-Nr. | : 123 456 789 | Nennmaß | : 15,00 |
| Erzeugnis | : Gehäuse | Prüfplatz | : Linie 3 | Unt. Abmaß | : -0,50 |
| Teil | : Deckel | Prüfmittel | : Messschieber | Ob. Abmaß | : 0,50 |
| Sachnummer | : X01YZ3A456 | Prfm.-Nr. | : JML012X04-5/10 | Toleranz | : 1,00 |
| Änd.-Stand | : 2019-01-20 | Prfm.-Herst. | : Holex | Einheit | : mm |
| Kommentar | : | | | | |




| Zeichnungswerte | | Gemessene Werte | | Statistische Werte | |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_m$ | 15.000 | $\bar{x} - T_m$ | 0,046 | $\bar{x}$ | 15,04604 |
| USG | 14.500 | $x_{min}$ | 14,740 | $\bar{x} - 3\,s$ | 14,72383 |
| OSG | 15.500 | $x_{max}$ | 15,319 | $\bar{x} + 3\,s$ | 15,36825 |
| T | 1.000 | R | 0,579 | 6 s | 0,64442 |
| | | $n_{<T>}$ | 125 | $p_{<T>}$ | 99,99879 % |
| | | $n_{>OSG}$ | 0 | $p_{>OSG}$ | 0,00119 % |
| | | $n_{<USG}$ | 0 | $p_{<USG}$ | 0,00002 % |
| | | $n_{ges}$ | 125 | $n_{eff}$ | 125 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Modellverteilung | | Normalverteilung | |
| Berechnungsart | | $M_{2,1}$ Perzentil (0.135%-50%-99.865% | |
| potentieller Fähigkeitsindex | $C_p$ | $1{,}36 \le \mathbf{1{,}55} \le 1{,}74$ | 0 1,33 |
| kritischer Fähigkeitsindex | $C_{pk}$ | $1{,}22 \le \mathbf{1{,}41} \le 1{,}59$ | 0 1,33 |
| Die Anforderungen sind erfüllt ($C_p$, $C_{pk}$) | | | |
| Berechnungsmethode | | Bosch 2018 | |

Abbildung 22: Inhalte des RB-Standardberichts zur Prozessfähigkeit (qs-STAT®)

*ANMERKUNG 2: Siehe Tabelle 9 zu speziellen Symbolen und Abkürzungen der Q-DAS-Software*

# 14 Fähigkeitskennwerte für zweidimensionale Merkmale

Die Position einer Bohrung ist ein Beispiel für ein zweidimensionales Merkmal. Die Position in einer Ebene ist durch Angabe zweier Koordinaten x und y relativ zum Ursprung (Punkt mit den Koordinaten (0; 0)) eindeutig bestimmt. Die Positionstoleranz kann durch einen Kreis mit Radius T/2 angegeben werden, dessen Mittelpunkt der Sollposition entspricht.

Die folgenden Ausführungen sollen lediglich ein elementares Grundverständnis ermöglichen, ohne die mathematischen Grundlagen darzulegen. Bzgl. Einzelheiten wird auf die Norm [ISO 22514-6] und entsprechende Fachliteratur verwiesen.

Für die folgende Betrachtung wird angenommen, dass die gemessenen Positionen $(x_i, y_i)$ einer zweidimensionalen Normalverteilung folgen, d. h. sowohl die x- als auch die y-Komponente ist normalverteilt. Diese Positionen kann man im x-y-Diagramm als Punkte darstellen. Mit Hilfe geeigneter Software wird an diese Punkte eine zweidimensionale Normalverteilung angepasst und der zugehörige, in diesem Fall ellipsenförmige Zufallsstreubereich berechnet, der gerade noch vollständig innerhalb des Toleranzkreises liegt und den Anteil $1-p$ der Grundgesamtheit einschließt *(maximale Wahrscheinlichkeitsellipse)*.

Der kritische Prozessfähigkeitsindex ist dann gegeben durch $C_{pk} = \frac{u_{1-p}}{3}$.

Dabei bezeichnet $u_{1-p}$ das $(1-p)$-Quantil der eindimensionalen Standardnormalverteilung. Verschiebt man die gemessenen Punkte gemeinsam so, dass ihr Mittelpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ mit dem Mittelpunkt des Toleranzkreises zusammenfällt, wird der gerade noch vollständig innerhalb des Toleranzkreises liegende elliptische Zufallsstreubereich größer und entsprechend der darin enthaltene Anteil $1-p'$ der Grundgesamtheit.

Der potentielle Prozessfähigkeitsindex ist dann gegeben durch $C_p = \frac{u_{1-p'}}{3}$.

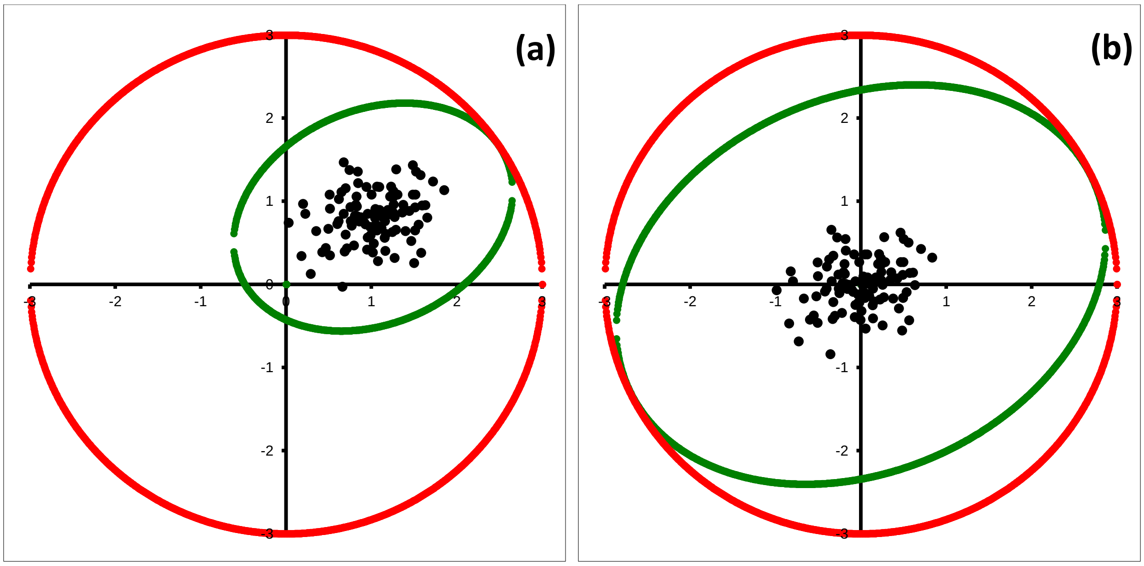



Abbildung 23: Positionsmesswerte, maximale Wahrscheinlichkeitsellipse und Toleranzkreis

(a) Die 4s-Ellipse berührt den Toleranzkreis, $C_{pk} = 1{,}33$

(b) Bei Zentrierung der Punktewolke berührt die 7,6s-Ellipse den Toleranzkreis, $C_p = 2{,}53$.

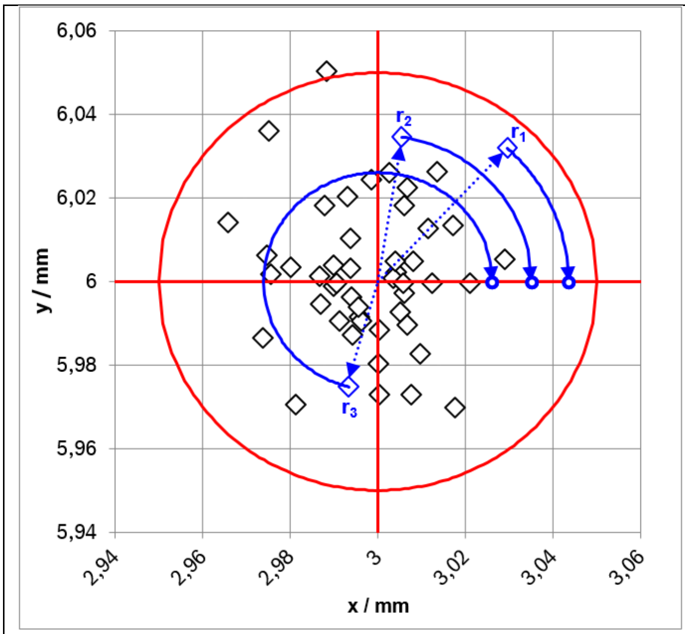
*ANMERKUNG 1: Das skizzierte Verfahren ist auf beliebige bivariate Merkmale anwendbar und kann mit Hilfe der p-variaten Normalverteilung für Merkmale mit p Komponenten verallgemeinert werden.*

Einen **Sonderfall**, der in der Praxis häufig auftritt, stellt die rotationssymmetrische Verteilung von Positionsmesswerten $(x_i, y_i)$ um einen Bezugspunkt $(x_0, y_0)$ dar.

*ANMERKUNG 2: Bezugspunkt kann die spezifizierte Sollposition sein oder die Mittenposition (Mittelwert, Schwerpunkt) der Positionsmesswerte, die gegenüber der Sollposition verschoben sein kann.*

Der Begriff „rotationssymmetrisch“ bedeutet, dass keine signifikante Winkelabhängigkeit der radialen Abstände $r_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$ besteht, so dass die Abstände $r_i$ als eindimensionales Merkmal betrachtet und mit Hilfe der Rayleigh-Verteilung (*Betragsverteilung 2. Art*) z. B. nach Methode $M_{2,1}$ (vgl. Kap. 8.2) ausgewertet werden können.

*ANMERKUNG 3: Die Rayleigh-Verteilung ist stets zu verwenden, wenn die Positionsmesswerte durch eine zweidimensionale, rotationssymmetrische Normalverteilung beschrieben werden. Andere Verteilungen sind in diesem Fall ungeeignet und können zu unangemessen günstigen Fähigkeiten führen.*




*ANMERKUNG 4: Aufgrund der nicht signifikant ausgeprägten Winkelabhängigkeit in diesem Beispiel, kann jeder Positionsmesswert ($x_i, y_i$) unter Beibehaltung seines Abstandes $r_i$ zum Bezugspunkt ($x_0, y_0$) um diesen Bezugspunkt beliebig gedreht werden, ohne dass Information verloren geht. Die Messwerte können deshalb so gedreht werden, dass nach der Drehung alle Punkte auf der x-Achse rechts vom Bezugspunkt liegen (im Diagramm für 3 Messwerte dargestellt). Nach der Drehung repräsentieren die Messwerte ein null-begrenztes, eindimensionales Merkmal mit oberer Spezifikationsgrenze.*

Abbildung 24: Rotationssymmetrisch positionierte Messwerte ($x_i$, $y_i$) mit Toleranzkreis

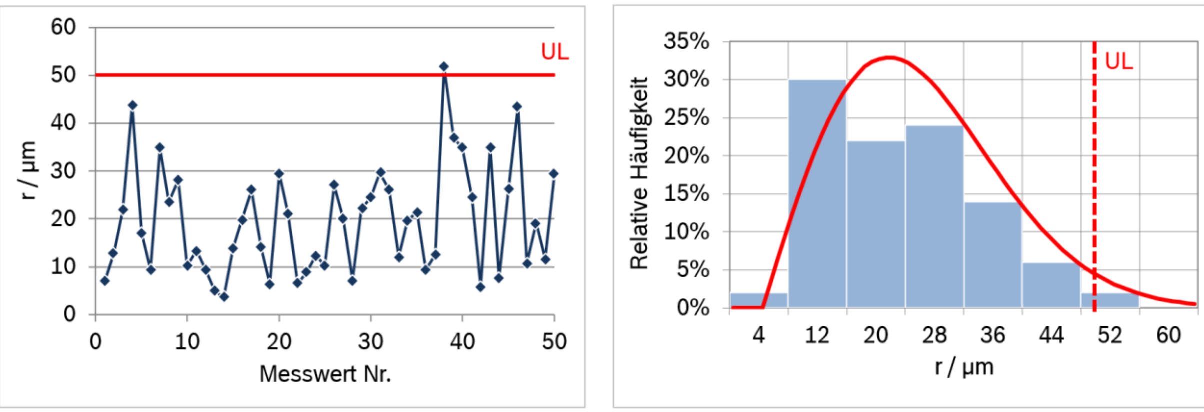



Abbildung 25: Radiale Positionsabweichungen, Histogramm und angepasste Rayleigh-Verteilung

Ist der Bezugspunkt $(x_0, y_0)$ — abweichend vom vorstehenden Beispiel — nicht mit der spezifizierten Sollposition identisch, liegt die rotationssymmetrische Verteilung der Positionsmesswerte nicht mehr konzentrisch im Toleranzkreis. In diesem Fall ist der kürzeste Abstand zwischen Bezugspunkt $(x_0, y_0)$ und Toleranzkreis für die Ermittlung von $C_{pk}$ maßgeblich.

**Anhang**

# A Zeitreihenanalyse

Unter einer Zeitreihe versteht man einen Datensatz, der Informationen für mehrere Zeiträume oder für mehrere Zeitpunkte enthält [Freitag]. Beispiele dafür sind die hier betrachteten Prozessfähigkeitsuntersuchungen oder im Rahmen von SPC-Anwendungen gewonnene Datensätze. Sie bestehen in der Regel aus Stichproben kleinen Umfangs, von z. B. $n = 5$ Messwerten eines Produktmerkmals, die in geringem zeitlichem Abstand ermittelt werden. Eine solche Stichprobe kann als Momentaufnahme des Prozesszustands verstanden werden und als repräsentativ für die Momentanverteilung einer fiktiven Grundgesamtheit.

Die zeitliche Entwicklung der „Momentanverteilung" kann dann anhand der $j = 1, 2, \ldots, m$ Stichproben analysiert werden, die in größerem zeitlichen Abstand voneinander erfasst wurden. Die Stichproben sind natürliche Untergruppen des gesamten Datensatzes von $n \cdot m$ Werten.

Für die in diesem Kapitel beschriebenen Tests im Sinne einer Zeitreihenanalyse, z. B. bzgl. Konstanz der Lage oder der Streuung sowie bzgl. möglicher systematischer Änderungen ist diese Gruppierung in zeitlicher Reihenfolge unabdingbare Voraussetzung.

## A.1 Tests auf Konstanz der Prozess-Streuung

### A.1.1 Cochran-Test

Mit dem Cochran-Test lässt sich feststellen, ob die größte der Varianzen von m Stichproben sich signifikant von den Varianzen der übrigen Stichproben unterscheidet [*ISO 5725-2*]. Wegen der Prüfgröße C heißt dieser Test auch Cochrans C-Test.

$$C = \frac{s_{max}^2}{\sum_{j=1}^{m} s_j^2}$$

Darin bezeichnet $s_{max}^2$ die größte der Varianzen $s_j^2$ von m Stichproben. Voraussetzungen:

- Die Stichproben haben jeweils denselben Umfang n.
- Die Einzelwerte $x_i$ innerhalb jeder Stichprobe sind normalverteilt.

Nullhypothese: Die Varianzen der Stichproben sind gleich

### A.1.2 Varianzanalyse und F-Test

Bei der einfachen Varianzanalyse (Streuungszerlegung) wird die Gesamtstreuung aller Einzelwerte in zwei Anteile zerlegt, eine sogenannte *innere Streuung* $\overline{s_x^2} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} s_k^2$ der einzelnen Stichproben ($m$ Gruppen mit $n = 5$ Werten) und eine sogenannte *äußere Streuung* zwischen den einzelnen Stichproben, d. h. die Streuung der Stichprobenmittelwerte (vgl. Anhang H, Abb. 41):

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{k=1}^{m} (\bar{x}_k - \bar{\bar{x}})^2 \quad \text{mit dem Gesamtmittelwert} \quad \bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} \bar{x}_k$$

Durch Vergleich der Prüfgröße $F = \frac{n \cdot s_{\bar{x}}^2}{\overline{s_x^2}}$ mit dem 95%-Schwellenwert der F-Verteilung (F-Test) wird geprüft, ob die äußere Streuung signifikant größer ist als die innere Streuung. Ist dies nicht der Fall, wird der Prozess als stabil betrachtet.

> *ANMERKUNG: Die Signifikanz wird durch das Vertrauensniveau bestimmt, das in diesem Fall üblicherweise auf 95 % festgelegt wird, d. h. 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit. Die Varianzanalyse heißt „einfach", um sie von einer zweifachen oder mehrfachen zu unterscheiden.*

### A.1.3 Einfache Alternativen

Der Anhang B.2 beschreibt im Detail einen einfachen Stabilitätstest für die Prozess-Streuung, der relativ leicht „von Hand“ oder z. B. mit Hilfe von EXCEL durchgeführt werden kann.

## A.2 Tests auf Konstanz der Prozess-Lage

### A.2.1 Kruskal-Wallis-Test

Mit Hilfe des Kruskal-Wallis-Tests (auch H-Test genannt) kann beurteilt werden, ob die Lage (Position) der „Momentanverteilungen“ konstant ist [Kruskal]. Siehe dazu auch Kapitel 6.3. Dieser Test basiert auf den Rängen der nach Größe geordneten Einzelwerte und setzt kein bekanntes Verteilungsmodell voraus. Die $N = m \cdot n$ Einzelwerte $x_{i,j}$ der $m$ Stichproben vom Umfang $n$ werden der Größe nach geordnet. Der kleinste Wert hat den Rang 1, der größte Wert den Rang $N$.

$R_j$ bezeichnet die Summe der Ränge der j-ten Stichprobe: $R_j = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}$.

Die Prüfgröße $H = \frac{12}{N \cdot (N+1)} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m} R_j^2 - 3 \cdot (N+1)$ ist näherungsweise $\chi^2$-verteilt mit $m - 1$ Freiheitsgraden. Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn $H > \chi^2_{m-1;\,\alpha}$ .

*Anmerkung 1: [Kruskal] gibt H zusätzlich in einer anderen Schreibweise an. Sie zeigt, dass H die Form einer $\chi^2$-verteilten Zufallsgröße hat. $(N+1)/2$ ist der Mittelwert, $(N^2-1)/12$ ist die Varianz der Ränge 1, 2, ..., N.*

*Anmerkung 2: In der vorstehenden Beschreibung wird vereinfachend angenommen, dass der Datensatz keine identischen Werte $x_{i,j}$ enthält, die Ränge also alle verschieden sind. Andernfalls ist ggf. eine Korrektur der Testgröße notwendig. Details dazu beschreiben z.B. [Wilrich], [Sachs] und [Kruskal].*

Voraussetzungen:

- Es liegen gruppierte Daten vor, wobei die einzelnen Gruppen als unabhängige Stichproben aus einer „Momentanverteilung“ betrachtet werden.
- Alle Stichproben unterliegen derselben Verteilungsform. Die Verteilungsfunktion ist stetig.

Nullhypothese: Die $m$ Stichproben entstammen derselben Grundgesamtheit.

### A.2.2 Einfache Alternativen

Die Anhänge B.1 und B.3 beschreiben im Detail einige Varianten von Stabilitätstests für die Prozesslage, die relativ leicht „von Hand“ oder z. B. mit Hilfe von EXCEL durchgeführt werden können.

## A.3 Test auf Trend

Ein einfacher Trendtest nach [Neumann] verwendet die Summe quadrierter Differenzen aufeinanderfolgender Werte $\Delta^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2$ im Vergleich zur Varianz $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ des Datensatzes. Wenn die aufeinanderfolgenden Werte unabhängig voneinander sind, ist $\frac{\Delta^2}{s^2} \cong 2$. Bei vorliegenden Trend wird $\Delta^2 < 2 \cdot s^2$. Grund dafür ist, dass $s^2$ durch den Trend größer wird, während er das $\Delta^2$ kaum beeinflusst.

Diese Methode der Sukzessiven Differenzenstreuung funktioniert zur Erkennung von sägezahnartigen Zeitreihen (Trends) als auch von sprunghaften, mäanderförmigen Änderungen mit stückweisen horizontalen Verläufen (Chargensprüngen).

Im Ausdruck für die Varianz spielt die Reihenfolge der $(x_i - \bar{x})^2$ keine Rolle. Der Test setzt voraus, dass die $x_i$ einer normalverteilten Grundgesamtheit entstammen. Zu Details siehe [Neumann], [Sachs] und [Schulze].

## A.4 Test auf Zufälligkeit

In der Version nach Swed-Eisenhart [Swed] bezieht sich der Test allgemein auf ein Merkmal, das nur zwei verschiedene Ergebnisse annehmen kann, z. B. die Ergebnisse Kopf „K“ und Zahl „Z“ beim Münzwurf. Ein solches Merkmal heißt zweiwertig (dichotom). Da die Wahrscheinlichkeit für die Ergebnisse „K“ und „Z“ jeweils ½ ist, erwartet man, dass bei aufeinanderfolgenden Würfen eine Folge von mehreren gleichen Ergebnissen, ein sogenannter „Run“, eher selten auftritt und umso seltener, je länger der Run ist. Die Wahrscheinlichkeit für den Run „ZZZZZZZ“ etwa ist $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 0{,}0078$. Er tritt also nur in weniger als 1 % der Fälle auf.

Bei einem kontinuierlichen Merkmal kann dieses Prinzip als Test auf Zufälligkeit dienen. Unabhängig vom Verteilungsmodell liegen unterhalb und oberhalb des Medians gleich viele Werte. In einer aufeinanderfolgenden Serie von Messwerten sollten also längere Runs von Werten, die alle nur positive oder nur negative Abweichungen vom Median haben, sehr selten auftreten. Der Run-Test nach Wald-Wolfowitz prüft anhand der Anzahl der Runs in einer Wertefolge, ob die Reihenfolge der Werte zufällig ist oder nicht. So können Trends oder Periodizitäten in einer zeitlichen Abfolge von Werten erkannt werden.

# B Einfache statistische Stabilitätstests

Kriterium für ausreichende Stabilität auf Vertrauensniveau $(1-\alpha)\cdot 100\ \%$ sind Werte innerhalb des $(1-\alpha)\cdot 100\ \%$-Zufallsstreubereiches der Grundgesamtheit, aus der diese Werte stammen. Die Grenzen dieses Bereiches werden bei Qualitätsregelkarten als Eingriffsgrenzen bezeichnet.

Die Standardabweichung $\sigma_x$ der Einzelwerte in der Grundgesamtheit wird nach

$$\sigma_x \approx \hat{\sigma}_x = \frac{\bar{s}}{c_4} \tag{B.1}$$

abgeschätzt mit

- $\bar{s}$ Mittelwert der Standardabweichungen aller Stichproben,
- $n$ Anzahl Einzelwerte je Stichprobe (Stichprobenumfang),
- $m$ Anzahl Stichproben,
- $c_4$ Faktor nach Tabelle 1

Die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ der Stichprobenmittelwerte $\bar{x}$ wird anhand der Einzelwerte nach

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \frac{\bar{s}}{c_4\cdot\sqrt{n}} \tag{B.2}$$

abgeschätzt, wobei $\sigma_{\bar{x}}$ gemäß Gl. (B.1) ersetzt wurde.

## B.1 Lage der Einzelstichproben

Die Mittelwerte $\bar{x}_j$ von Stichproben, die jeweils aus n $\geq$ 5 Einzelwerten bestehen, können aufgrund des Grenzwertsatzes der Statistik als ausreichend normalverteilt betrachtet werden. Entsprechend sind die Größen $\frac{\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}$ mit Wahrscheinlichkeit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ im Intervall $[u_{\alpha/2}; u_{1-\alpha/2}]$ der Standardnormalverteilung zu erwarten. Bezogen auf die ursprüngliche Skala des Messsystems entspricht dies einer Normalverteilung mit Mittelwert $\bar{\bar{x}}$ (Mittelwert der Stichprobenmittelwerte $\bar{x}$) und Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\bar{\bar{x}} - u_{\alpha/2}\cdot\sigma_{\bar{x}} \leq \bar{x}_j \leq \bar{\bar{x}} + u_{1-\alpha/2}\cdot\sigma_{\bar{x}} \tag{B.3}$$

$\sigma_{\bar{x}}$ durch Gl. (B.2) ersetzt ergibt

$$\bar{\bar{x}} - \frac{u_{\alpha/2}}{c_4\cdot\sqrt{n}}\cdot\bar{s} \leq \bar{x}_j \leq \bar{\bar{x}} + \frac{u_{1-\alpha/2}}{c_4\cdot\sqrt{n}}\cdot\bar{s} \tag{B.4}$$

Unter- und Obergrenze für $\bar{x}$ entsprechen der unteren bzw. oberen Eingriffsgrenze einer $\bar{x}$-Karte.

Ergebnisse für Stichprobenumfang n = 5 und die Vertrauensniveaus 99 % und 99,73 %:

$$\alpha = 0{,}01: \qquad \bar{\bar{x}} - \frac{2{,}58}{0{,}94\cdot\sqrt{5}}\cdot\bar{s} \leq \bar{x}_j \leq \bar{\bar{x}} + \frac{2{,}58}{0{,}94\cdot\sqrt{5}}\cdot\bar{s} \quad \text{oder} \quad \bar{\bar{x}} - 1{,}23\cdot\bar{s} \leq \bar{x}_j \leq \bar{\bar{x}} + 1{,}23\cdot\bar{s}$$

$$\alpha = 0{,}0027: \qquad \bar{\bar{x}} - \frac{3{,}00}{0{,}94\cdot\sqrt{5}}\cdot\bar{s} \leq \bar{x}_j \leq \bar{\bar{x}} + \frac{3{,}00}{0{,}94\cdot\sqrt{5}}\cdot\bar{s} \quad \text{oder} \quad \bar{\bar{x}} - 1{,}43\cdot\bar{s} \leq \bar{x}_j \leq \bar{\bar{x}} + 1{,}43\cdot\bar{s}$$

Die **Prozesslage** wird mit einem Grad des Vertrauens von $(1-\alpha)\cdot 100\%$ als stabil betrachtet, wenn die Mittelwerte $\bar{x}_j$ aller Stichproben zwischen den zugehörigen Grenzwerten liegen.

## B.2 Streubreite der Einzelstichproben

Die Verteilung der Standardabweichungen $s_i$ der Einzelstichproben wird durch die $\chi^2$-Verteilung beschrieben. Entsprechend sind diese Standardabweichungen mit Wahrscheinlichkeit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ in einem Intervall zu erwarten, das durch die entsprechenden Quantile der $\chi^2$-Verteilung begrenzt wird:

$$\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}{n-1}}\cdot\sigma_x \le s_i \le \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}{n-1}}\cdot\sigma_x \qquad \text{(B.5)}$$

Den Schätzer $\hat{\sigma}_x$ nach Gl. (B.1) anstelle von $\sigma_x$ eingesetzt ergibt die Obergrenze

$$s_i \le \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}{n-1}}\cdot\frac{\bar{s}}{c_4} \qquad \text{(B.6)}$$

Die Obergrenze entspricht der oberen Eingriffsgrenze einer s-Karte.

Ergebnisse für den Stichprobenumfang n = 5 und die Vertrauensniveaus 99 % und 99,73 % [13]

$\alpha = 0{,}01$: $\quad s_i \le \sqrt{\frac{14{,}86}{5-1}}\cdot\frac{\bar{s}}{0{,}94}$ oder $s_i \le 2{,}05\cdot\bar{s}$

$\alpha = 0{,}0027$: $\quad s_i \le \sqrt{\frac{17{,}80}{5-1}}\cdot\frac{\bar{s}}{0{,}94}$ oder $s_i \le 2{,}24\cdot\bar{s}$

Die **Prozessstreuung** wird mit einem Grad des Vertrauens von $(1-\alpha)\cdot 100\ \%$ als stabil betrachtet, wenn die Standardabweichungen $s_i$ aller Einzelstichproben unterhalb des zugehörigen Grenzwerts liegen.

## B.3 Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte

Die Verteilung der Standardabweichungen $s_{\bar{x}}$ der Stichprobenmittelwerte wird gleichermaßen durch die $\chi^2$-Verteilung beschrieben. Allerdings sind jetzt die m Einzelstichproben als eine einzige Stichprobe der Größe $m$ zu betrachten:

$$\sqrt{\frac{\chi^2_{m-1;\alpha/2}}{m-1}}\cdot\sigma_{\bar{x}} \le s_{\bar{x}} \le \sqrt{\frac{\chi^2_{m-1;1-\alpha/2}}{m-1}}\cdot\sigma_{\bar{x}} \qquad \text{(B.7)}$$

Den Schätzer $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ nach Gl. (B.2) anstelle von $\sigma_{\bar{x}}$ eingesetzt ergibt die Obergrenze

$$s_{\bar{x}} \le \sqrt{\frac{\chi^2_{m-1;1-\alpha/2}}{m-1}}\cdot\frac{\bar{s}}{c_4\cdot\sqrt{n}} \qquad \text{(B.8)}$$

Ergebnisse für m = 25 Stichproben, jede Stichprobe mit Umfang n, und die Vertrauensniveaus 99 % und 99,73 % [13]:

$\alpha = 0{,}01$: $\quad s_{\bar{x}} \le \sqrt{\frac{45{,}558}{25-1}}\cdot\frac{\bar{s}}{c_4\cdot\sqrt{n}}$ oder $s_{\bar{x}} \le \frac{1{,}38\cdot\bar{s}}{c_4\cdot\sqrt{n}}$

$\alpha = 0{,}0027$: $\quad s_{\bar{x}} \le \sqrt{\frac{50{,}163}{25-1}}\cdot\frac{\bar{s}}{c_4\cdot\sqrt{n}}$ oder $s_{\bar{x}} \le \frac{1{,}45\cdot\bar{s}}{c_4\cdot\sqrt{n}}$

Die **Prozesslage** wird mit einem Grad des Vertrauens von $(1-\alpha)\cdot 100\ \%$ als stabil betrachtet, wenn die Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte unterhalb des zugehörigen Grenzwerts liegt.

[13] Bei Verwendung der EXCEL-Funktion CHIINV ist zu beachten, dass α/2 anstelle von 1 – α/2 als Wahrscheinlichkeit einzusetzen ist.

# C Messergebnisse und Verteilungsmodelle

*HINWEIS: Für die Betrachtungen dieses Kapitels ist lediglich die Gesamtzahl Messwerte maßgeblich, nicht deren Zuordnung zu einzelnen Stichproben. Daher werden alle Messwerte als eine Stichprobe der Größe n behandelt.*

## C.1 Anpassung von Verteilungsmodellen

Erfasste Messwerte können u. a. in Form sogenannter Urwertdiagramme dargestellt werden (siehe Abb. 26a). Um diese Messergebnisse jedoch auch statistisch bewerten zu können, ist es erforderlich, ein passendes Verteilungsmodell zu finden und anzupassen (siehe Abb. 26b). Dafür existieren zahlreiche Möglichkeiten. Das vorliegende Kapitel erläutert die Grundlagen sogenannter *Quantile-Quantile-Plots*, die insbesondere bei näherungsweise normalverteilten Daten häufig angewandt werden, jedoch nicht darauf beschränkt sind.

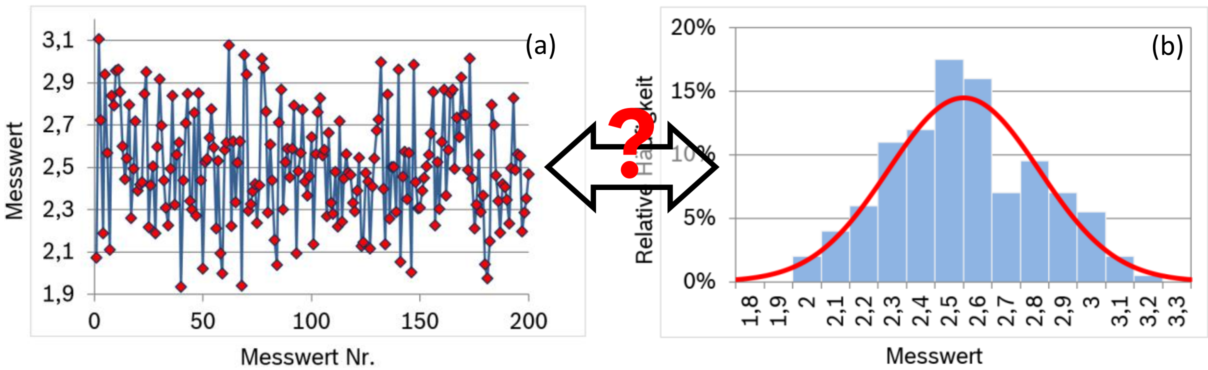


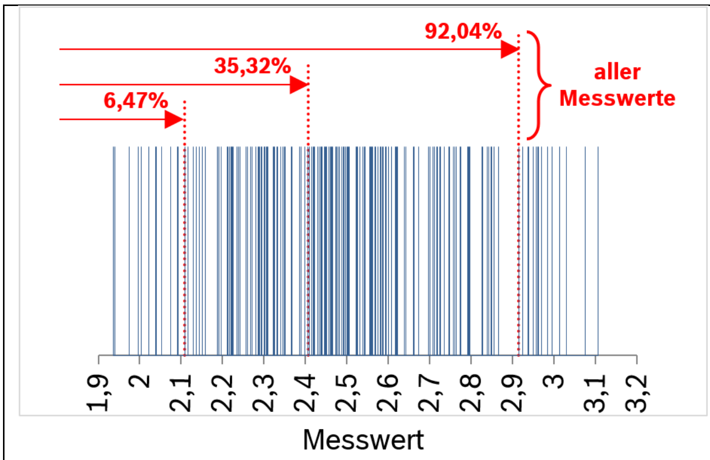

Abbildung 26: (a) Urwertdiagramm; (b) zugehöriges Histogramm mit angepasster Verteilungsdichte

Grundidee und Konzept:

- Die Messwerte repräsentieren die p-Quantile einer unbekannten Verteilung.
- Die passende Verteilung wird durch Vergleich der p-Quantile der unbekannten Verteilung mit den p-Quantilen bekannter Verteilungen ermittelt (*Quantile-Quantile Plot*).

Sinnvolle Verteilungen werden in erster Linie auf Basis technischer Randbedingungen (z. B. technisch bedingte Begrenzungen von Merkmalswerten) und ggf. bestehender Vorgaben ausgewählt.

Vorgehen:




- Die Messwerte $x_i$ nach aufsteigender Größe ordnen
- Zu jedem Messwert $x_i$ die Anzahl $\nu(x_i)$ der Messwerte im Wertebereich $\xi \leq x_i$ ermitteln (anschaulich ist das die Anzahl Messwerte, die „links“ vom jeweiligen Messwert $x_i$ liegt).
- Relative Anteile $p(x_i)$ ermitteln, indem die ermittelten Anzahlen $\nu(x_i)$ durch die Gesamtzahl n aller Messwerte dividiert wird:

$$p(x_i) = \frac{\nu(x_i)}{n}.$$

Abbildung 27: Messwerte x sortiert nach aufsteigender Größe

- Die Anteile $p(x_i)$ über den Messwerten $x_i$ aufgetragen ergibt eine sogenannte Summenkurve, die einer groben Schätzung der Verteilungskurve entspricht.

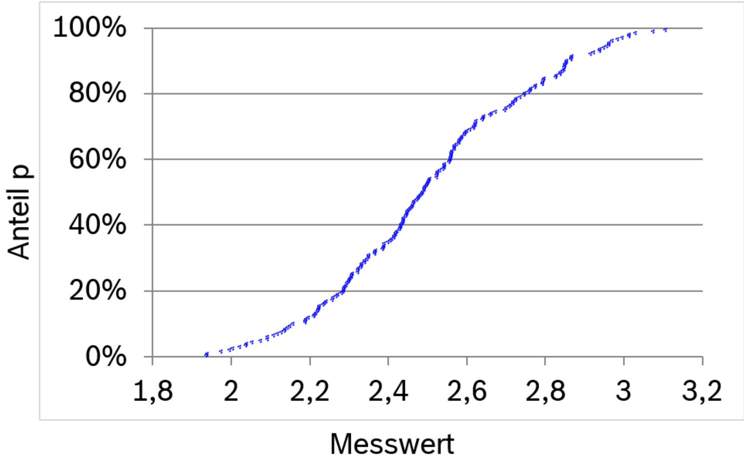



Abbildung 28: Anteile p(x) über den Messwerten x aufgetragen

Beispiel Normalverteilung: .

- Die Skala der y-Achse der Summenkurve $p(x_i)$ wird mit Hilfe der bekannten Verteilungskurve $p(u_p)$ der Standardnormalverteilung (Abb. 29 a) in die Skala der Quantile $u_p$ der Standardnormalverteilung umskaliert (*Quantile-Quantile Plot*, Abb. 29 b).

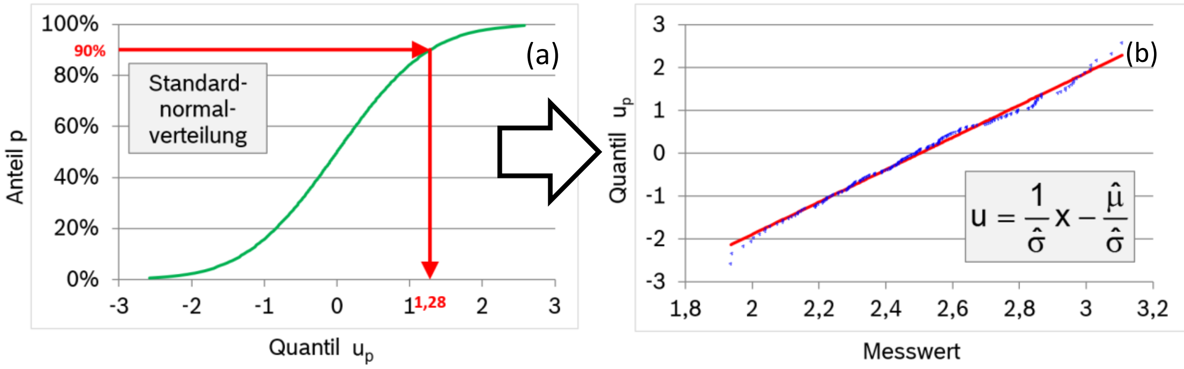



Abbildung 29: Umskalierung der Anteile p in Quantile $u_p$ am Beispiel Normalverteilung

- Im Fall ideal normalverteilter Messwerte $x_i$ lägen alle Punkte $(x_i\,;\,u_p)$ exakt auf einer Geraden.
- Bei realen Messwerten ist dies in der Regel nicht der Fall. Stattdessen wird eine Ausgleichsgerade u(x) mit Hilfe einer linearen Regression ermittelt, die die Parameter $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}$ liefert

Beim Vergleich mit anderen Verteilungsmodellen ist das Vorgehen analog.

## C.2 Auswahl von Verteilungsmodellen

In der Praxis lassen sich oft mehrere, unterschiedliche Verteilungsmodelle gut an die Messdaten anpassen, ohne dass signifikante Unterschiede der Anpassungsgüte z. B. optisch erkennbar sind. Deshalb wird ein quantitatives Auswahlkriterium benötigt. Typische Beispiele:

- Verteilung mit dem größten Korrelationskoeffizienten *r*:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

  Dabei bezeichnet $x_i$ die Messwerte und $y_i$ die jeweiligen Quantile des Verteilungsmodells, gegen das verglichen wird (d. h. das dem Messwert $x_i$ jeweils zugeordnete Quantil $u_P$ in Abb. 29 b).

  Falls Spezifikationsgrenzen festgelegt sind: Korrelationskoeffizient $r_{25\,\%}$ ermittelt aus den 25 % aller Messwerte, die der kritischeren Grenze am nächsten liegen (Option z. B. in der Q-DAS-Software verfügbar).

- $\chi^2$-Test.

Das folgende Beispiel zeigt die Korrelationskoeffizienten, die sich mit demselben Datensatz (siehe Abb. 26 a) für verschiedene Verteilungsmodelle ergeben:

| **Verteilungsmodell** | **r (*r<sub></sub>*$r_{100\,\%}$)** | $r_{25\,\%}$ |
|---|---|---|
| Normalverteilung | **0,99745** | **0,94724** |
| Betragsverteilung 1. Art | 0,48309 | |
| Betragsverteilung 2. Art | 0,64373 | |
| Weibullverteilung | 0,98936 | 0,96603 |

Tabelle 2: Beispiel für Korrelationskoeffizienten verschiedener Verteilungsmodelle

In diesem Beispiel liefert die Normalverteilung die (rechnerisch) beste Anpassung.

*ANMERKUNG: Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass dies ein rein mathematisch begründetes Ergebnis ist. Ob die ermittelte Verteilung tatsächlich mit den technischen Randbedingungen verträglich ist, kann ausschließlich vom Anwender bewertet werden.*

## C.3 Parameterschätzung und Vertrauensbereich

Grundaufgabe bei der Ermittlung von Verteilungsmodellen ist, auf Basis *repräsentativer* Stichproben auf die (in der Regel unbekannten) Eigenschaften der Grundgesamtheit zu schließen, aus der die Stichproben entnommen wurden. Der Begriff „repräsentativ“ bedeutet, dass die Eigenschaften der Grundgesamtheit möglichst vollständig auch in der Stichprobe enthalten sein müssen, damit ein sinnvoller Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit möglich ist.

Leider existiert kein Kriterium, das erlaubt zu entscheiden, ob eine Stichprobe ausreichend repräsentativ für die Grundgesamtheit ist oder nicht. Zudem sind die Eigenschaften der Grundgesamtheit häufig prinzipiell nicht vollständig bekannt, da sie noch nicht vollständig existiert.

> *ANMERKUNG: Bei Produktionsprozessen ist das die Regel. Hier wird anhand von Stichproben aus dem bereits existierenden Anteil der Grundgesamtheit (Gesamtheit aller bisher produzierten Erzeugnisteile) auf die Eigenschaften der Grundgesamtheit inklusive des zukünftig noch zu produzierenden Anteils geschlossen.*

Um repräsentativen Stichproben trotzdem möglichst nahezukommen, sollte zumindest die Grundanforderung der Statistik bzgl. Zufälligkeit hinreichend erfüllt sein. Dies bedeutet, dass Stichprobenelemente der Grundgesamtheit nach dem Zufallsprinzip entnommen werden müssen und nicht gezielt ausgewählt werden dürfen.

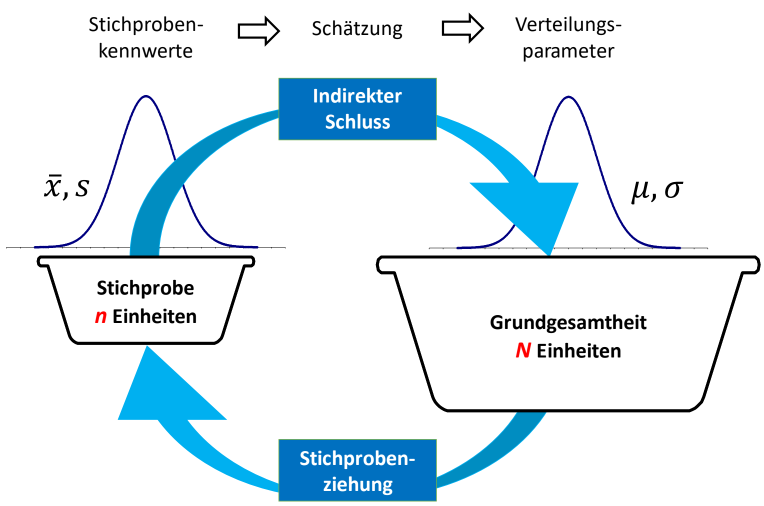
Nur dann ist zu erwarten, dass die Stichprobenelemente mit bestimmter Wahrscheinlichkeit in einem Wertebereich liegen, der der (in der Regel unbekannten) Streuung der Grundgesamtheit entspricht und als **Zufallsstreubereich** bezeichnet wird.

Auf Basis dieser Stichprobenelemente werden die empirischen Kennwerte der Stichprobe ermittelt. Dazu gehören zumindest Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung $s$ als Kenngrößen der Lage bzw. Streuung. Bei nicht normalverteilten Daten sind weitere Kennwerte erforderlich (z. B. Schiefe, Wölbung).

Die ermittelten empirischen Stichprobenkennwerte (z. B. $\bar{x}$ und $s$) werden als Schätzer ($\hat{\mu}$ bzw. $\hat{\sigma}$) für die entsprechenden Parameter der Grundgesamtheit ($\mu$ bzw. $\sigma$) verwendet, d. h. im einfachsten Fall

$$\mu \approx \hat{\mu} \approx \bar{x} \qquad \text{und} \qquad \sigma \approx \hat{\sigma} \approx s.$$

Diese Vorgehensweise wird als **indirekter Schluss** bezeichnet (vgl. Abb. 30).




*HINWEIS: Meist werden **mehrere** Stichproben gezogen und Schätzer für $\mu$ und $\sigma$ nach bestimmten Berechnungsvorschriften wie z. B.*

$$\mu \approx \hat{\mu} \approx \bar{\bar{x}} \text{ und } \sigma \approx \hat{\sigma} = \sqrt{\overline{s^2}}$$

*ermittelt (Methode $M_{3,1}$); siehe Kap. 8.2 und 8.3.*

Abbildung 30: Indirekter Schluss — Kenngrößen, Schätzer, Parameter

Jede Schätzung ist mit einer Unsicherheit verbunden. Die „Verlässlichkeit" der ermittelten Parameter der Grundgesamtheit wird durch den sogenannten **Vertrauensbereich** bewertet:

> Bereich, in dem auf der Basis von ermittelten **Stichprobenkenngrößen** (Mittelwert, Varianz) und des Verteilungsmodells (z. B. Normalverteilung) der wahre Wert eines bestimmten **Parameters der Grundgesamtheit** mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit (Vertrauensniveau, Grad des Vertrauens) zu erwarten ist.

Die Bedeutung veranschaulicht folgendes Beispiel:

- Es werden **hypothetisch** 100 Stichproben gezogen. Für jede einzelne Stichprobe wird der Mittelwert $\bar{x}$ mit zugehörigem 95 %-Vertrauensbereich berechnet.
- Vertrauensniveau 95 % für den Parameter μ bedeutet, dass im Mittel 95 der für $\bar{x}$ berechneten Vertrauensbereiche den wahren Parameterwert $\mu$ enthalten (vgl. Abb. 31).
- Dies bedeutet anschaulich, dass im Mittel 95 der für $\bar{x}$ berechneten Vertrauensbereiche in Teilbereichen überlappen müssen, damit die Aussage prinzipiell zutreffen kann.
- **In der Praxis** wird nur 1 Stichprobe gezogen, so dass 5 % Risiko bestehen, zufällig eine Stichprobe zu ziehen, deren berechneter Vertrauensbereich den wahren Parameter $\mu$ nicht enthält.

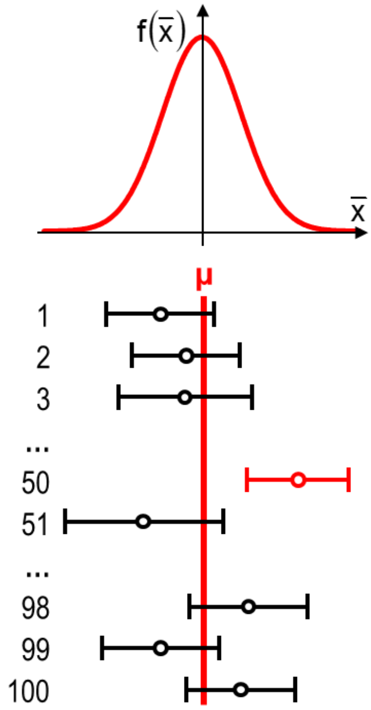



Abbildung 31: Vertrauensbereiche

Berechnung im Fall normalverteilter Daten:

Bei einer Stichprobe bestehend aus $n \geq 30$ normalverteilten Messwerten $x$ mit Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung $s$ ist der wahre Wert zum normierten Wert $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha) \cdot 100$ % zwischen den Quantilen $u_{\alpha/2}$ und $u_{1-\alpha/2}$ der Standardnormalverteilung zu erwarten:

$$u_{\alpha/2} \leq \frac{x - \bar{x}}{s} \leq u_{1-\alpha/2} \qquad \text{oder nach } x \text{ aufgelöst} \qquad \bar{x} + u_{\alpha/2} \cdot s \leq x \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot s$$

Entsprechend wird das Intervall $[\bar{x} + u_{\alpha/2} \cdot s; u_{1-\alpha/2} \cdot s]$ als Vertrauensbereich für *x* auf Vertrauensniveau $(1 - \alpha) \cdot 100$ % bezeichnet.

Das Vorgehen bei anderen Verteilungen ist analog (z. B. t-Verteilung für Positionen bei Stichprobenumfang $n < 30$, $\chi^2$-Verteilung für Varianzen). Im Unterschied zur Standardnormalverteilung wirkt sich bei diesen und zahlreichen weiteren Verteilungen der Stichprobenumfang $n$ zusätzlich zum Vertrauensniveau auf die Vertrauensgrenzen aus und damit auf statistische Kenngrößen wie z. B. $C_p$ (vgl. z. B. Anhang I.1, Abb. 42 „Trompetenkurve").

## C.4 Hinweise zur Auswahl von Verteilungsmodellen

Die Ergebnisse einer Fähigkeitsanalyse hängen entscheidend von der angemessenen Wahl des statistischen Verteilungsmodells für die **Grundgesamtheit** ab. Stichproben stellen lediglich Momentaufnahmen dar. Der Schluss vom Verteilungsmodell der Stichprobe auf das Verteilungsmodell der Grundgesamtheit ist deshalb bereits problematisch. Die Problematik verschärft sich weiter mit dem Trend zu immer weniger Stichproben und kleinerem Stichprobenumfang, d. h. einer zunehmend unzureichenden statistischen Datenbasis. Ein adäquates Verteilungsmodell der Grundgesamtheit ist auf diese Weise häufig nicht unmittelbar zu ermitteln und Expertenwissen absolut unverzichtbar.

Software wählt ein statistisches Verteilungsmodell für eine Stichprobe z. B. mittels statistischer Tests oder Regressionskoeffizienten aus. Das Auswahlkriterium ist rein mathematischer und nicht technischer Natur, d. h. möglichst optimale Anpassung, z. B. an ein zugrundeliegendes Histogramm. Eine *sinnvolle* Entscheidung für oder gegen ein Verteilungsmodell kann aber ausschließlich auf Basis der technischen Gegebenheiten und Rahmenbedingungen erfolgen. Dies können sogenannte *Best-Fit-Tests* grundsätzlich nicht leisten, d. h. Software kann Experten bei der Auswahl einer geeigneten Verteilung lediglich unterstützen.

- Die **erweiterte Normalverteilung (ENV)** beschreibt in der Regel Prozesse gut, bei denen sich der Erwartungswert einer sonst stabilen Normalverteilung langsam verschiebt. Schiefe und gewölbte Verteilungen können durch die ENV prinzipiell nicht optimal beschrieben werden.
- Die **Mischverteilung (MV)** ermöglicht aufgrund ihrer mathematischen Konzeption nahezu beliebig gute Anpassungen an jede beliebige Messdatenverteilung. Im Vergleich zu anderen Verteilungen liefert sie deshalb oft bessere Fähigkeitsindizes, die aber technisch nicht begründet sind.

Trotzdem ist ein stark zunehmender Trend zu beobachten, Fähigkeitsanalysen vollständig zu automatisieren, d. h. der Software zu überlassen. Die Konsequenz ist, dass Ergebnisse kaum noch hinterfragt werden. Speziell bei der Auswahl statistischer Verteilungsmodelle ist dann nicht sichergestellt, dass technische Randbedingungen angemessen berücksichtigt werden. So ermittelte Fähigkeitsindizes sind damit bedeutungslos. Dies wird insbesondere bei Prozessen kritisch, die als instabil einzustufen sind.

Die automatisierte Verteilungsauswahl kann diesem Problem nicht wirksam begegnen. Stattdessen ist erforderlich, im Einzelfall durch qualifizierte, mit dem Prozess hinreichend vertraute Experten zu analysieren, ob und inwieweit das gelieferte Ergebnis mit den tatsächlichen technischen Gegebenheiten vereinbar ist und Relevanz besitzt. Dabei sind folgende elementare Fakten zu berücksichtigen:

- Ein messbares Merkmal (Prozessergebnis) ist in der Regel eine Überlagerung von (häufig nicht einzeln messbaren) Merkmalsanteilen, deren jeweilige Ausprägung durch die einzelnen Prozessschritte bestimmt wird, die das Merkmal erzeugen. Die statistische Verteilung des Prozessergebnisses ist daher ebenfalls eine Überlagerung der statistischen Verteilungen der Teil- und/oder Zwischenergebnisse der einzelnen Prozessschritte. Sind diese überwiegend normalverteilt, ist eine normalverteilte Grundgesamtheit für das Prozessergebnis zu erwarten (Zentraler Grenzwertsatz der Statistik).
- Daneben gibt es Merkmale, die aufgrund ihrer Definition prinzipiell nicht normalverteilt sein können, z. B. Merkmale mit natürlicher Untergrenze 0 (s. Anhang K) oder Merkmale mit Trend.

Es empfiehlt sich, diese Analyse bereits im Vorfeld, spätestens aber während der Prozessanlaufphase auf einer möglichst breiten und stabilen Datenbasis durchzuführen.

**Die Verteilung der Grundgesamtheit ist ausschlaggebend, nicht diejenige der aktuellen Stichprobe**.

qs-STAT® bietet die Möglichkeit, entsprechende Verteilungen abweichend von der automatisch ermittelten Verteilung auszuwählen.

> *ANMERKUNG: Abweichungen von Voreinstellungen der Auswertestrategie sind zu begründen und zu dokumentieren.*

## C.5 Optionen bei sehr umfangreichen Datensätzen

In Kap. 8.1 „Schätzer“ wurde bereits erläutert, dass die realitätsnahe Schätzung der 0,135 %- und 99,865 %-Quantile der Datenverteilung für die Ermittlung belastbarer Fähigkeitskennwerte wesentlich ist. Dies bedeutet, dass in erster Linie die Randbereiche der Verteilung maßgeblich sind, d. h. eine möglichst optimale Schätzung der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der kleinsten und größten Werte.

Die üblicherweise verfügbaren, aus statistischer Sicht relativ kleinen Datensätze (50 Werte für $C_{mk}$, 125 Werte für $C_{pk}$) enthalten in den Randbereichen meist keine ausreichende Anzahl Werte, um die benötigten Quantile verlässlich zu ermitteln. Die Wahrscheinlichkeiten für sehr kleine und sehr große Werte müssen deshalb mit Hilfe einer Verteilungsfunktion geschätzt werden, die auf Basis der häufig auftretenden Werte im mittleren Bereich um den Erwartungswert ermittelt wird.

Mit zunehmendem Umfang des Datensatzes steigt auch die Anzahl verfügbarer Werte in den Randbereichen, so dass sich weitere Optionen zur Ermittlung der erforderlichen Quantile ergeben können.

- Bei ausreichend großen Datensätzen[14] können u. U. der kleinste und größte Wert direkt als Schätzer für die 0,135 %- bzw. 99,865 %-Quantile genutzt werden, ohne dass ein Verteilungsmodell angepasst wird. Jedoch ist eine Schätzung auf Basis von nur zwei Messwerten in Extremlage naturgemäß extrem empfindlich bzgl. Ausreißern und wird deshalb **nicht** empfohlen.

- Eine deutlich leistungsfähigere und verlässlichere Variante dieses Verfahrens ist, Daten aus den beiden Randbereichen des Wahrscheinlichkeitsnetzes auszuwerten, d. h. die kleinsten und größten Werte. *Erfahrungsgemäß* (siehe nachstehende Hinweise) sind hierfür jeweils 25 – 30 Daten erforderlich, die sich häufig als näherungsweise normalverteilt erweisen, d. h. im Wahrscheinlichkeitsnetz der Standardnormalverteilung eine Gerade bilden. In diesem Fall kann jeweils eine Regressionsgerade angepasst und zum y-Wert −3s bzw. +3s der jeweilige x-Wert ermittelt werden (0,135 %- bzw. 99,865 %-Quantil). Daten in unmittelbarster Randnähe zeigen oft größere Abweichungen von der Normalverteilung und sollten in diesem Fall nicht in die Regression einbezogen werden. *Erfahrungsgemäß* ist es meist ausreichend, jeweils 1 – 5 Daten auszuschließen.

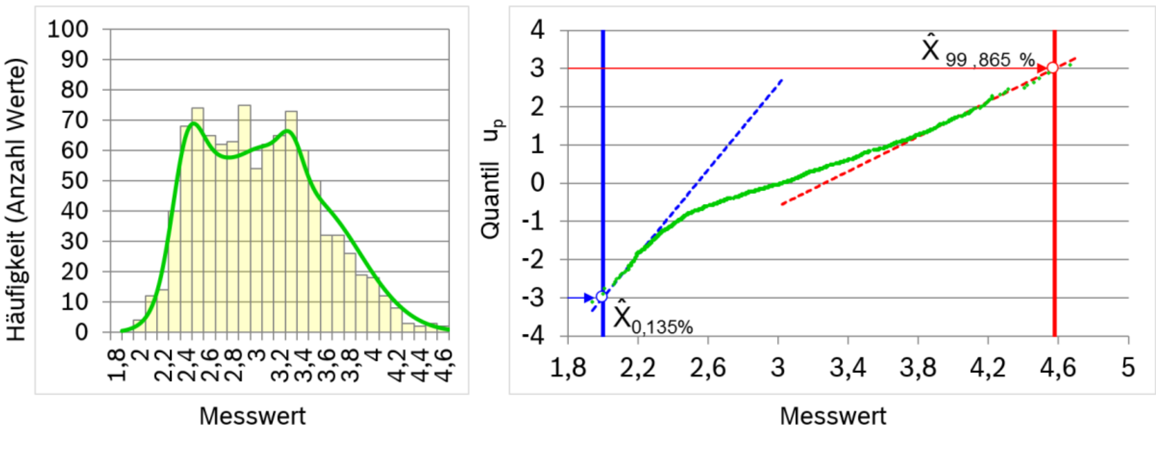



Abbildung 32: Ermittlung der Prozessstreubreite mittels Regression in den Randbereichen

*HINWEIS 1: Die genannten Anzahlen sind nicht als Vorgabe oder Empfehlung sondern als reine Erfahrungswerte zu verstehen, die sich ausschließlich unter den Randbedingungen bisher durchgeführter und bekannter Untersuchungen bewährt haben. Grundsätzlich ist bei jedem Szenario zu bewerten, ob diese Anzahlen sinnvoll sind. Bisher existieren hierzu keinerlei normative Vorgaben.*

*HINWEIS 2: Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass Auswahl und Anzahl der Daten und deren Verträglichkeit mit der Normalverteilung in der Regel starken Einfluss auf die Steigung der Regressionsgeraden haben und damit auf die ermittelte Lage der Quantile und die daraus resultierende Streubreite.*

[14] Beispiel in [ISO 22514-2], Kap. 6.1.4: Datensatz mit $n \geq 1000$ Einzelwerten; entspricht den bisherigen, auch als Spannweitenmethode bekannten Methoden $M1_{4,5}$ und $M1_{5,5}$ der zurückgezogenen [ISO 21747].

- Eine weitere Variante ist, das Verteilungsmodell der Mischverteilung zu verwenden.

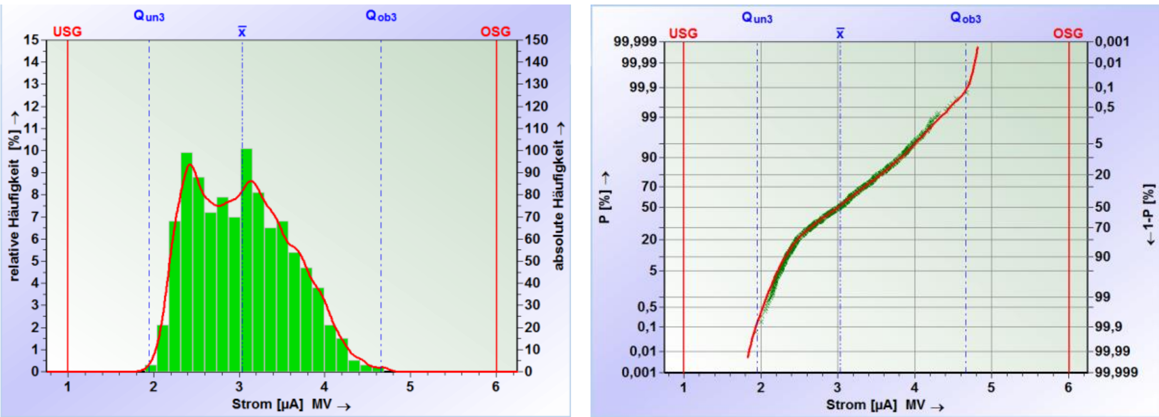



Abbildung 33: Ermittlung der Prozessstreubreite mittels Mischverteilung

Der gleiche Datensatz ($n = 1000$ Einzelwerte, Grenzwerte $LL = 1\ \mu A$ und $UL = 6\ \mu A$) mit diesen Verfahren ausgewertet liefert folgende Ergebnisse:

| | Auswertung Extremwerte | Auswertung Randbereiche | Auswertung Mischverteilung |
|---|---|---|---|
| $X_{0,135\ \%}$ | 1,94 | 2,00 | 1,95 |
| $X_{99,865\ \%}$ | 4,70 | 4,58 | 4,66 |
| $X_{99,865\ \%} - X_{0,135\ \%}$ | 2,76 | 2,58 | 2,71 |
| $C_p$ | 1,81 | 1,94 | 1,84 |
| $C_{pk}$ | 1,77 | 1,91 | 1,81 |

Tabelle 3: Auswertungsergebnisse für einen großen Datensatz

Bei diesem speziellen Beispiel streuen die Ergebnisse für $C_p$ im Bereich 1,81 bis 1,94. Ähnlich verhalten sich die Ergebnisse für $C_{pk}$.

- Es ist plausibel, dass die Auswertung der Extremwerte tendenziell die ungünstigsten Ergebnisse der drei Varianten liefert, da die Extremwerte des Datensatzes häufig unter- bzw. oberhalb der tatsächlichen 0,135 %- bzw. 99,865 %-Quantile liegen und damit zu einer größeren als der tatsächlichen Streubreite führen.

- Eine ähnliche Tendenz *kann* — wie z. B. im vorliegenden Fall — bei der Mischverteilung beobachtet werden. Dies liegt im mathematischen Konzept der Mischverteilung begründet, die sich dem Datenbestand nahezu beliebig gut anpassen kann, so dass insbesondere bei diesem Modell wenige Datenpunkte in Randnähe das Ergebnis signifikant beeinflussen können. Allerdings hängt das Ergebnis häufig auch von der verwendeten Software ab, da mehrere, teilweise sehr unterschiedliche Algorithmen zur Anpassung existieren. Beispielsweise wird die Zerlegung mit Hilfe sogenannter statistischer Momente[15] (z. B. bei Auswertung mit qs-STAT®) zu etwas anderen Ergebnissen führen als die einfache Zerlegung in mehrere, sich überlagernde Normalverteilungen (z. B. bei manueller Auswertung). Im letzten Fall ist eine Tendenz zu den Ergebnissen plausibel, die bei Auswertung der Daten in den Randbereichen zu erwarten ist, da die in der Gesamtverteilung am weitesten außen liegenden normalverteilten Teilkollektive häufig auch die äußersten Flanken der Gesamtverteilung bestimmen.

- Die Auswertung der beiden Randbereiche führt häufig zu den günstigsten Ergebnissen. Dies hängt aber sehr empfindlich von der Auswahl der Daten ab, die in die Auswertung einbezogen werden, ist entsprechend leicht manipulierbar und kann sogar statistische Grundsätze verletzen (vgl. vorstehenden Hinweis 2).

[15] Standardabweichung, Schiefe und Wölbung sind die statistischen Momente 2., 3. und 4. Ordnung

# D Statistische Verteilungstests

Die in qs-STAT® hinterlegten Auswertekonfigurationen zur Stichproben- und Prozessanalyse enthalten einige statistische Tests, welche den auszuwertenden Datensatz hinsichtlich mehrerer statistischer Fragestellungen analysieren und so eine automatische Verteilungszuordnung ermöglichen. Zum prinzipiellen Ablauf eines statistischen Tests sei auf [Heft 3] verwiesen.

In diesem Anhang D sind einige Beispiele explizit aufgeführt. Manche der klassischen Testverfahren eignen sich nur für bestimmte Stichprobenumfänge. In den letzten Jahren gab es aber diesbezüglich Verbesserungen oder neue Varianten bei den Tests.

Ziel der Auswertekonfigurationen ist es, eine bestmögliche, realistische Anpassung des theoretischen Verteilungsmodells an den empirischen Datensatz zu erreichen.

## D.1 Tests auf Normalverteilung

Es gibt zahlreiche vergleichende Untersuchungen von Normalverteilungstests hinsichtlich ihrer Teststärke, z. B. [Seier]. Wenn aufgrund des Testergebnisses die Nullhypothese beibehalten wird, obwohl tatsächlich eine Abweichung von der Normalverteilung vorliegt, handelt es sich um einen Fehler 2. Art [Heft 3]. Die Teststärke gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Fehler 2. Art vermieden wird. Die Teststärke ist von der Art der Abweichung und vom Stichprobenumfang abhängig. Man kann die Teststärke eines Tests nur erhöhen, indem man einen größeren Stichprobenumfang wählt.

Aus diesem Grund werden je nach Stichprobenumfang unterschiedliche Tests verwendet:

| Test | Anwendungsbereich |
|---|---|
| Shapiro-Wilk-Test | $8 \leq n \leq 50$ |
| Epps-Pulley-Test | $51 \leq n \leq 200$ |
| Asymmetrie | $n \geq 201$ |
| Kurtosis | $n \geq 201$ |

### D.1.1 Normalverteilungstest mit Hilfe von Schiefe und Wölbung

Zu den gängigen statistischen Tests auf Normalverteilung gehören Tests der Symmetrie und Form der Messdatenverteilung. Die (empirische) **Schiefe** oder Skewness $\beta_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^3$ ist ein Maß für die Richtung und Ausprägung der Asymmetrie einer Verteilung:

- $\beta_1 < 0$ linksschiefe (oder rechtssteile) Verteilung;
- $\beta_1 = 0$ Normalverteilung (keine Asymmetrie);
- $\beta_1 > 0$ rechtsschiefe (oder linkssteile) Verteilung.

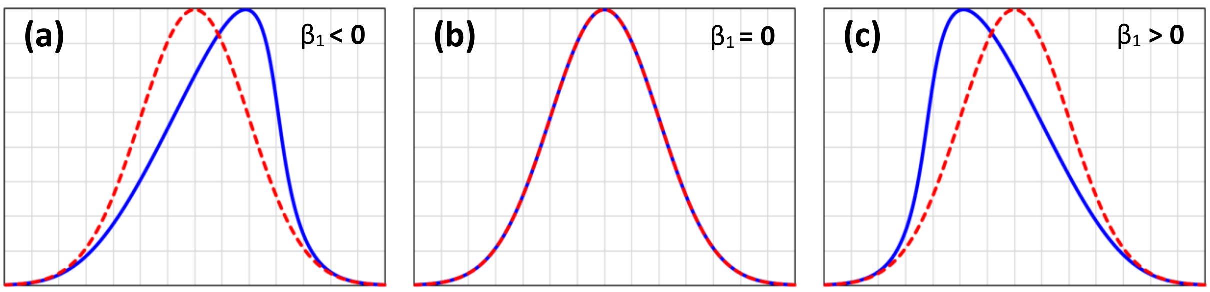



Abbildung 34: (a) linksschiefe, (b) symmetrische und (c) rechtsschiefe Verteilung

Mit Hilfe eines statistischen Tests (siehe z. B. [Heft 3]) wird festgestellt, ob $\beta_1 = 0$ im Vertrauensbereich des ermittelten $\beta_1$-Wertes zu einem bestimmten Vertrauensniveau (üblicherweise 95 %) liegt. Ist dies der Fall, folgen die Messdaten mit diesem Grad des Vertrauens einer Normalverteilung.

Die (empirische) **Wölbung** oder Kurtosis $\beta_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^4$ ist ein Maß für die Flach- oder Steilheit einer Verteilung im Vergleich zur Normalverteilung:

- $\beta_2 < 3$ Verteilung ist „flachgipfliger“ als die Normalverteilung;
- $\beta_2 = 3$ Normalverteilung;
- $\beta_2 > 3$ Verteilung ist „steilgipfliger“ als die Normalverteilung.

Anstelle der Wölbung $\beta_2$ wird auch der sogenannte Exzess $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ verwendet, bei dem der Nullpunkt $\gamma_2 = 0$ durch die Normalverteilung definiert ist.

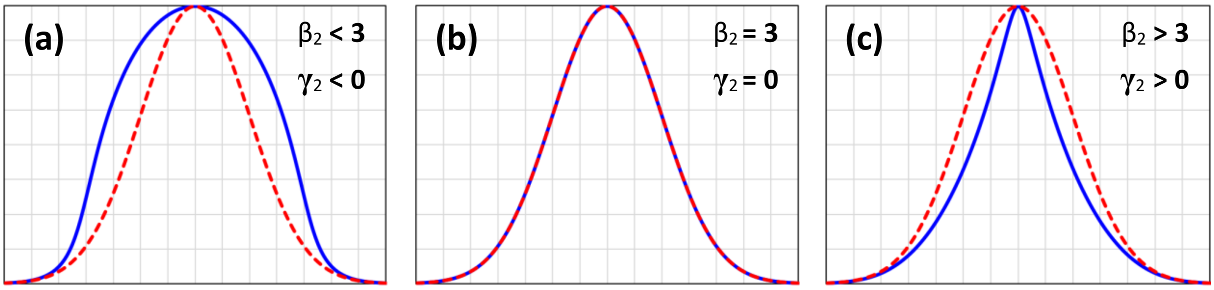



Abbildung 35: (a) flachgipflige, (b) normalgipflige und (c) steilgipflige Verteilung

Mit Hilfe eines statistischen Tests (siehe z. B. [Heft 3]) wird festgestellt, ob $\beta_2 = 3$ oder $\gamma_2 = 0$ im Vertrauensbereich des ermittelten $\beta_2$- bzw. $\gamma_2$-Wertes zu einem bestimmten Vertrauensniveau (üblicherweise 95 %) liegt. Ist dies der Fall, folgen die Messdaten mit diesem Grad des Vertrauens einer Normalverteilung.

**D.1.2 Shapiro-Wilk-Test**

Der Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung eignet sich laut [ISO 5479] für kleine Stichprobenumfänge mit $8 \leq n \leq 50$. Er verwendet zur Berechnung der Prüfgröße $W = \frac{b^2}{(n-1) \cdot s^2}$ die Varianz $s^2$ sowie die Summe gewichteter Differenzen der in aufsteigender Folge geordneten Einzelwerte:

$x_1 \leq x_2 \leq x_i, \dots, x_{n-1} \leq x_n$.

Bei geradem n ist

$$b = \sum_{i=1}^{n/2} a_{n-i+1} \cdot (x_{n-i+1} - x_i) = a_n \cdot (x_n - x_1) + \ldots + a_{n/2} \cdot \left(x_{n/2+1} - x_{n/2}\right).$$

Bei ungeradem n ist

$$b = \sum_{i=1}^{(n-1)/2} a_{n-i+1} \cdot (x_{n-i+1} - x_i) = a_n \cdot (x_n - x_1) + \ldots + a_{(n-1)/2} \cdot \left(x_{(n-1)/2} - x_{(n+1)/2+1}\right).$$

Die Koeffizienten (Gewichtungsfaktoren) $a_i$ sind z. B. in [ISO 5479] und [Wilrich] tabelliert.

*Hinweis: Bei ungeradem n wird der Median nicht verwendet. Die $a_i$ werden mit zunehmendem i kleiner, d. h., $a_n$ ist der größte Koeffizient; die Differenz der Extremwerte $x_n - x_1$ wird am stärksten berücksichtigt.*

Nach [Seier] ist der Test empfindlich bei zu grober Rundung der Messwerte, d. h., wenn der Rundestellenwert größer als 10 % der Standardabweichung ist. Siehe auch Abschnitt 6.3.

### D.1.3 Epps-Pulley-Test

Der Epps-Pulley-Test auf Normalverteilung verwendet eine Prüfgröße $T_{EP}$, die auf den charakteristischen Funktionen der Stichprobe und der Normalverteilung basiert.

$$T_{EP} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_j - x_k)^2}{m_2}} - \sqrt{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{1}{4} \cdot \frac{(x_j - \bar{x})^2}{m_2}} + \frac{n}{\sqrt{3}} + 1$$

$m_2 = \frac{n-1}{n} \cdot s^2$ ist das 2. zentrale Moment und $s^2$ die Varianz der Stichprobe.

Einer der Vorteile des Tests ist, dass er keine tabellierten Konstanten benötigt. [ISO 5479] unterstreicht explizit die hohe Teststärke dieses Tests und gibt die 95 %- und 99 %-Quantile der Prüfgröße für Stichprobenumfänge im Bereich $51 < n \leq 200$ an. [Epps], [ISO 5479], [Schulze]

### D.1.4 Test auf momentane Normalverteilung (Erweiterter Shapiro-Wilk-Test)

Häufig ist der Umfang n der Einzelstichproben recht klein, z. B. $n = 3$ oder $n = 5$. Deshalb könnte ein auf jede Einzelstichprobe angewandter Test auf Normalverteilung auch größere Abweichungen von der Normalverteilung nicht erkennen. Sofern die Einzelstichproben Mittelwertschwankungen aufweisen, ist es auch nicht sinnvoll, alle Einzelstichproben zu einer Gesamtstichprobe mit $m \cdot n$ Werten zusammenzufassen.

Der erweiterte (modifizierte) Shapiro Wilk Test setzt voraus, dass ein Datensatz von m Stichproben mit jeweils Stichprobenumfang n vorliegt. Der Test prüft, ob die unabhängigen Einzelstichproben aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammen können (Nullhypothese) oder nicht. Der Test ist ziemlich rechenaufwändig, weil zu jeder Einzelstichprobe mit Hilfe tabellierter Koeffizienten eine Prüfgröße $W_j$ mit $j = 1, 2, \ldots, m$ berechnet wird. Die $W_j$ werden schließlich zu einer Gesamtprüfgröße zusammengefasst. Sofern die Nullhypothese zutrifft, so ist die Gesamtprüfgröße näherungsweise standardnormalverteilt.

Die Berechung der Werte $b_j$ erfolgt wie in D.1.2, ebenso $W_j = \frac{b_j^2}{(n-1) \cdot s_j^2}$. Schließlich ist

$W = \sqrt{m} \cdot \gamma(n) + \frac{\delta(n)}{\sqrt{m}} \cdot \sum_{j=1}^{m} ln\left(\frac{W_j - \varepsilon(n)}{1 - W_j}\right)$ mit tabellierten Koeffizienten $\gamma(n), \delta(n)$ und $\varepsilon(n)$.

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn $W < -u_{1-\alpha}$. Dabei ist $u_{1-\alpha}$ das Quantil der Standardnormalverteilung zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$, z. B. $-u_{1-0,05} \approx -1{,}645$.

Lit.: [ISO 5479], [Schulze]

## D.2 Tests auf beliebige Verteilungen (ausgenommen NV)

Mit dem Chi-Quadrat-Anpassungs-Test kann geprüft werden, ob der vorliegende Datensatz mit einer beliebigen vorgegebenen Verteilung verträglich ist. Dazu müssen die empirischen Daten in klassierter Form vorliegen, z. B. als Histogramm mit absoluten Häufigkeiten über einer Klasseneinteilung.

Einfach ausgedrückt beurteilt der Test, wie stark die Säulen des Histogramms nach oben oder unten von den theoretischen Häufigkeiten in den entsprechenden Klassen abweichen. Die ermittelte Prüfgröße wird mit einem Quantil der Chi-Quadrat-Verteilung verglichen.

$k$ ist die Anzahl der Klassen, $b_i$ die beobachtete Häufigkeit in Klasse i. $e_i$ ist die erwartete (theoretische) Häufigkeit in Klasse i, sofern die Daten aus der angenommenen Verteilung $F_0$ stammen, d. h., sofern $H_0$ richtig ist.

Die Gesamtzahl der Werte ist $n = \sum_{i=1}^{k} b_i$. Die erwartete Häufigkeit kann gemäß $e_i = n * p_i$ berechnet werden, wobei $p_i = F_0(x_{i;\,ob}) - F_0(x_{i;\,un})$ über die Werte der Verteilungsfunktion an der oberen Grenze $x_{i;\,ob}$ und unteren Grenze $x_{i;\,un}$ der i-ten Klasse ermittelt werden kann. Die Prüfgröße ist dann

$\chi^2_{test} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(b_i - e_i)^2}{e_i}$.

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn $\chi^2_{test} > \chi^2_{k-1;\,1-\alpha}$.

Da $e_i$ im Nenner steht, darf es nicht null werden. Nach [Hartung] und [Wilrich] darf kein Wert $e_i < 1$ sein und nicht mehr als 20 % der $e_i$ dürfen kleiner als 5 sein (s. auch [DIN EN 61710]).

> *Anmerkung: Der Chi-Quadrat-Test erfordert klassierte Daten. Die Klassierung kann einen Einfluss auf das Testergebnis haben.*

Als Normalverteilungstests werden die unter D.5 genannten Tests bevorzugt.

# E Verteilungsmodelle und Schätzmethoden nach ISO 22514-2

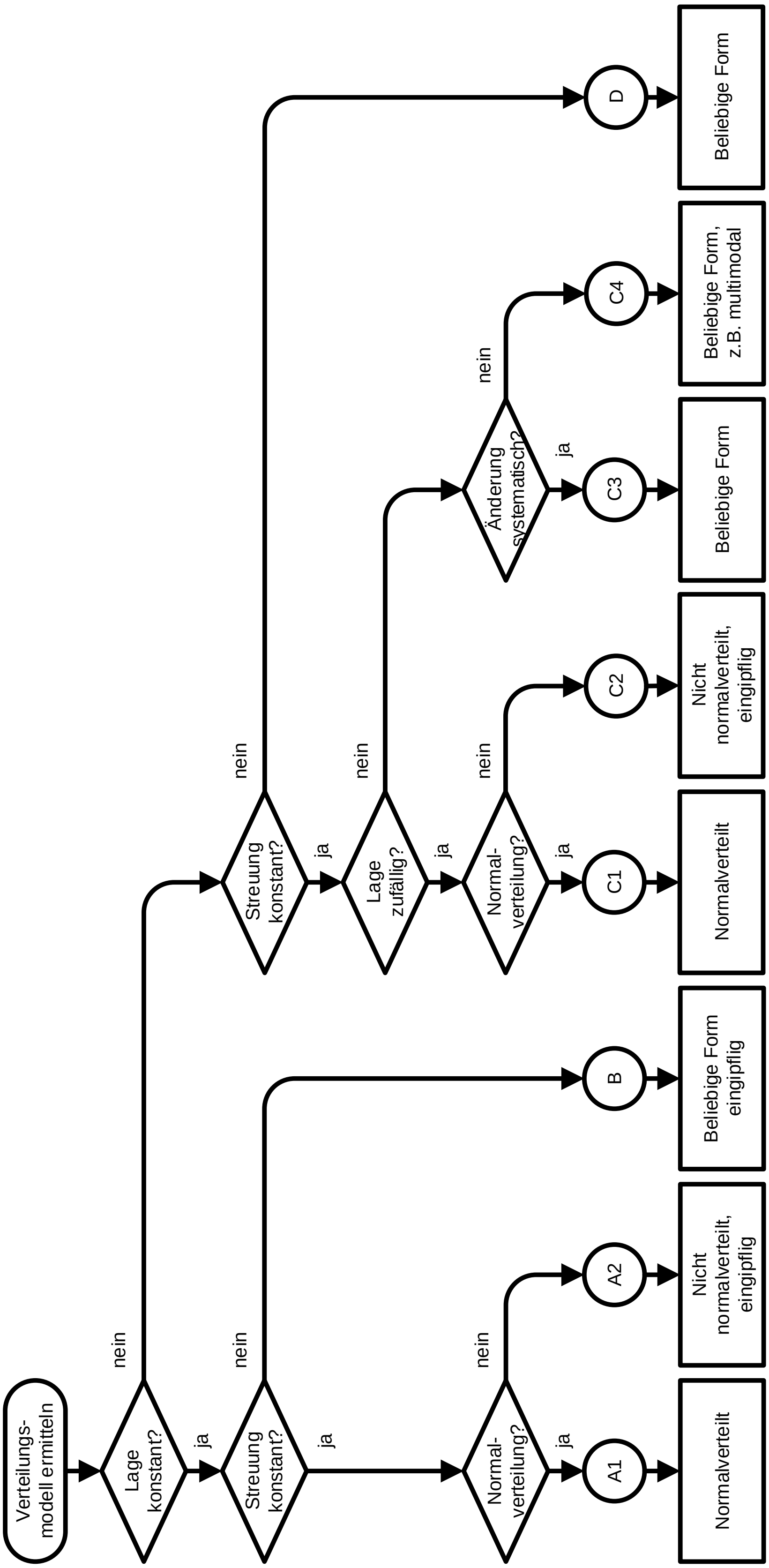



Abbildung 36: Verteilungsmodelle nach ISO 22514-2

| **Schätzer** | | **Bezeichnung nach ISO 22514-2** | **Verteilungsmodell nach ISO 22514-2** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Lage stabil | | | Lage nicht stabil | | | | |
| Lage | Streuung | | A1 | A2 | B | C1 | C2 | C3 | C4 | D |
| $\bar{x}$ | $X_{99,865\,\%} - X_{0,135\,\%}$ | $M_{1,1}$ | ✓ | | ✓ | | | | | |
| | $\sqrt{s^2}$ | $M_{1,2}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $\frac{\bar{s}}{c_4}$ | $M_{1,3}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $\frac{\bar{R}}{d_2}$ | $M_{1,4}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $s_{total}$ | $M_{1,5}$ | ✓ | | ✓ | | | | | |
| $\tilde{x}$ | $X_{99,865\,\%} - X_{0,135\,\%}$ | $M_{2,1}$ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| | $\sqrt{s^2}$ | $M_{2,2}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $\frac{\bar{s}}{c_4}$ | $M_{2,3}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $\frac{\bar{R}}{d_2}$ | $M_{2,4}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $s_{total}$ | $M_{2,5}$ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ |
| $\bar{\bar{x}}$ | $X_{99,865\,\%} - X_{0,135\,\%}$ | $M_{3,1}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $\sqrt{s^2}$ | $M_{3,2}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $\frac{\bar{s}}{c_4}$ | $M_{3,3}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $\frac{\bar{R}}{d_2}$ | $M_{3,4}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $s_{total}$ | $M_{3,5}$ | ✓ | | | | | | | |
| $\bar{\tilde{x}}$ | $X_{99,865\,\%} - X_{0,135\,\%}$ | $M_{4,1}$ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | |
| | $\sqrt{s^2}$ | $M_{4,2}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $\frac{\bar{s}}{c_4}$ | $M_{4,3}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $\frac{\bar{R}}{d_2}$ | $M_{4,4}$ | ✓ | | | | | | | |
| | $s_{total}$ | $M_{4,5}$ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | |

*ANMERKUNG 4: Die Methoden $M_{1,1}$ und $M_{1,5}$ sind auf das Verteilungsmodell B anwendbar, $M_{3,1}$ und $M_{3,5}$ jedoch nicht. Beide Methodengruppen unterscheiden sich lediglich durch die Zählweise der Datenwerte, nicht aber im Ergebnis. Die laut Norm unterschiedliche Anwendbarkeit ist daher nicht plausibel.*

Tabelle 4: Anwendbarkeit der Berechnungsmethoden auf Verteilungsmodelle nach ISO 22514-2

# F Einfluss der Messprozessstreuung auf die Prozessfähigkeit

Sowohl der Fertigungsprozess als auch der Messprozess, mit dem das Fertigungsergebnis überprüft wird, besitzen jeweils eine Streuung. Die Streuung der Messergebnisse wird deshalb anteilig durch **beide** Prozesse verursacht. Anhand der Messergebnisse soll jedoch ausschließlich der Fertigungsprozess bewertet werden. Dies ist nur möglich, wenn die Streuung des Messprozesses im Vergleich zum Fertigungsprozess hinreichend klein ist.

Die Streubreite $6 \cdot \sigma$ eines Fertigungsprozesses wird häufig — insbesondere bei normalverteilten Merkmalswerten — anhand der empirischen Standardabweichung $s$ der Messergebnisse abgeschätzt: $\sigma \approx \hat{\sigma} = s$. Die Schreibweise $\hat{\sigma}$ bezeichnet einen Schätzer, dem $s$ als Schätzwert zugeordnet wird. Die Standardabweichung $s$ setzt sich aus den Anteilen $s_P$ (verursacht durch den Fertigungs**p**rozess) und $s_M$ (verursacht durch den **M**essprozess) zusammen:

$$s = \sqrt{s_P^2 + s_M^2}\,. \tag{F.1}$$

Bei normalverteilten Merkmalswerten lässt sich der Einfluss der Messprozessstreuung mit Hilfe der Berechnungsvorschrift für den potentiellen Fähigkeitsindex $C_p$ recht einfach mathematisch beschreiben. Gl. (F.1) eingesetzt und den Term T/6 in die Wurzel gezogen:

$$C_p = \frac{T}{6 \cdot s} = \frac{T}{6 \cdot \sqrt{s_P^2 + s_M^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{6 \cdot s_P}{T}\right)^2 + \left(\frac{6 \cdot s_M}{T}\right)^2}} \tag{F.2}$$

Der 1. Summand unter der Wurzel kann als Kehrwert der ***tatsächlichen*** Fertigungsprozessfähigkeit $C_p^*$ interpretiert werden, die frei von Einflüssen der Messprozessstreuung ist:

$$C_p^* = \frac{T}{6 \cdot s_P}. \tag{F.3}$$

Die Standardabweichung $s_M$ des Messprozesses wird bei der Messsystemanalyse üblicherweise mit $GRR$ bezeichnet ($s_M = GRR$) und in Prozenten einer Bezugsgröße angegeben. Bei Bezug auf die Merkmalstoleranz T gilt (vgl. [Heft 10]):

$$\%GRR = \frac{6 \cdot GRR}{T} \cdot 100\,\% = \frac{6 \cdot s_M}{T} \cdot 100\,\% \tag{F.4}$$

Die Gln. (F.3) und (F.4) in Gl. (F.2) eingesetzt ergibt

$$C_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{C_p^*}\right)^2 + \left(\frac{\%GRR}{100\,\%}\right)^2}} \tag{F.5}$$

Die ***beobachtete*** Prozessfähigkeit $C_p$ in Abhängigkeit von der tatsächlichen Prozessfähigkeit $C_p^*$ wird häufig als Kurvenschar mit Parameter $\%GRR$ dargestellt (Abb. 38).

*HINWEISE:*

- *Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es* ***nicht*** *zulässig ist, ermittelte $C_p$-Werte mit Hilfe von Gl. (F.5) oder Abb. 38 zu „optimieren“ und $C_p^*$ anstelle von $C_p$ anzugeben.*
- *Die Ausführungen in diesem Kapitel dienen lediglich dazu, ein Verständnis der grundsätzlichen Zusammenhänge zu entwickeln und ein Gefühl für Größenordnungen von Abweichungen wie z. B. $C_p - C_p^*$ und Kenngrößen wie z. B. $\%GRR$, wenn z. B. vorgebene Maximalabweichungen $C_p - C_p^*$ einzuhalten sind.*

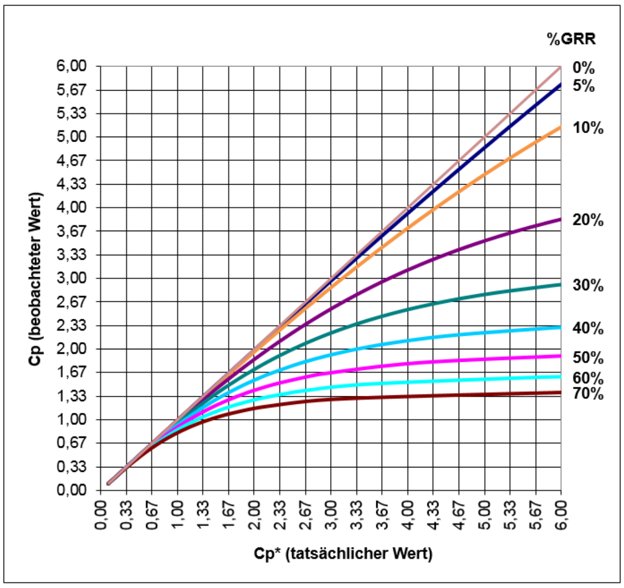



Abbildung 37: Zusammenhang zwischen beobachteter und tatsächlicher Prozessfähigkeit

Danach werden bei einer tatsächlichen (d. h. theoretisch idealen) Fertigungsprozessfähigkeit $C_p^* = 2{,}67$ ($\%GRR = 0\,\%$) und Messprozessstreuungen entsprechend Abbildung 38 a) die Fertigungsprozessstreuungen entsprechend Abbildung 38 b) mit den Fähigkeiten

$C_p = 2{,}58$ ($\%GRR = 10\,\%$),

$C_p = 2{,}08$ ($\%GRR = 30\,\%$) und

$C_p = 1{,}60$ ($\%GRR = 50\,\%$)

beobachtet.

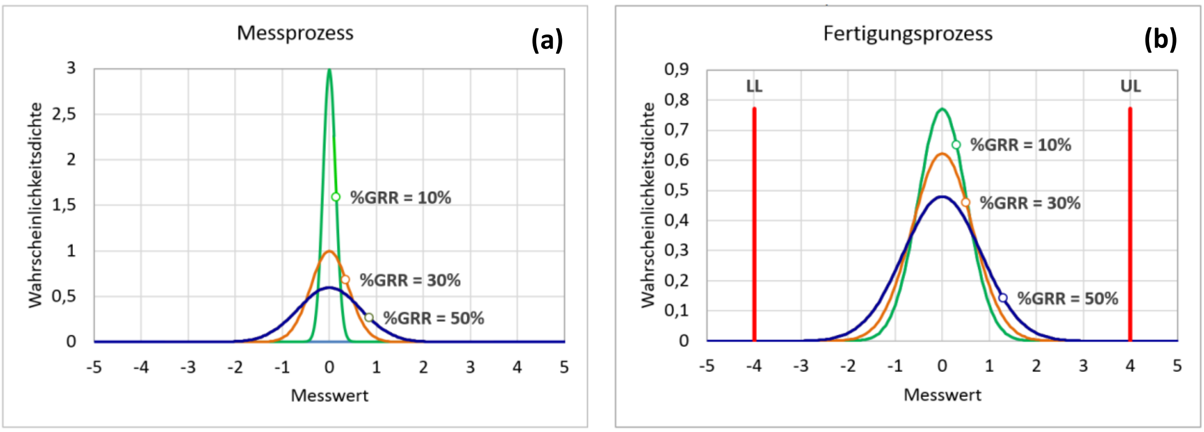



Abbildung 38: Einfluss Messprozessstreuung auf beobachtete Fertigungsprozessstreuung

Die wesentliche Erkenntnis aus Gl. (F.5) — oder anschaulicher Abb. 38 — ist, dass insbesondere höhere $C_p$-Werte nur dann ein sinnvolles Ergebnis darstellen, wenn die Messprozessstreuung vergleichsweise gering ist. Dies gilt — unabhängig von Gl. (F.5) — auch im allgemeinen Fall nicht normalverteilter Daten. Im speziellen Fall nach Gl. (F.5) muss die Beziehung $\left(\frac{1}{C_p^*}\right)^2 \gg \left(\frac{\%GRR}{100\,\%}\right)^2$ hinreichend erfüllt sein. Dies bedeutet, dass bei vorgegebenem $\%GRR$ für $\frac{1}{C_p^*}$ ein Wertebereich existiert, der nicht unterschritten werden darf, d. h. $C_p^*$ darf nicht zu groß werden.

*BEISPIEL: Bei einer tatsächlichen Fähigkeit von $C_p^* = 6{,}0$ und $\%GRR = 30\,\%$ liegt die beobachtete Fähigkeit mit knapp $C_p \approx 3{,}0$ nur noch bei etwa 50 % der tatsächlichen Fähigkeit (vgl. Abb. 38). Auch bei $C_p^* = 2{,}0$ beobachtet man mit $C_p \approx 1{,}67$ noch einen fast 17 % kleineren Wert. Um andererseits z. B. die maximale Differenz $C_p - C_p^* \leq 0{,}1$ einzuhalten, ist $\%GRR \approx 19{,}8\,\%$ bei $C_p = 1{,}33$ erforderlich und $\%GRR \approx 2{,}1\,\%$ bei $C_p = 6{,}0$.*

# G Stabile und beherrschte Prozesse

Die Unterscheidung stabiler und beherrschter Prozesse führt aufgrund inkonsistenter Inhalte verschiedener Normen häufig zu Missverständnissen. Ursache sind hier u. a. Probleme bei der Übersetzung aus dem Englischen in die nationale Sprache.

**ISO 3534-2**

Basis ist die englische Ausgabe der Norm [ISO 3534-2] aus dem Jahr 2006. Hier werden die englischen Begriffe „stable process" und „process in a state of statistical control" synonym verwendet und als *„Prozess, der nur zufälligen Streuungsursachen unterliegt"* definiert. Anmerkung 1 ergänzt dazu sinngemäß, dass sich ein solcher Prozess so verhält, *als ob alle aus diesem Prozess gezogenen Stichproben aus derselben Grundgesamtheit stammen*. Anmerkung 4 weist ausdrücklich darauf hin, dass Prozesse mit zunehmender Veränderung von Mittelwert und/oder Standardabweichung, wie es z. B. infolge von Werkzeugverschleiß auftritt, zusätzlich systematischen Streuungsursachen unterliegen, die nicht als Folge zufälliger Ursachen betrachtet werden, und *Stichproben aus solchen Prozessen nicht aus derselben Grundgesamtheit stammen können* (vgl. Kapitel *Begriffe* oder [ISO 3534-2, 2.2.7]).

Die deutsche Ausgabe der Norm [ISO 3534-2] aus dem Jahr 2013 übersetzt beide englische Begriffe mit „Beherrschter Prozess". Der Begriff „Stabiler Prozess" wird nicht verwendet.

**ISO 21747 (zurückgezogen)**

Begriffe, Definition und Anmerkungen werden unverändert aus der englischen Ausgabe der Norm [ISO 3534-2] in die englische Ausgabe der mittlerweile ungültigen Norm [ISO 21747] übernommen.

In der deutschen Ausgabe der Norm [ISO 21747] aus dem Jahr 2007 werden die englischen Begriffe mit „Stabiler Prozess" und „Beherrschter Prozess" übersetzt und die beiden deutschen Begriffe synonym verwendet, d. h. konform zur englischen Ausgabe.

**ISO 22514-1**

Begriffe und Definition der englischen Ausgabe der Norm [ISO 3534-2] werden schließlich auch in die englische Ausgabe der Norm [ISO 22514-1] übernommen, aber nur mit den Anmerkungen 1 und 2, die jetzt als Anmerkungen 2 und 3 ausgewiesen werden.

Die deutsche Ausgabe aus dem Jahr 2016 übersetzt beide englische Begriffe jetzt allerdings mit „Stabiler Prozess". Der Begriff „Beherrschter Prozess" wird nicht mehr synonym verwendet.

Die entfallene Anmerkung 4 wird in der Norm [ISO 22514-1] gewissermaßen verselbständigt und sinngemäß zur Definition des neu eingeführten Begriffes „product characteristic in control" verwendet: *„Produktmerkmalsparameter der Verteilung der Merkmalswerte, die sich praktisch nicht oder nur in bekannter Art und Weise innerhalb bekannter Grenzen ändern"*.

Die deutsche Ausgabe dieser Norm übersetzt den Begriff mit „Beherrschtes Produktmerkmal" [16, 17]

[16] Die englischen Ausdrucksweisen *„in a state of statistical control"* und *„in control"* werden auch von englischen Muttersprachlern häufig als äquivalent betrachtet.

[17] Die deutsche Ausgabe weist in einer nationalen Fußnote auf die Inkonsistenzen der Normen hin.

**DIN 55350-11**

Die Definition des Begriffes „Beherrschtes Produktmerkmal“ nach [ISO 22514-1] entspricht damit fast wörtlich der Definition des Begriffes „Beherrschtes Prozessmerkmal“ nach der deutschen Norm [DIN 55350-11] aus dem Jahr 2008: *„Prozessmerkmal, bei dem sich die Parameter der Verteilung der Merkmalswerte praktisch nicht oder nur in bekannter Weise oder in bekannten Grenzen ändern“*. Dieser Begriff wird dann in der Definition des Begriffes „Beherrschter Prozess“ verwendet: *„Prozess, dessen wesentliche Merkmale beherrschte Prozessmerkmale sind“*. Allerdings enthält [DIN 55350-11] keine Definition des Begriffes „Stabiler Prozess“.

**Verständnis bei Bosch**

Die Definitionen der neuen Norm [ISO 22514-1] kommen den Definitionen nach [DIN 55350-11] sehr nahe bzw. ergänzen diese und sind grundsätzlich deckungsgleich mit dem bisherigen Verständnis bei Bosch, das daher unverändert weitergeführt wird:

- **Stabiler Prozess:** Prozess, der nur zufälligen Streuungsursachen unterliegt *([ISO 22514-1, 3.1.21])*

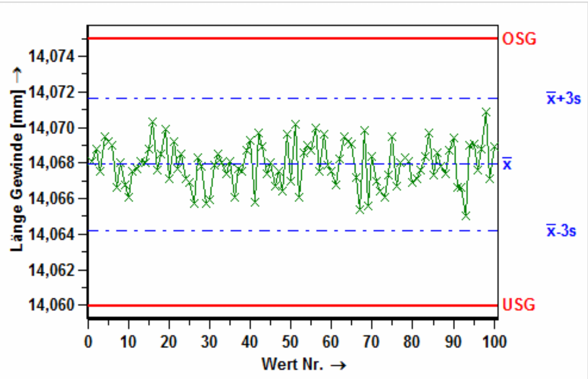



Abbildung 39:
Beispiel für einen stabilen Prozess

*ANMERKUNG 1: Bei stabilen Prozessen treten nur zufällige Mittelwertänderungen auf, die sich im Mittel gegeneinander aufheben.*

- **Instabiler, aber beherrschter Prozess:** Prozess, bei dem sich die Parameter der Verteilung der Merkmalswerte praktisch nicht oder nur in bekannter Weise oder in bekannten Grenzen ändern *(in Anlehnung an [ISO 22514-1, 3.1.20] und [DIN 55350-11, 3.11.1 & 3.11.2])*

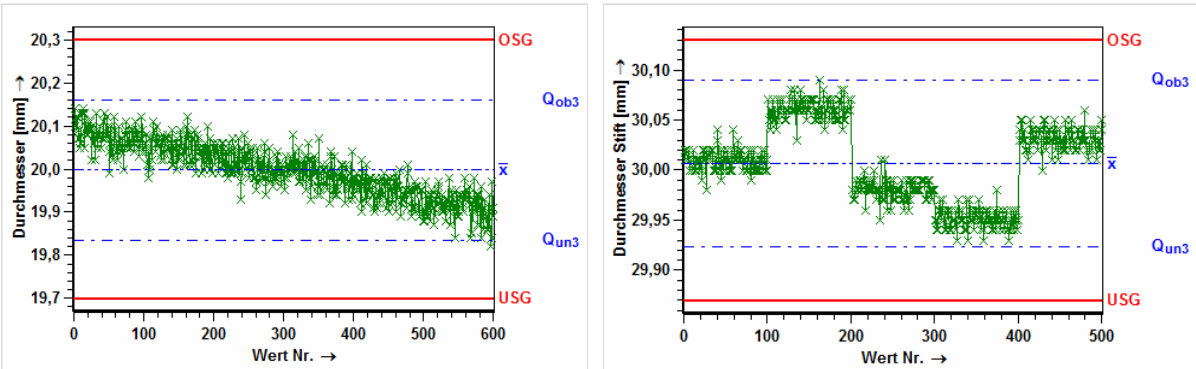



Abbildung 40: Beispiele für instabile, aber beherrschte Prozesse

*ANMERKUNG 2: Bei instabilen, aber beherrschten Prozessen treten systematische Mittelwertänderungen auf, die in bestimmten Grenzen liegen und deren Ursachen bekannt sind (z. B. Werkzeugverschleiß).*

# H Definition von $C_{p(k)}$ und $P_{p(k)}$ nach ISO 22514 und AIAG SPC

Die Definitionen der Prozessfähigkeitsindizes $C_p$ und $C_{pk}$ *(en. capability)* sowie der Prozessleistungsindizes $P_p$ und $P_{pk}$ *(en. performance)* nach [ISO 22514-2] und [AIAG SPC] unterscheiden sich.

Beide Ansätze gehen davon aus, dass in bestimmten Zeitabständen Stichproben aus der gesamten Produktionsmenge gezogen werden. Positionen und Streuungen der einzelnen Stichproben überlagern sich zu einer Gesamtverteilung (vgl. Abb. 41).

*ANMERKUNG 1: [ISO 22514-2] unterscheidet basierend auf den Eigenschaften der Einzelstichproben und deren zeitlichen Verhalten 8 unterschiedliche Modelle für die Gesamtverteilung, von denen lediglich 2 Modelle Normalverteilungen sind (vgl. Anhang E). Während [ISO 22514-2] insofern weitgehend beliebig verteilte Messwerte zulässt, basiert der Ansatz nach [AIAG SPC] auf hinreichend normalverteilten Werten. Bei schiefen Verteilungen können normalverteilte Werte häufig durch geeignete Transformation hergestellt werden.*

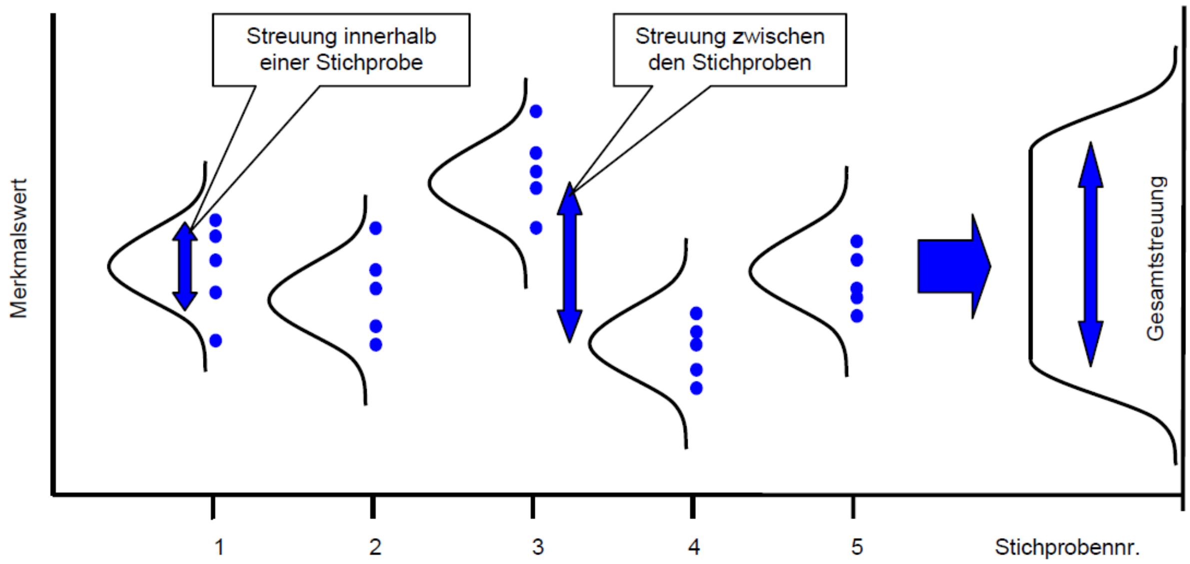



Abbildung 41: Beiträge von Streuung und Position der einzelnen Stichproben zur Gesamtstreuung

**ISO 22514**

Nach [ISO 22514-2] werden $C_p$ und $P_p$ nach derselben Berechnungsvorschrift ermittelt; dasselbe gilt für $C_{pk}$ und $P_{pk}$:

$$\begin{matrix} C_p \\ P_p \end{matrix} = \frac{UL-LL}{X_{99{,}865\,\%}-X_{0{,}135\,\%}}; \qquad \begin{matrix} C_{pk} \\ P_{pk} \end{matrix} = min\left(\frac{X_{mid}-LL}{X_{mid}-X_{0{,}135\,\%}};\ \frac{UL-X_{mid}}{X_{99{,}865\,\%}-X_{mid}}\right)$$

Ob die aus den Messwerten ermittelten Berechnungsergebnisse als Prozessfähigkeit oder Prozessleistung zu interpretieren und dementsprechend mit $C_p$ und $C_{pk}$ oder $P_p$ und $P_{pk}$ zu bezeichnen sind, entscheidet ausschließlich die Prozessstabilität. Stabilen Prozessen werden $C_p$ und $C_{pk}$ zugeordnet, instabilen Prozessen $P_p$ und $P_{pk}$. Instabil sind insbesondere Prozesse mit signifikanten Lageunterschieden zwischen den einzelnen Stichproben, d. h. signifikanter Streuung der Stichprobenmittelwerte.

Daneben sind ggf. weitere Kriterien wie die Streuung der Stichprobenvarianzen und statistisch unwahrscheinliches Verhalten (Run, Trend, Middle Third) relevant.

*ANMERKUNG 2: Im Unterschied zum Ansatz nach [AIAG SPC] enthalten die Berechnungsergebnisse grundsätzlich immer beide Streuungsanteile, d. h. die Streuung innerhalb **und** zwischen Stichproben. Die Analyse der Prozessstabilität bewertet lediglich, ob der Streuungsanteil zwischen den Stichproben (relativ zum Streuungsanteil innerhalb der Stichproben) als signifikant zu bewerten ist, ohne jedoch das zahlenmäßige Berechnungsergebnis zu ändern. Insofern kann das Ergebnis u. U. ungünstiger ausfallen als nach [AIAG SPC].*

**AIAG SPC**

Im Unterschied zu [ISO 22514-2] definiert [AIAG SPC] $C_p$ und $C_{pk}$ ausschließlich über die Streuung **innerhalb** der einzelnen Stichproben, d. h. es sind keine Streuungsanteile zwischen Stichproben enthalten:

$$C_p = \frac{UL - LL}{6 \cdot \sigma_C}; \qquad \text{und} \qquad C_{pk} = min\left(\frac{X_{mid} - LL}{3 \cdot \sigma_C}; \frac{UL - X_{mid}}{3 \cdot \sigma_C}\right)$$

mit

$$\sigma_C \approx \hat{\sigma}_C = \sqrt{\overline{s^2}} = \sqrt{\frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} s_k^2} = \sqrt{\frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} \left\{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - \bar{x}_k)^2\right\}} \qquad \bar{x}_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ik}$$

und

| | |
|---|---|
| $\sigma_C$ | Standardabweichung der Grundgesamtheit |
| $\hat{\sigma}_C$ | Schätzer für die Standardabweichung $\sigma_C$ der Grundgesamtheit |
| m | Anzahl Stichproben |
| n | Anzahl Messwerte je Stichprobe |
| k | Nummer der Stichprobe: $1 \leq k \leq m$ |
| i | Nummer des Messwertes innerhalb einer Stichprobe: $1 \leq i \leq n$ |
| $x_{ik}$ | Messwert Nr. i in Stichprobe Nr. k |
| $\bar{x}_k$ | Mittelwert der Messwerte $x_{ik}$ in Stichprobe Nr. k |
| $s_k$ | Standardabweichung der Messwerte $x_{ik}$ in Stichprobe Nr. k |

Da der Schätzer $\hat{\sigma}_C$ ausschließlich aus den empirischen Stichprobenvarianzen $s_k^2$ ermittelt wird, enthält er keine Streuungsanteile zwischen den einzelnen Stichproben. Dies bedeutet, dass Effekte wie z. B. Drift durch Werkzeugabnutzung **nicht** erfasst werden, die zwar die Position der Stichproben verändert, aber nicht unbedingt deren mittlere Streuung. Aus diesem Grund werden $C_p$ und $C_{pk}$auch als **Kurzzeitfähigkeit** (im Sinne von [AIAG SPC]) verstanden.

$P_p$ und $P_{pk}$ sind hingegen über die Gesamtstreuung aller Messwerte $x_{ik}$ definiert, die dann zusätzlich auch die Streuungsanteile **zwischen** den einzelnen Stichproben enthalten:

$$P_p = \frac{UL - LL}{6 \cdot \sigma_P}; \qquad \text{und} \qquad P_{pk} = min\left(\frac{X_{mid} - LL}{3 \cdot \sigma_P}; \frac{UL - X_{mid}}{3 \cdot \sigma_P}\right)$$

mit

$$\sigma_P \approx \hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{j=1}^{N} \left(x_j - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{m \cdot n - 1} \cdot \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - \bar{x})^2} \tag{H.1}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} x_j = \frac{1}{m \cdot n} \cdot \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} \bar{x}_k = \bar{\bar{x}}$$

und

| | |
|---|---|
| $\sigma_P$ | Standardabweichung der Grundgesamtheit |
| $\hat{\sigma}_P$ | Schätzer für die Standardabweichung $\sigma_P$ der Grundgesamtheit |
| N | Gesamtzahl aller Messwerte: $N = m \cdot n$ |
| j | Nummer des Messwertes innerhalb der Gesamtheit aller Messwerte: $1 \leq j \leq N$; $j = (k-1) \cdot n + i$ |
| $x_j$ | Messwert Nr. j in der Gesamtheit aller Messwerte: $x_j = x_{(k-1) \cdot n + i} = x_{ik}$ |
| $\bar{x}$ | Mittelwert der Gesamtheit aller Messwerte $x_j$ |
| $\bar{\bar{x}}$ | Mittelwert der Stichprobenmittelwerte $\bar{x}_k$ |

Durch algebraische Umformung von Gl. (H.1) lässt sich $\hat{\sigma}_P$ gemäß

$$\hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{m \cdot (n-1)}{m \cdot n - 1} \cdot \overline{s^2} + \frac{(m-1) \cdot n}{m \cdot n - 1} \cdot s_{\bar{x}}^2} \qquad \text{(H.2)}$$

in die mittlere Stichprobenvarianz $\overline{s^2}$ (Streuung **innerhalb** der Stichproben) und die Varianz

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{k=1}^{m} (\bar{x}_k - \bar{\bar{x}})^2$$

der Stichprobenmittelwerte $\bar{x}_k$ (Streuung **zwischen** Stichproben) aufspalten. Sofern die Mittelwert-streuung der zufälligen Streuung

$$s_{\bar{x}} \approx \sqrt{\frac{\overline{s^2}}{n}}$$

entspricht, die auf Basis der zu Stichproben zusammengefassten Einzelmesswerte im Mittel zu erwarten ist, reduziert sich Gl. (H.2) auf die Form

$$\hat{\sigma}_P \approx \sqrt{\overline{s^2}}$$

d. h. die Streuung zwischen Stichproben ist zufällig und damit insignifikant. In diesem Fall gilt

$$\hat{\sigma}_P \approx \hat{\sigma}_C$$

d. h. bei ausreichend stabiler Prozesslage unterscheiden sich die Ergbnisse für $C_p$ und $P_p$ nicht signifikant und sind statististisch als gleich zu betrachten. Dasselbe gilt für $C_{pk}$ und $P_{pk}$.

*ANMERKUNG 3: In der Praxis sind $P_p$ und $P_{pk}$ meist kleiner als $C_p$ und $C_{pk}$. Deshalb ist anzustreben, den Prozess so zu optimieren, dass dieser Unterschied möglichst klein wird.*

Da der Schätzer $\hat{\sigma}_P$ auch mögliche Effekte wie z. B. Drift durch Werkzeugabnutzung enthält, die die Positionen der einzelnen Stichproben im Laufe der Zeit verändern, werden die Leistungsindizes $P_p$ und $P_{pk}$ auch als **Langzeitfähigkeit** (im Sinne von [AIAG SPC]) verstanden.

Bei stabilen Prozessen unterscheiden sich Kurz- und Langzeitfähigkeit nicht signifikant.

# I Vorgehen bei unzureichender Anzahl von Teilen

Zur Bewertung der Maschinen- und Prozessfähigkeit oder Prozessleistung wird eine bestimmte Mindestanzahl Teile benötigt, um eine ausreichende „Verlässlichkeit“ der statistischen Aussagen sicherzustellen. Diese Mindestanzahl Teile, d. h. Messwerte bei 1 Messwert/Teil, wird im Fall sehr kleiner Fertigungslose häufig nicht erreicht. Gründe sind neben geringen Fertigungsmengen z. B. auch lange Bearbeitungs- oder Messzeiten pro Teil, hohe Stückkosten, zerstörende Prüfungen.

Während statistische Methoden im Bereich ab $n' \geq 25$ Teilen mit $n = n'$ Messwerten noch eingeschränkt anwendbar sind, wird ihre Anwendung im Bereich $n' < 25$ zunehmend fragwürdig, da die „Verlässlichkeit“ der ermittelten statistischen Ergebnisse drastisch abnimmt. Derzeit werden u. a. folgende Ansätze diskutiert und praktisch eingesetzt:

1. Anpassung der Mindestanforderungen an Fähigkeit und Leistung in Abhängigkeit von der Anzahl verfügbarer Messwerte (siehe Anhang I.1);
2. Zusammenfassung der Messwerte gleicher oder vergleichbarer Merkmale gleicher oder unterschiedlicher Teile (siehe Anhang I.2);
3. Verwendung der Toleranzausnutzung %T als **nicht statistisches** Akzeptanzkriterium (siehe Anhang I.3), falls weder Vorgehen nach Punkt 1 oder 2 noch 100 %-Prüfung möglich ist.

Maßgeblich für die Anwendbarkeit der einzelnen Ansätze und Kriterien zur Qualifikation von Fertigungseinrichtungen und Fertigungsprozessen sind die verfügbare Datenbasis und deren Zusammensetzung:

<table>
<tr><th>Fall</th><th>Anzahl Teile n‘</th><th>Anzahl Messwerte n</th><th>Verfahren</th><th>Akzeptanz-kriterium</th></tr>
<tr><td>A</td><td>$\boldsymbol{n' \geq 25}$<br>Teile derselben Sachnummer</td><td rowspan="2">$\boldsymbol{n \geq 25}$<br>Anzahl Messwerte gleich der Anzahl Teile ($n' = n$)</td><td rowspan="3">Ermittlung der erforderlichen Fähigkeits- und Leistungsindizes:<br>$C_m$, $C_{mk}$<br>$C_p$, $C_{pk}$<br>$P_p$, $P_{pk}$<br>$C_{p-ST}$, $C_{pk-ST}$<br>$P_{p-ST}$, $P_{pk-ST}$</td><td rowspan="3">Einhalten der Mindestwerte für Fähigkeits- und Leistungsindizes angepasst auf die verfügbare Anzahl Messwerte<br><br>Beispiel:<br>$C_{mk} \geq 1,88$ (n = 30)<br>$C_{pk} \geq 2,07$ (n = 35)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$\boldsymbol{n' \geq 25}$<br>Durch Zusammenfassen von Teilen mit unterschiedlichen Sachnummern wird die erforderliche Anzahl Teile $n' \geq 25$ erreicht</td></tr>
<tr><td>C</td><td rowspan="2">$\boldsymbol{n' < 25}$<br>Trotz Zusammenfassen von Teilen mit unterschiedlichen Sachnummern wird die erforderliche Anzahl Teile $n' \geq 25$ nicht erreicht</td><td>$\boldsymbol{n \geq 25}$<br>Durch Zusammenfassen und Normieren von Messwerten verschiedener Merkmale an jedem Teil wird die erforderliche Anzahl Messwerte $n \geq 25$ erreicht ($n' < n$)</td></tr>
<tr><td>D</td><td>n < 25<br>Trotz Zusammenfassen und Normieren von Messwerten verschiedener Merkmale an jedem Teil wird die erforderliche Anzahl Messwerte $n \geq 25$ nicht erreicht</td><td>%T</td><td>Alle Messwerte innerhalb 75 % von $T - 2 \cdot U$</td></tr>
</table>

Tabelle 5: Qualifikation von Fertigungsmaschinen und -prozessen bei unzureichender Anzahl Teile

## I.1 Dynamisierung der Anforderungen an Fähigkeit und Leistung

Die „Verlässlichkeit“ einer statistischen Aussage wird quantitativ durch den Vertrauensbereich bei einem bestimmten Vertrauensniveau $1-\alpha$ bestimmt. Anschaulich ist das die Breite des Intervalls, in dem die Ergebnisse einer statistischen Auswertung mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ zu erwarten sind: je geringer die Breite, umso „verlässlicher“ das statistische Ergebnis.

Die Breite des Vertrauensbereiches bei einem bestimmten Vertrauensniveau $1-\alpha$ wird im Wesentlichen durch die Anzahl Einzelkomponenten (z. B. Messergebnisse) bestimmt, aus denen das statistische Ergebnis (z. B. die Varianz) ermittelt wird: je weniger Komponenten (d. h. je kleiner die Stichprobe), umso größer die Breite des Vertrauensintervalls, d. h. umso „weniger verlässlich“ das statistische Ergebnis.

Der potentielle Fähigkeitsindex $C_p = \frac{T}{6 \cdot s}$ hängt ausschließlich von der empirischen Standardabweichung $s$ ab, die als Schätzer $\hat{\sigma}$ für die Standardabweichung $\sigma$ der Grundgesamtheit dient: z. B. $\sigma \approx \hat{\sigma} = s$ im einfachsten Fall oder ein Schätzer nach Kap. 8. Die Streuung von $s$ wird durch die sogenannte $\chi^2$-Verteilung beschrieben. Die Vertrauensgrenzen berechnen sich als Quantile dieser Verteilung:

$$C_{p\,(min)} = \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1;\,\alpha/2}}{n-1}} \cdot C_p \qquad C_{p\,(max)} = \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}}{n-1}} \cdot C_p \qquad C_{p\,(min)} \leq C_p \leq C_{p\,(max)}$$

$C_{p\,(min)}$ und $C_{p\,(max)}$ repräsentieren die untere und obere Vertrauensgrenze für $C_p$ bei n Messwerten und Vertrauensniveau $1-\alpha$. Diese Grenzen bei festem Vertrauensniveau $1-\alpha$ in Abhängigkeit von der Anzahl Messwerte aufgetragen ergibt die häufig als „Trompetenkurve“ bezeichnete Darstellung:

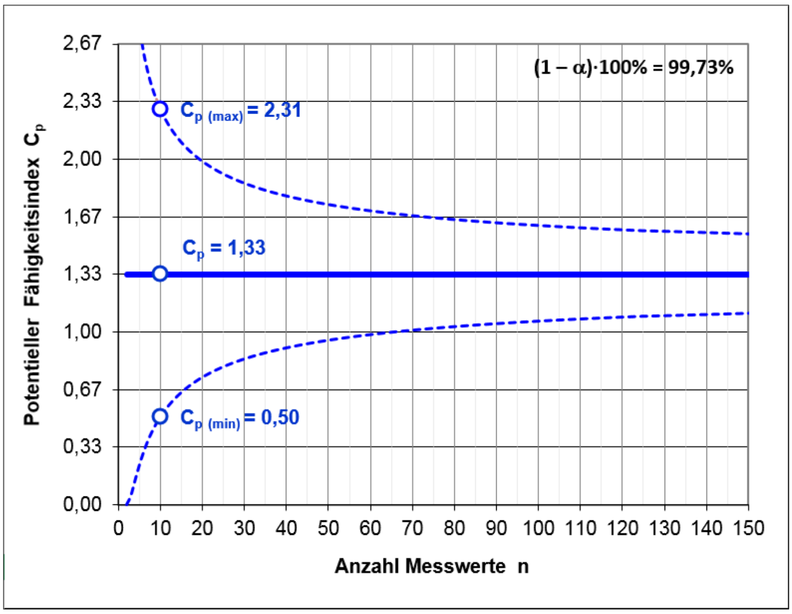



Abbildung 42: Vertrauensgrenzen für $C_p$ in Abhängigkeit von der Anzahl Messwerte

Abb. 41 zeigt, dass z. B. bei $n = 10$ der tatsächliche Wert für den errechneten Wert $C_p = 1{,}33$ mit 99,73 % Wahrscheinlichkeit zwischen $C_p = 0{,}5$ und $C_p = 2{,}31$ liegt, d. h. der tatsächliche Wert von $C_p$ kann deutlich kleiner als der geforderte Mindestwert $C_p = 1{,}33$ sein und unterhalb der unteren 99,73 %-Vertrauensgrenze $C_p = 1{,}08$ liegen, die bei $n_0 = 125$ Messwerten gilt.

Das Konzept, auch bei zu geringer Anzahl Messwerte ausreichende Fähigkeit sicherzustellen, beruht auf der Vorgabe, dass der Grenzwert, der durch die untere Vertrauensgrenze bei $n_0 = 125$ Messwerten bestimmt ist, auch bei $n < 125$ verfügbaren Messwerten nicht unterschritten wird, d. h. die untere Vertrauensgrenze wird fest vorgegeben. Dies hat zur Folge, dass aufgrund der mit abnehmender Anzahl Messwerte zunehmenden Breite des Vertrauensbereiches der Mindestwert für $C_p$ angehoben wird.

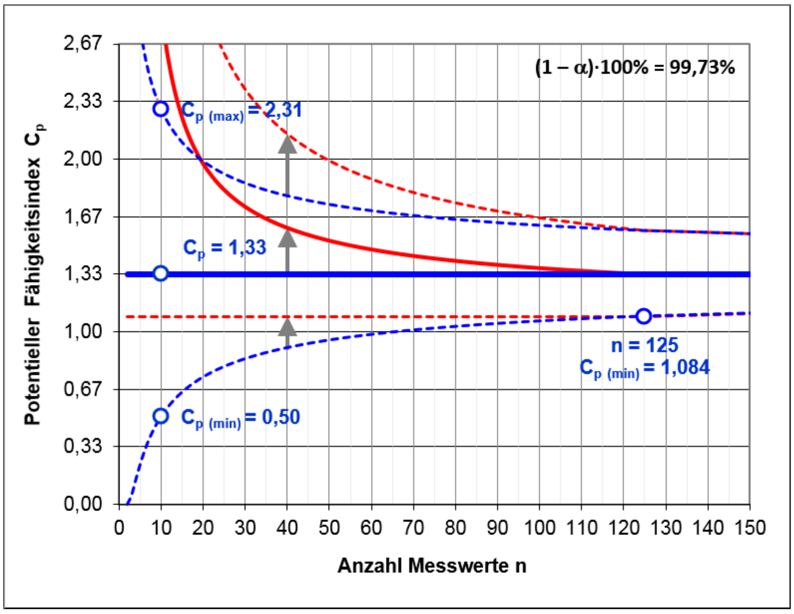



Abbildung 43: Anhebung $C_p$ mit zugehörigen Vertrauensgrenzen abhängig von der Anzahl Messwerte

Die modifizierten Werte berechnen sich gemäß

$$C^*_{p\,(min)} = C_p \cdot \sqrt{\frac{\chi^2_{n_0-1;\,\alpha/2}}{n_0-1}} \qquad C^*_p = C_p \cdot \sqrt{\frac{\chi^2_{n_0-1;\,\alpha/2}}{n_0-1} \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\alpha/2}}} \qquad C^*_{p\,(max)} = C_p \cdot \sqrt{\frac{\chi^2_{n_0-1;\,\alpha/2}}{n_0-1} \cdot \frac{\chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}}{\chi^2_{n-1;\,\alpha/2}}}$$

Diese Berechnungsvorschriften gelten exakt für den potentiellen Fähigkeitsindex $C_p$. Entsprechende Berechnungsvorschriften für $C_{pk}$ lassen sich nur näherungsweise ermitteln. Die zahlenmäßigen Unterschiede sind jedoch wenig signifikant, so dass für $C_{pk}$ üblicherweise dieselben Berechnungsvorschriften verwendet werden. Entprechend ergeben sich für $C_p$ und $C_{pk}$ folgende Anpassungen:

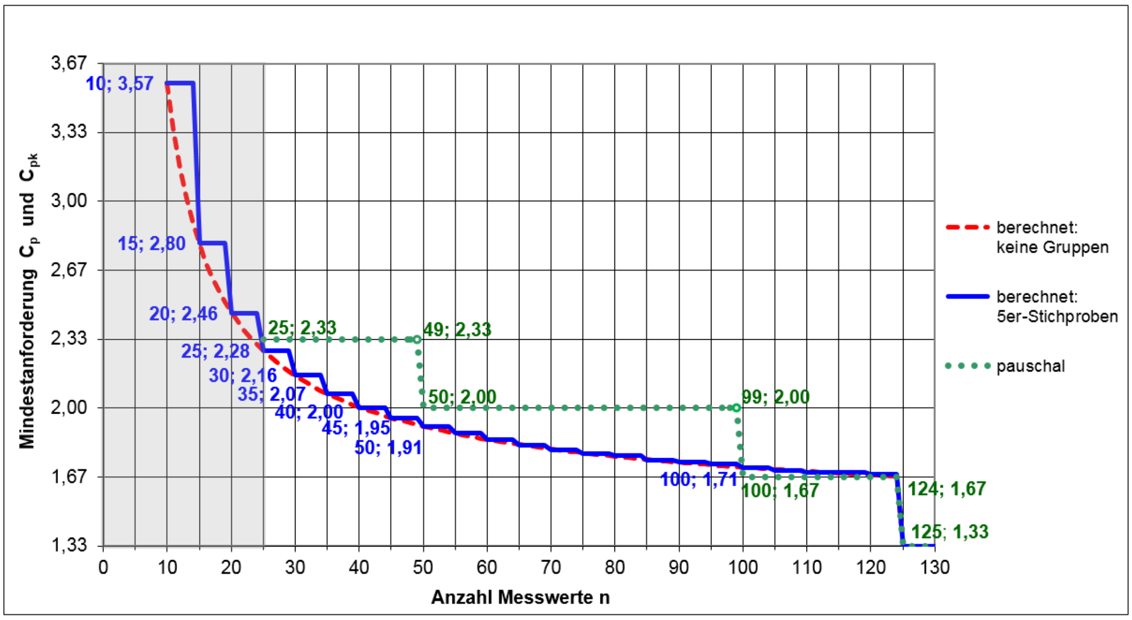



Abbildung 44: Mindestwerte für $C_p$ und $C_{pk}$ bei weniger als 125 verfügbaren Messwerten

Die gleiche Vorgehensweise mit den entsprechenden Parametern für die Maschinenfähigkeit liefert für $C_m$ und $C_{mk}$ folgende Anpassungen:

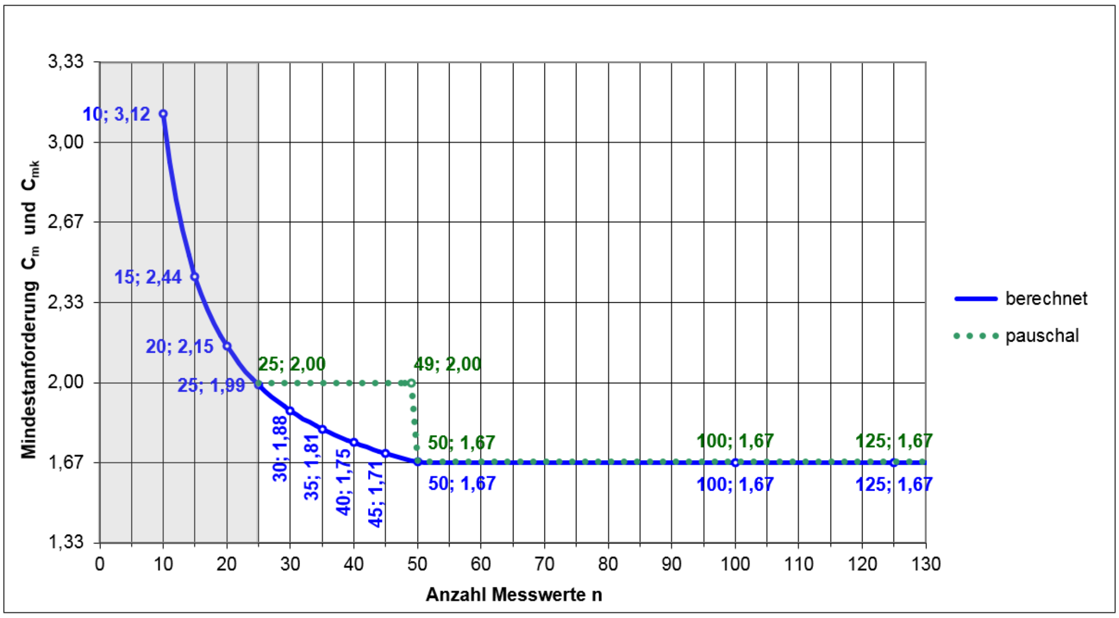



Abbildung 45: Mindestwerte für $C_m$ und $C_{mk}$ bei weniger als 50 verfügbaren Messwerten

*ANMERKUNG 1: Um bei bestimmten Anzahlen verfügbarer Messwerte für $C_{m(k)}$ und $C_{p(k)}$ Größenwerte zu erreichen, die möglichst genau ganzzahlige Vielfache von 0,33 sind, werden anstelle von Vertrauensniveau 99,73 % gelegentlich geringfügig abweichende Vertrauensniveaus verwendet. Beispiel Q-DAS-Software unter Auswertestrategie BOSCH 2012: Vertrauensniveau 99,67 % beidseitig (entsprechend 99,83 % einseitig), so dass $C_{m(k)}$ = 2,0 bei n = 25 (Mindestanzahl Messwerte) und $C_{p(k)}$ = 2,0 bei n = 40 (Warngrenze für zu wenig Messwerte).*

Anzahlen unter n = 25 Messwerten sollten unbedingt vermieden werden, da statistische Aussagen sowohl für $C_m$ und $C_{mk}$ als auch $C_p$ und $C_{pk}$ zunehmend fragwürdig werden.

Stehen in Ausnahmefällen weder eine geeignete Statististik-Software noch die nachstehenden Tabellen für häufig auftretende Szenarien zur Verfügung, sind pauschale Anhebungen möglich:

- $C_{m(k)}$ wird pauschal um 0,33 angehoben, sobald die Anzahl verfügbarer Messwerte den Grenzwert n = 50 unterschreitet.
- Entsprechend wird $C_{p(k)}$ pauschal um jeweils 0,33 angehoben, sobald die Anzahl verfügbarer Messwerte die Grenzwerte n = 125, n = 100 und n = 50 unterschreitet (siehe Abbildung 44).

Diese pauschalen Anhebungen führen meist zu höheren Fähigkeitsanforderungen als Anhebungen, die individuell für die tatsächlich verfügbare Anzahl Messwerte berechnet wurden.

*ANMERKUNG 2: Fällt der ermittelte Fähigkeitsindex in den Bereich zwischen individuell und pauschal ermitteltem Grenzwert, ist für die Einstufung „fähig“ oder „nicht fähig“ ausschließlich derjenige Grenzwert maßgeblich, der bei der Auswertung tatsächlich zur Verfügung steht und entsprechend verwendet wird (d. h. entweder der individuell berechnete Grenzwert oder der den nachstehenden Tabellen entnommene Grenzwert oder der pauschal ermittelte Grenzwert).*

Alle Erläuterungen und Aussagen dieses Kapitels bezüglich Prozessfähigkeit gelten gleichermaßen für die Prozessleistung $P_{p(k)}$ sowie die Kurzzeitvarianten $C_{p(k)\text{-ST}}$ und $P_{p(k)\text{-ST}}$ von Prozessfähigkeit bzw. Prozessleistung.

*ANMERKUNG 3: Die Mindestforderung für $C_{p(k)\text{-ST}}$ und $P_{p(k)\text{-ST}}$ beträgt bereits 1,67 bei n ≥ 125 Messwerten. Daher entfällt in diesem Fall die pauschale Anhebung um 0,33 im Bereich von 100 ≤ n < 125 Messwerten.*

| 5 Messwerte je Stichprobe | | |
|---|---|---|
| Anzahl vollständige Stichproben | Gesamtzahl Messwerte in allen Stichproben | $C_p$, $C_{pk}$, $P_p$, $P_{pk}$, $C_{p\text{-}ST}$, $C_{pk\text{-}ST}$, $P_{p\text{-}ST}$, $P_{pk\text{-}ST}$ |
| *1* | *5* | *7,92* |
| *2* | *10* | *3,57* |
| *3* | *15* | *2,80* |
| *4* | *20* | *2,46* |
| 5 | 25 | 2,28 |
| 6 | 30 | 2,16 |
| 7 | 35 | 2,07 |
| 8 | 40 | 2,00 |
| 9 | 45 | 1,95 |
| 10 | 50 | 1,91 |
| 11 | 55 | 1,88 |
| 12 | 60 | 1,85 |
| 13 | 65 | 1,82 |
| 14 | 70 | 1,80 |
| 15 | 75 | 1,78 |
| 16 | 80 | 1,77 |
| 17 | 85 | 1,75 |
| 18 | 90 | 1,74 |
| 19 | 95 | 1,73 |
| 20 | 100 | 1,71 |
| 21 | 105 | 1,70 |
| 22 | 110 | 1,69 |
| 23 | 115 | 1,69 |
| 24 | 120 | 1,68 |
| **≥ 25** | **≥ 125** | **1,33** |

*HINWEIS: Für die Kurzzeitindizes $C_{p\text{-}ST}$, $C_{pk\text{-}ST}$, $P_{p\text{-}ST}$ und $P_{pk\text{-}ST}$ gilt auch bei mehr als 125 Messwerten die Mindestanforderung 1,67.*

| 3 Messwerte je Stichprobe | | |
|---|---|---|
| Anzahl vollständige Stichproben | Gesamtzahl Messwerte in allen Stichproben | $C_p$, $C_{pk}$, $P_p$, $P_{pk}$, $C_{p\text{-}ST}$, $C_{pk\text{-}ST}$, $P_{p\text{-}ST}$, $P_{pk\text{-}ST}$ |
| *1* | *3* | *33,10* |
| *2* | *6* | *5,97* |
| *3* | *9* | *3,88* |
| *4* | *12* | *3,16* |
| *5* | *15* | *2,80* |
| *6* | *18* | *2,57* |
| *7* | *21* | *2,42* |
| *8* | *24* | *2,31* |
| 9 | 27 | 2,22 |
| 10 | 30 | 2,16 |
| 11 | 33 | 2,10 |
| 12 | 36 | 2,06 |
| 13 | 39 | 2,02 |
| 14 | 42 | 1,98 |
| 15 | 45 | 1,95 |
| 16 | 48 | 1,93 |
| 17 | 51 | 1,91 |
| 18 | 54 | 1,88 |
| 19 | 57 | 1,87 |
| 20 | 60 | 1,85 |
| 21 | 63 | 1,83 |
| 22 | 66 | 1,82 |
| 23 | 69 | 1,81 |
| 24 | 72 | 1,79 |
| 25 | 75 | 1,78 |
| 26 | 78 | 1,77 |
| 27 | 81 | 1,76 |
| 28 | 84 | 1,75 |
| 29 | 87 | 1,75 |
| 30 | 90 | 1,74 |
| 31 | 93 | 1,73 |
| 32 | 96 | 1,72 |
| 33 | 99 | 1,72 |
| 34 | 102 | 1,71 |
| 35 | 105 | 1,70 |
| 36 | 108 | 1,70 |
| 37 | 111 | 1,69 |
| 38 | 114 | 1,69 |
| 39 | 117 | 1,68 |
| 40 | 120 | 1,68 |
| 41 | 123 | 1,67 |
| **≥ 42** | **≥ 126** | **1,33** |

| Maschinenfähigkeit | |
|---|---|
| Anzahl Messwerte | $C_m$, $C_{mk}$ |
| *2* | *559,58* |
| *3* | *28,90* |
| *4* | *11,09* |
| *5* | *6,91* |
| *6* | *5,21* |
| *7* | *4,31* |
| *8* | *3,76* |
| *9* | *3,39* |
| *10* | *3,12* |
| *11* | *2,92* |
| *12* | *2,76* |
| *13* | *2,63* |
| *14* | *2,53* |
| *15* | *2,44* |
| *16* | *2,37* |
| *17* | *2,30* |
| *18* | *2,25* |
| *19* | *2,20* |
| *20* | *2,15* |
| *21* | *2,11* |
| *22* | *2,08* |
| *23* | *2,05* |
| *24* | *2,02* |
| 25 | 1,99 |
| 26 | 1,96 |
| 27 | 1,94 |
| 28 | 1,92 |
| 29 | 1,90 |
| 30 | 1,88 |
| 31 | 1,87 |
| 32 | 1,85 |
| 33 | 1,83 |
| 34 | 1,82 |
| 35 | 1,81 |
| 36 | 1,79 |
| 37 | 1,78 |
| 38 | 1,77 |
| 39 | 1,76 |
| 40 | 1,75 |
| 41 | 1,74 |
| 42 | 1,73 |
| 43 | 1,72 |
| 44 | 1,71 |
| 45 | 1,71 |
| 46 | 1,70 |
| 47 | 1,69 |
| 48 | 1,68 |
| 49 | 1,68 |
| **≥ 50** | **1,67** |

Tabelle 6: Anforderungen an Prozessfähigkeit/-leistung und Maschinenfähigkeit bei Mindermengen

*(Vertrauensniveau 99,67 % beidseitig / 99,83 % einseitig unten, 5 und 3 Messwerte je Stichprobe)*

*HINWEIS: Messwerte, die keine vollständige Stichprobe bilden, werden nicht in die Auswertung einbezogen.*

## I.2 Gruppieren von Teilen und Merkmalen

Zum Gruppieren können insbesondere formähnliche Teile geeignet sein, die auf derselben Fertigungseinrichtung in einem Arbeitsgang gemeinsam bearbeitet werden, so dass kein Umrüsten erforderlich ist (z. B. Werkzeugwechsel, Wechsel der Einspannvorrichtung), und wenn dieser Arbeitsgang gleiche und/oder ähnliche Merkmale (z. B. Bohrungen) in gleicher und/oder unterschiedlicher Ausprägung (z. B. mit unterschiedlichen Durchmessern) an verschiedenen Teilen und/oder verschiedenen Positionen desselben Teils erzeugt.

### I.2.1 Zusammenfassen verschiedener Teile: Fall B

Die vorhandenen Messwerte gleicher oder vergleichbarer Merkmale können für nacheinander gefertigte Teile mit unterschiedlichen Sachnummern zusammengefasst werden, sofern diese Merkmale demselben Einfluss unterliegen, z. B. gleiche Maschine, gleiches Werkzeug (z. B. Bohrer, Fräser).

Bei Verschiedenheit der Merkmalstoleranzen ist für die Zusammenfassung eine Normierung auf eine geeignete Bezugsgröße wie z. B. die jeweilige Toleranz T notwendig. Die Toleranzen sollten dabei zumindest von gleicher Größenordnung sein.

Normierung für zweiseitig begrenzte Merkmale: $\%x = \frac{x - 0{,}5 \cdot (LL + UL)}{T} \cdot 100\ \%$

Die Größe $\%x$ gibt die Abweichung des jeweiligen Messwertes $x$ vom Mittenwert $0{,}5 \cdot (LL + UL)$ des Toleranzintervalls mit den Grenzen LL und UL als Prozentsatz der Toleranz $T = (UL - LL)$an. %x besitzt den Sollwert 0 % und die Grenzwerte $\%LL = -50\%$ and $\%LL = +50\%$.

Normierung für null-begrenzte Merkmale: $\%x = \frac{x}{T^*} \cdot 100\ \%$

Die Größe %x gibt die Abweichung des jeweiligen Messwertes x von 0 als Prozentsatz der Pseudo-Toleranz $T^* = UL - 0 = UL$ an. $\%x$ besitzt die natürliche untere Grenze $\%LL = 0\%$ als Sollwert mit dem oberen Grenzwert $\%UL = +100\%$.

Die zusammengefassten Daten werden unter Verwendung der normierten Größen %x, %LL und %UL (anstelle der unnormierten Größen x, LL und UL) nach Kap. 8 ausgewertet und entsprechende Fähigkeits- oder Leistungskenngrößen ermittelt.

*ANMERKUNG 1: Eindeutiger wäre die indizierte Schreibweise $\%x$, $\%LL$ and $\%UL$ für die normierten Größen und $x_{ik}$, $LL_k$, $UL_k$ für die nicht normierten Größen sowie $T_k = UL_k - LL_k$ und $T_k^* = UL_k$, wobei $x_{ik}$ den Messwert Nr. i angibt, der zu den Spezifikationsgrenzen Nr. k gehört, d. h. den Grenzwerten $LL_k$ und $UL_k$.*

*ANMERKUNG 2: Die Ergebnisse für Fähigkeits- oder Leistungskenngrößen sind unabhängig davon, ob sie aus den normierten oder den nicht normierten Größen berechnet werden.*

### I.2.2 Zusammenfassen verschiedener Teile und Merkmale pro Teil: Fall C

Falls trotz Zusammenfassen von Teilen die Anzahl nacheinander gefertigter Teile $n' < 25$ bleibt, kann geprüft werden, ob zusätzlich Messwerte gleichartiger Merkmale eines Teils (z. B. mehrere Durchmesser) zusammengefasst werden können und so eine ausreichende Datenbasis hergestellt werden kann. In der Regel ist auch in diesem Fall eine geeignete Normierung notwendig (vgl. Fall B, Anhang I.2.1).

Die zusammengefassten Daten werden unter Verwendung der normierten Größen $\%x$, $\%LL$ und $\%UL$ (anstelle der unnormierten Größen $x$, $LL$ und $UL$) nach Kap. 8 ausgewertet und entsprechende Fähigkeits- oder Leistungskenngrößen ermittelt.

### I.2.3 Bewertung der Gruppierbarkeit von Teilen und Merkmalen

Das Gruppieren (Zusammenfassen) von Teilen und Merkmalen ist nur dann sinnvoll, wenn sich der resultierende, statistisch auszuwertende Messdatenbestand zumindest näherungsweise so verhält, als ob er aus einer einzigen Grundgesamtheit käme, obwohl das technisch nicht zutrifft.

Zur Analyse stehen noch keine etablierten Verfahren zur Verfügung. Numerische Ansätze (z. B. auf Basis der sogenannten Cluster-Analyse) befinden sich noch in der Entwicklungsphase.

Anhand geeignet aufbereiteter Daten können jedoch ggf. vorhandene Strukturen im Datenbestand identifiziert werden. Solche Strukturen können verursacht werden

- durch tatsächliche Prozessveränderungen
- oder Daten im Datenbestand, die für die Gruppierung mit den übrigen Daten ungeeignet sind.

Dies kann nur nach einer Analyse der Ursachen für die identifizierten „Unregelmäßigkeiten“ entschieden werden. Eine solche Analyse ist daher Voraussetzung für die qualifizierte Bewertung eines Fertigungsprozesses, der z. B. eine Vielzahl Varianten fertigt, insgesamt also eine hohe Stückzahl, die einzelnen Varianten jedoch nur in geringen Stückzahlen.

Um Fehlbewertungen zu vermeiden, ist für die praktische Umsetzung maßgeblich, möglichst alle **relevanten** Einflussgrößen zu identifizieren und als Zusatzdaten (Metadaten) zu jedem Messwert aufzuzeichnen. Andererseits sollten alle nicht relevanten Einflussgrößen ausgesondert und nicht als Zusatzdaten aufgezeichnet werden, um unnötig große und nicht mehr handhabbare Datenbestände zu vermeiden.

> *BEISPIEL: Bei mehreren Varianten eines Erzeugnisteils werden Bohrungen mit variantenspezifischem Durchmesser auf einer Fertigungslinie hergestellt. Die aufbereiteten Daten zeigen an bestimmten Stellen Sprünge. Die Analyse ergibt, dass diese Sprünge mit dem Material des Erzeugnisteils korrelieren, d. h. sie treten nur auf, wenn das Material von Stahl zu Spritzguss und umgekehrt wechselt. Dies wäre nicht identifizierbar gewesen, wenn zu den Messwerten nur solche Zusatzdaten aufgezeichnet worden wären, aus denen dieser Materialwechsel nicht hervorgeht (z. B. Umgebungstemperatur).*

Werden auf einer Fertigungslinie zahlreiche Varianten eines bestimmten Produktes gefertigt und jede Variante in geringer Stückzahl und unregelmäßigen Zeitabständen, besteht insbesondere in der Prozessanlaufphase das Problem, die Qualitätsfähigkeit des Fertigungsprozesses zu bewerten.

Die folgenden Beispiele erläutern mögliche Vorgehensweisen zur Bewertung der Gruppierbarkeit.

#### Beispiel 1: Stratifizieren (Datentrennung)

Zwei Einzelkomponenten werden mittels Klebstoff mechanisch verbunden, fixiert und abgedichtet. Das Gesamtgewicht beider Komponenten wird vor und nach dem Aufbringen des Klebstoffs gemessen. Die Gewichtsdifferenz dient als Merkmal zur Prozessregelung.

Aufgrund hoher Variantenvielfalt werden die einzelnen Varianten nur in geringer Stückzahl produziert. Deshalb sollen die Messergebnisse von 2 Baugruppen zusammengefasst werden, die unter Verwendung von 2 unterschiedlichen Klebstofftypen auf 4 Fertigungslinien gefertigt werden. Die Spezifikationsgrenzen (Minimal- und Maximalgewicht) werden ausschließlich durch den verwendeten Klebstofftyp festgelegt. Über einen Auswertezeitraum von 30 Kalendertagen betrachtet stehen damit *durchschnittlich* 240 Messwerte zur Verfügung. Trotzdem sind das pro Klebstofftyp, Baugruppe und Fertigungslinie *durchschnittlich* nur 15 Teile pro Monat, was für statistische Einzelauswertungen nicht ausreicht.

Die normierten Messwerte in chronologischer Reihenfolge als Zeitreihendiagramm über 7 Kalendertagen der frühen Prozessanlaufphase dargestellt (Abb. 46), erweisen sich zwar an einem Tag als grenzwertig, liegen ansonsten aber gut zentriert innerhalb ±37,5 % der jeweiligen Merkmalstoleranzen, d. h. die Toleranzausnutzung ist geringer als 75 %. Insofern *scheint* der Prozess das Akzeptanzkriterium weitgehend zu erfüllen.

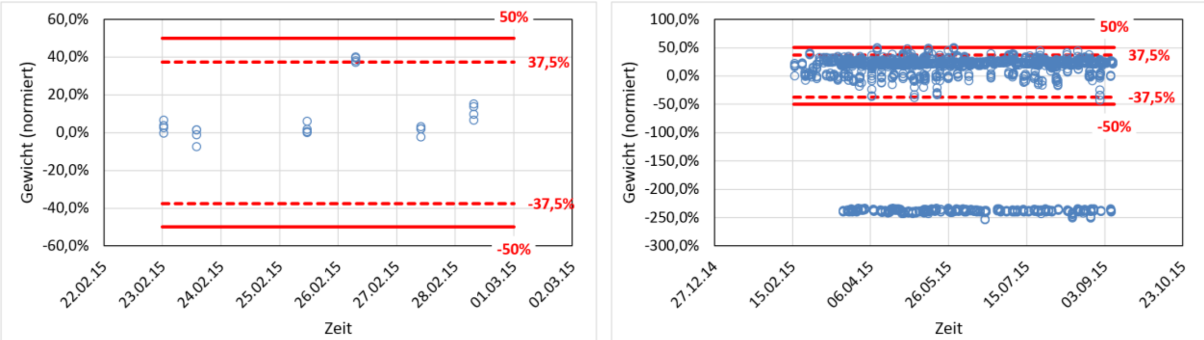



Abbildung 46: Zeitreihendiagramme „Klebstoffgewicht“ über 7 Kalendertage und 7 Kalendermonate

Im Zeitreihendiagramm der normierten Messwerte über 7 Monate ist hingegen eine klare Struktur erkennbar: Zahlreiche Werte liegen in einem begrenzten Bereich unterhalb der unteren Spezifikationsgrenze, alle übrigen Werte zeigen eine klare Tendenz zur oberen Spezifikationsgrenze. Allerdings ist keine Korrelation mit den Metadaten (Klebstofftyp, Baugruppe, Fertigungslinie) möglich.

Korrelationen von Messergebnissen mit bestimmten Merkmalseigenschaften und Metadaten lassen sich häufig durch Stratifizieren der Messwerte bzgl. bekannter Parameter wie z. B. Sollwert, Toleranz, Material, Sachnummer, Fertigungslinie ermitteln. Dabei werden die Messwerte getrennt nach diesen Parametern dargestellt.

Im vorliegenden Fall zeigt die Stratifizierung nach Klebstofftyp, dass der Bereich mit Messwerten außerhalb Toleranz und die Tendenz der Messwerte zur oberen Spezifikationsgrenze nur in Verbindung mit Klebstofftyp 2 zu beobachten ist. Da aber beide Effekte gemeinsam auftreten, ist zu vermuten, dass der Klebstofftyp nicht die Ursache ist.

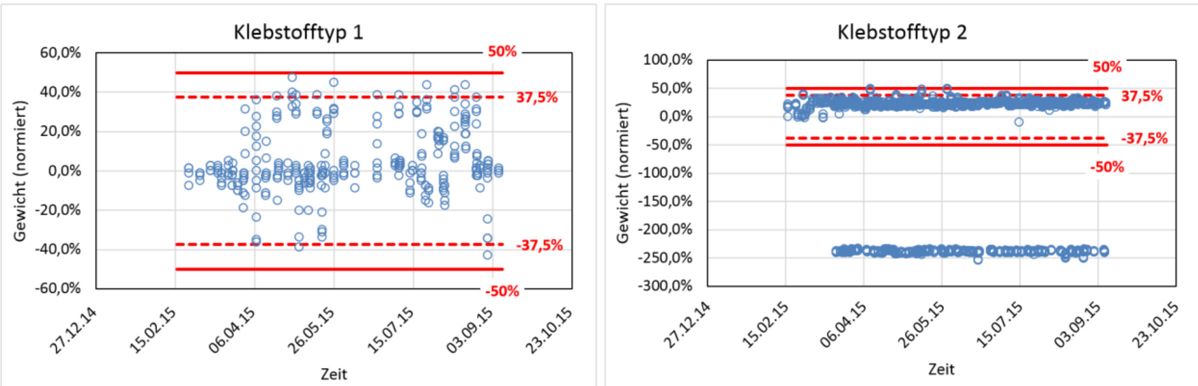



Abbildung 47: Zeitreihendiagramme „Klebstoffgewicht“ getrennt nach Klebstofftyp

Die Auftrennung nach allen verfügbaren Metadaten (Klebstofftyp, Baugruppe, Fertigungslinie) zeigt eindeutig, dass die Werte außerhalb Toleranz ausschließlich auf die Fertigungslinie 3 zurückzuführen sind (Abb. 48). Es ist deshalb nicht sinnvoll, diese Linie in die Gruppe einzubeziehen, ohne die Prozesslage und Toleranz zu überprüfen und ggf. anzupassen.

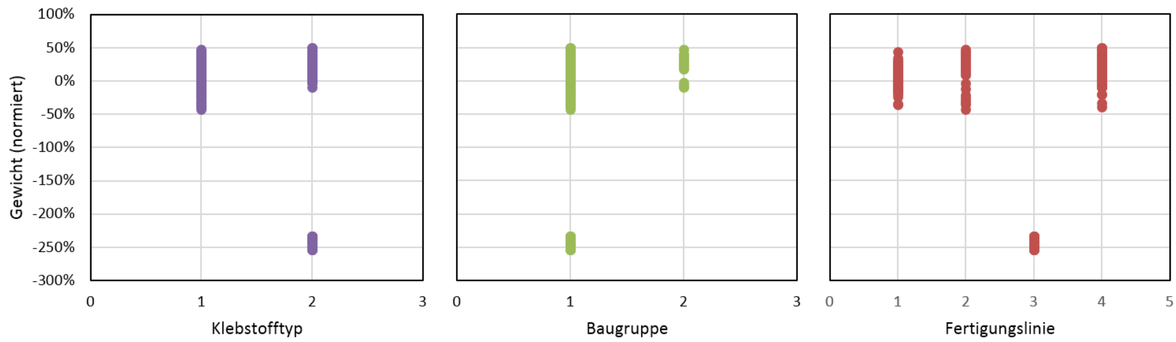



Abbildung 48: Klebstoffgewicht stratifiziert nach Klebstofftyp, Baugruppe und Fertigungslinie

Ohne Fertigungslinie 3 ergeben sich folgende Diagramme:

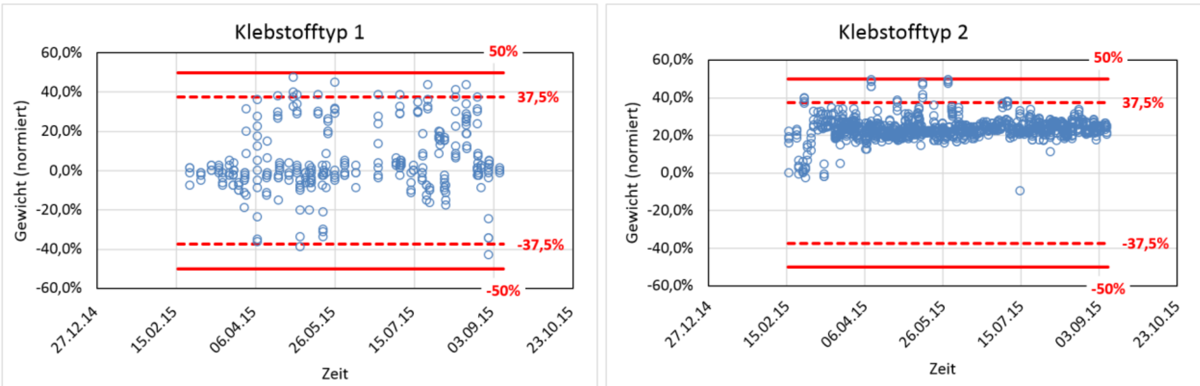



Abbildung 49: Zeitreihendiagramme „Klebstoffgewicht“ (Fertigungslinie 3 ausgeblendet)

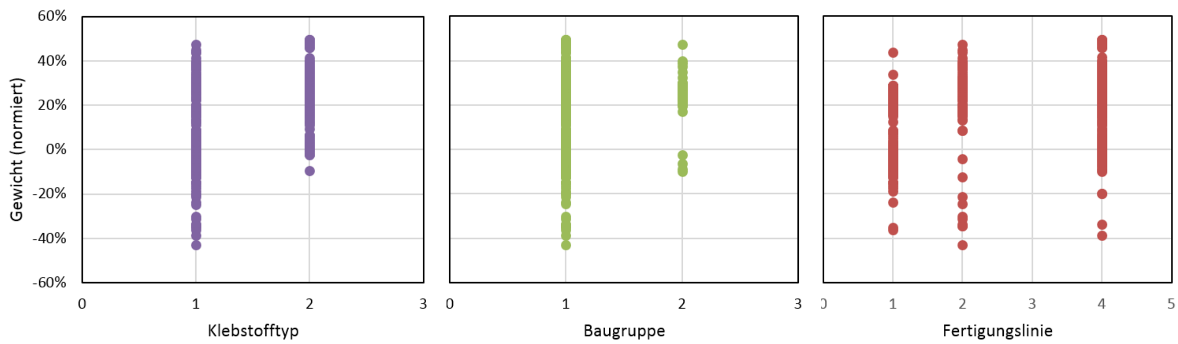



Abbildung 50: Klebstoffgewicht stratifiziert (Fertigungslinie 3 ausgeblendet)

Die stratifizierten Daten zeigen, dass die Fertigungslinien 1, 2 und 4 Ergebnisse mit ähnlicher Prozesslage und Streubreite liefern, so dass insofern kein Einwand gegen das Zusammenfassen in einer Gruppe besteht. Auch bzgl. Klebstofftyp und Baugruppen sind die Streubreiten ähnlich, so dass insoweit zumindest keine schwerwiegenden Einwände gegen die Gruppierung bestehen. Empfehlenswert wäre zu untersuchen, ob sich bei Klebstofftyp 1 die Streubreite reduzieren und bei Klebstofftyp 2 die Prozesslage wieder besser zentrieren lässt, die sich im Vergleich zur anfänglich guten Zentrierung während der ersten 30 Produktionstage deutlich verschoben hat.

> *ANMERKUNG: Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass dieses Beispiel lediglich das prinzipielle Vorgehen illustriert. In der Praxis sind meist weitergehende Analysen und ggf. Maßnahmen erforderlich.*

**Beispiel 2: Nutzung von Mittelwerten und Standardabweichungen**

Mittelwert und Standardabweichung sind Kenngrößen, die in der Regel immer ermittelt werden können, wenn mehrere Messwerte vorliegen. Sie werden deshalb häufig genutzt, um zumindest eine erste Grobbewertung durchzuführen.

Beim folgenden Praxisbeispiel liegen zum Merkmal „Abreißkraft Bonddraht" insgesamt $n > 8000$ Messwerte von Erzeugnisteilen mit $m = 13$ verschiedenen Sachnummern vor. Die einzelnen Sachnummern sind mit sehr unterschiedlicher Anzahl Messwerte im Datenbestand vertreten.

Die beiden Kenngrößen werden getrennt nach Sachnummern (Metadaten) ermittelt und die jeweiligen Standardabweichungen (y-Werte) über den jeweils zugehörigen Mittelwerten (x-Werte) aufgetragen. Häufig visualisiert ein solches Diagramm „Auffälligkeiten" bereits eindeutig, so dass keine weiteren Berechnungen erforderlich sind.

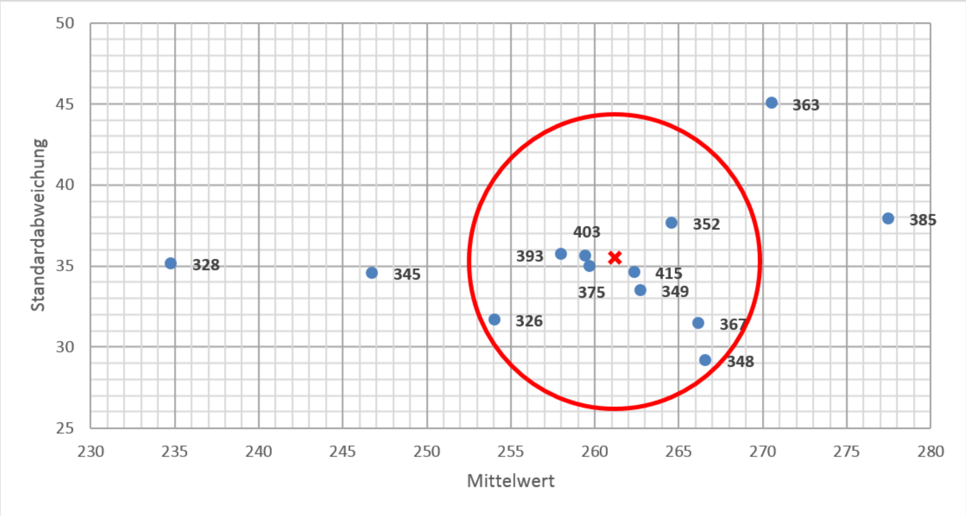



Abbildung 51: Visualisierung der Gruppierbarkeit anhand von Mittelwerten und Standardweichungen

*Jeder Datenpunkt ist mit der zugehörigen (in diesem Beispiel dreistelligen) Sachnummer bezeichnet.*

Eine Möglichkeit, quantitativ vorzugehen, besteht darin, den *totalen* Mittelwert $\bar{x}$ und die *totale* Standardabweichung s aller Messwerte zu berechnen. Der Datenpunkt $(\bar{x}; s)$ repräsentiert den Mittel- oder Schwerpunkt aller Datenpunkte $(\bar{x}_i; s_i)$. Der radiale Abstand

$$r_i = \sqrt{(\bar{x}_i - \bar{x})^2 + (s_i - s)^2}$$

eines Datenpunktes i zu diesem Mittelpunkt kann als quantitatives Maß für seine „Auffälligkeit" genutzt werden. Im vorliegenden Fall ergeben sich die größten Abstände für die Datenpunkte der Sachnummern 328, 345, 363 und 385. Dies war anhand des Diagramms bereits auf rein visueller Basis zu erwarten.

*ANMERKUNG: Die Grundidee dieses Vorgehens entspricht einer Cluster-Analyse, allerdings in extrem vereinfachter Form. Entscheidungsbasis für die Zugehörigkeit zum Cluster (Maximalabstand für die Einbeziehung von Datenpunkten, d. h. der Radius des Kreises um den Schwerpunkt der Datenpunkte) war im vorliegenden Fall auch nicht Statistik, sondern Plausibilität.*

Im nächsten Schritt sollten die technischen Ursachen dieser „Auffälligkeiten" ermittelt, deren Auswirkungen auf das Gesamtergebnis bewertet und entschieden werden, ob Teile mit entsprechenden Sachnummern für die Gruppierung geeignet sind oder nicht.

## I.3 %T-Ansatz: Fall D

Bei weniger als $n = 25$ Messwerten kann die Qualitätsfähigkeit über den Grad der Toleranzausnutzung %T beurteilt werden. Dies ist jedoch nur unter folgenden Voraussetzungen sinnvoll und zulässig:

- 100 %-Prüfung ist grundsätzlich nicht möglich (zerstörende Prüfung, hohe Stückkosten, extrem lange Messzeiten);
- Prozessvisualisierung bis genügend Teile zur Verfügung stehen, um zumindest eine statistische Auswertung nach Tabelle 5 (Fall A bis C) durchzuführen oder Fähigkeiten nach Kapitel 8 zu ermitteln.

Die auf die jeweilige Toleranz T bezogenen Abweichungen %x der Einzelmesswerte vom jeweiligen Sollwert (Berechnung siehe Anhang I.2.1) werden in diesem Fall **nicht** zur Berechnung statistischer Kenngrößen wie Fähigkeits- und Leistungsindizes herangezogen. Stattdessen werden die %x-Einzelwerte anhand des Kriteriums bewertet, ob bei vernachlässigbarer Messunsicherheit U alle %x-Werte

- bei zweiseitig begrenzten Merkmalen im Bereich -37,5 % bis +37,5 %
- und bei null-begrenzten Merkmalen im Bereich 0 % bis 75 %

liegen, so dass maximal 75 % des Toleranzintervalls T genutzt werden. Dieser 12,5 %- bzw. 25 %-Abstand zur Spezifikationsgrenze reduziert das Risiko *bis zu einem gewissen Grad*, dass der Prozess im Zeitintervall zwischen zwei Prüfungen Teile außerhalb der Toleranz produziert. Es wird jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass dies lediglich eine plausible, aber keinesfalls eine statistisch abgesicherte Risikoreduzierung darstellt: Der %T-Ansatz ist eine reine **Visualisierungsmethode**, die lediglich einen Schnappschuss der aktuellen Situation liefert und keine Prognose des zukünftigen Prozessverhaltens auf statistischer Basis erlaubt.

*ANMERKUNG 1: Die Toleranzausnutzung kann auf weniger als 75 % beschränkt werden, z. B. 60 %. In diesem Fall müssen die %x-Einzelwerte im Bereich -30 % bis +30 % (zweiseitig begrenzt) bzw. 0 bis 60 % (null-begrenzt) liegen. Dies trägt u. U. zur weiteren Risikoreduzierung bei.*

*ANMERKUNG 2: Die Berücksichtigung der Messunsicherheit U des Prüfmittels kann entfallen, wenn diese kleiner als 10 % der kleinsten mit diesem Prüfmittel zu prüfenden Toleranz ist.*

*ANMERKUNG 3: Stichprobennahme und -intervall müssen dem beobachteten (oder zu erwartenden) Prozessverhalten, der Bedeutung der betrachteten Merkmale und dem damit verbundenen Prüfaufwand angemessen sein.*

*ANMERKUNG 4: Es ist nicht zulässig, eine Auswertung nach dem %T-Ansatz nur dadurch zu erreichen oder zu begründen, dass trotz ausreichender Losgröße nur wenige Teile vermessen werden.*

*ANMERKUNG 5: Aussagen zur Qualitätsfähigkeit eines Prozesses auf Basis der relativen Toleranzausnutzung %T sind mit „klassischen" Fähigkeitsaussagen auf Basis statistischer Fähigkeitskennwerte grundsätzlich **nicht** vergleichbar. Vergleichende Aussagen zu Fähigkeitskenngrößen sind nur dann sinnvoll und zulässig, wenn diese mit dem gleichen Verfahren ermittelt wurden.*

*ANMERKUNG 6: Das Akzeptanzkriterium %x ≤ 75 % erscheint mit Blick auf den Grenzwert 1,33 statistischer Kenngrößen wie $C_p$ und $C_{pk}$ zwar plausibel, da dieser Grenzwert ebenfalls über 75 % Toleranzausnutzung definiert ist. Im diametralen Unterschied zum **nicht** statistischen %T-Ansatz wird hier allerdings über ein Verteilungsmodell statistisch abgesichert, dass 99,73 % der Prozessergebnisse innerhalb des 75 %-Toleranzintervalls zu erwarten sind. Das ist beim %T-Ansatz in keiner Weise gewährleistet.*

# J Fähigkeitskennwerte bei diskreten Merkmalen

Die Ermittlung von Fähigkeitskenngrößen wie $C_p$ und $C_{pk}$ nach Kapitel 8 setzt ein messbares Merkmal voraus. Ein solches Merkmal kann prinzipiell jeden beliebigen Wert annehmen und wird deshalb als kontinuierliches Merkmal bezeichnet. Messergebnisse werden nur durch den Messbereich und die Auflösung des verwendeten Messsystems begrenzt.

Es gibt jedoch Prozesse, bei denen diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Beispielsweise können bei der Platinenbestückung oder bei Lötprozessen Fehler auftreten, die lediglich *gezählt*, aber nicht im eigentlichen Sinn *gemessen* werden können, z. B. Bestückungsfehler (falsches oder fehlendes Bauteil, falsche Bauteilorientierung) oder Lötfehler (kalte Lötstelle, Kurzschluss, fehlende Kontaktierung). Man bezeichnet eine solche Eigenschaft (z. B. Lötfehler) als attributives Merkmal, das häufig nur zwei Ausprägungen besitzt (z. B. vorhanden, nicht vorhanden). Das Zählergebnis für ein solches attributives Merkmal über mehrere Teile wird als diskretes Merkmal bezeichnet (z. B. 10 Teile fehlerhaft), dessen Ausprägung sich nur in ganzzahligen Schritten ändern kann, d. h. *diskret* (siehe auch [Heft 2]).

[ISO 22514-5] stellt einen Lösungsansatz bereit, der es erlaubt, auch in solchen Fällen einen Fähigkeits- oder Leistungskennwert anzugeben. Dabei wird der Anteil $\hat{p} = \frac{k}{n}$ der auf den Stichprobenumfang n bezogenen Anzahl fehlerhafter Teile k in einer Stichprobe als Schätzer für die Wahrscheinlichkeit p verwendet, fehlerhafte Teile in der Stichprobe zu finden. Im Unterschied zu einigen älteren Ansätzen bezieht [ISO 22514-5] den Vertrauensbereich $p_L \leq \hat{p} \leq p_U$ dieses Schätzers in die Betrachtung ein, wobei $p_L$ und $p_U$ die untere *(en. **l**ower)* bzw. obere *(en. **u**pper)* Vertrauensgrenze zu einem bestimmten Vertrauensniveau $1 - \alpha$ bezeichnen. Da Fehlerraten nicht kleiner als 0 werden können, ist nur die obere Vertrauensgrenze $p_U$ relevant. $p_U$ liefert den statistisch ungünstigsten Fall für $\hat{p}$ und wird deshalb anstelle von $\hat{p}$ für die weiteren Berechnungen verwendet.

Merkmale mit zwei Ausprägungen gehören zu den häufigsten Fällen, die in der Praxis auftreten, und können meist durch die Binomialverteilung beschrieben werden. Die *exakten* Vertrauensgrenzen für den Parameter p der Binomialverteilung werden mit Hilfe der Beta-Verteilung ermittelt:

$$p_U = Beta^{-1}(1 - \alpha; k + 1; n - k)$$

$Beta^{-1}$ bezeichnet die Umkehrfunktion der Beta-Verteilung [18] und liefert die Quantile zu bestimmten Wahrscheinlichkeiten $1 - \alpha$. Bei dieser Berechnungsart repräsentiert $p_U$ die obere Grenze des sogenannten *Clopper-Pearson-Intervalls*.

> *ANMERKUNG 1: [ISO 22514-5] sieht im Fall $k > 0$ einen Näherungsansatz auf Basis der Normalverteilung zur Berechnung von $p_U$ vor (auch als „Standardintervall" oder „Waldintervall" bekannt). Die Anwendbarkeit dieser Näherung wird in der Literatur jedoch häufig auf den Bereich $k \geq 50$ und $n - k \geq 50$ beschränkt und kann sich sogar in diesem Bereich als problematisch erweisen. Für den primär praxisrelevanten Bereich $0 \leq k \leq 2$ ist die Näherung demnach nicht zweifelsfrei geeignet. Deshalb wird hier nur der exakte Ansatz dargestellt (Clopper-Pearson-Intervall), der auch im häufigen Fall $k = 0$ (kein fehlerhaftes Teil in der Stichprobe) anwendbar ist.*

Zur Ermittlung eines Kennwertes wird $p_U$ als Schätzer für den Überschreitungsanteil einer Normalverteilung betrachtet. Entsprechend ist $1 - p_U$ die Wahrscheinlichkeit für Stichproben ohne fehlerhafte Teile. Das Quantil $u_{1-p_U}$ der Standardnormalverteilung repräsentiert die Grenze dieses fehlerfreien Bereiches und wird analog einer einseitig oberen Spezifikationsgrenze verwendet.

Der Abstand zur Mittenposition $\mu = 0$ der Standardnormalverteilung ergibt bei Bezug auf deren halbe Streubreite $3\,\sigma$ wegen $\sigma = 1$ nach den Standardberechnungsvorschriften den Fähigkeits- bzw. Leistungskennwert

$$\begin{matrix} C_{pk} \\ P_{pk} \end{matrix} = \frac{u_{1-p_u} - \hat{\mu}}{3 \cdot \sigma} = \frac{u_{1-p_u}}{3}$$

[18] Berechnung z. B. mittels EXCEL-Arbeitsblattfunktion = BETA.INV(1−α; k+1; n−k)

Sofern keine Regelkarte geführt wird, ist eine zweifelsfreie Bewertung der Prozessstabilität meist nicht möglich. In diesem Fall sollte der ermittelte Kennwert als Prozessleistung betrachtet und mit $P_{pk}$ bezeichnet werden.

Tabelle 7 enthält einige ausgewählte Ergebnisse für $p_U$ und $P_{pk}$ bei $k = 0$, $k = 1$ und $k = 2$ fehlerhaften Teilen in der Stichpobe und Vertrauensniveau 95 % (bei einseitig oben begrenztem Merkmal) in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n. Die Abbildung 52 stellt diese Ergebnisse grafisch dar.

| Stichproben-umfang n | Vertrauens-grenze $p_U$ (k = 0) | Leistungs-index $P_{pk}$ | Vertrauens-grenze $p_U$ (k = 1) | Leistungs-index $P_{pk}$ | Vertrauens-grenze $p_U$ (k = 2) | Leistungs-index $P_{pk}$ |
|---:|---:|---:|---:|---:|---:|---:|
| 5 | 45,1 % | 0,04 | 65,7 % | 0,00 | 81,1 % | 0,00 |
| 6 | 39,3 % | 0,09 | 58,2 % | 0,00 | 72,9 % | 0,00 |
| 7 | 34,8 % | 0,13 | 52,1 % | 0,00 | 65,9 % | 0,00 |
| 8 | 31,2 % | 0,16 | 47,1 % | 0,02 | 60,0 % | 0,00 |
| 9 | 28,3 % | 0,19 | 42,9 % | 0,06 | 55,0 % | 0,00 |
| 10 | 25,9 % | 0,22 | 39,4 % | 0,09 | 50,7 % | 0,00 |
| 20 | 13,9 % | 0,36 | 21,6 % | 0,26 | 28,3 % | 0,19 |
| 30 | 9,5 % | 0,44 | 14,9 % | 0,35 | 19,5 % | 0,29 |
| 40 | 7,2 % | 0,49 | 11,3 % | 0,40 | 14,9 % | 0,35 |
| 50 | 5,8 % | 0,52 | 9,1 % | 0,44 | 12,1 % | 0,39 |
| 60 | 4,9 % | 0,55 | 7,7 % | 0,48 | 10,1 % | 0,42 |
| 70 | 4,2 % | 0,58 | 6,6 % | 0,50 | 8,7 % | 0,45 |
| 80 | 3,7 % | 0,60 | 5,8 % | 0,52 | 7,7 % | 0,48 |
| 90 | 3,3 % | 0,61 | 5,2 % | 0,54 | 6,8 % | 0,50 |
| 100 | 3,0 % | 0,63 | 4,7 % | 0,56 | 6,2 % | 0,51 |
| 200 | 1,5 % | 0,72 | 2,3 % | 0,66 | 3,1 % | 0,62 |
| 300 | 1,0 % | 0,78 | 1,6 % | 0,72 | 2,1 % | 0,68 |
| 400 | 0,7 % | 0,81 | 1,2 % | 0,75 | 1,6 % | 0,72 |
| 500 | 0,6 % | 0,84 | 0,9 % | 0,78 | 1,3 % | 0,75 |
| 600 | 0,5 % | 0,86 | 0,8 % | 0,80 | 1,0 % | 0,77 |
| 700 | 0,4 % | 0,88 | 0,7 % | 0,82 | 0,9 % | 0,79 |
| 800 | 0,4 % | 0,89 | 0,6 % | 0,84 | 0,8 % | 0,81 |
| 900 | 0,3 % | 0,90 | 0,5 % | 0,85 | 0,7 % | 0,82 |
| 1.000 | 0,3 % | 0,92 | 0,5 % | 0,86 | 0,6 % | 0,83 |
| 2.000 | 0,1 % | 0,99 | 0,2 % | 0,94 | 0,3 % | 0,91 |
| 5.000 | 0,1 % | 1,08 | 0,1 % | 1,04 | 0,1 % | 1,01 |
| 10.000 | 0,030 % | 1,14 | 0,047 % | 1,10 | 0,063 % | 1,08 |
| 20.000 | 0,015 % | 1,21 | 0,024 % | 1,16 | 0,031 % | 1,14 |
| 50.000 | 0,006 % | 1,28 | 0,009 % | 1,24 | 0,013 % | 1,22 |
| 100.000 | 0,003 % | ***1,34*** | 0,005 % | 1,30 | 0,006 % | 1,28 |
| 200.000 | 0,001 % | 1,39 | 0,002 % | ***1,36*** | 0,003 % | ***1,33*** |
| 500.000 | 0,001 % | 1,46 | 0,001 % | 1,43 | 0,001 % | 1,40 |

Tabelle 7: Vertrauensgrenze und Leistungsindex in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang
*(Vertrauensniveau 95 %, k = 0, 1, 2 fehlerhafte Teile in der Stichprobe)*

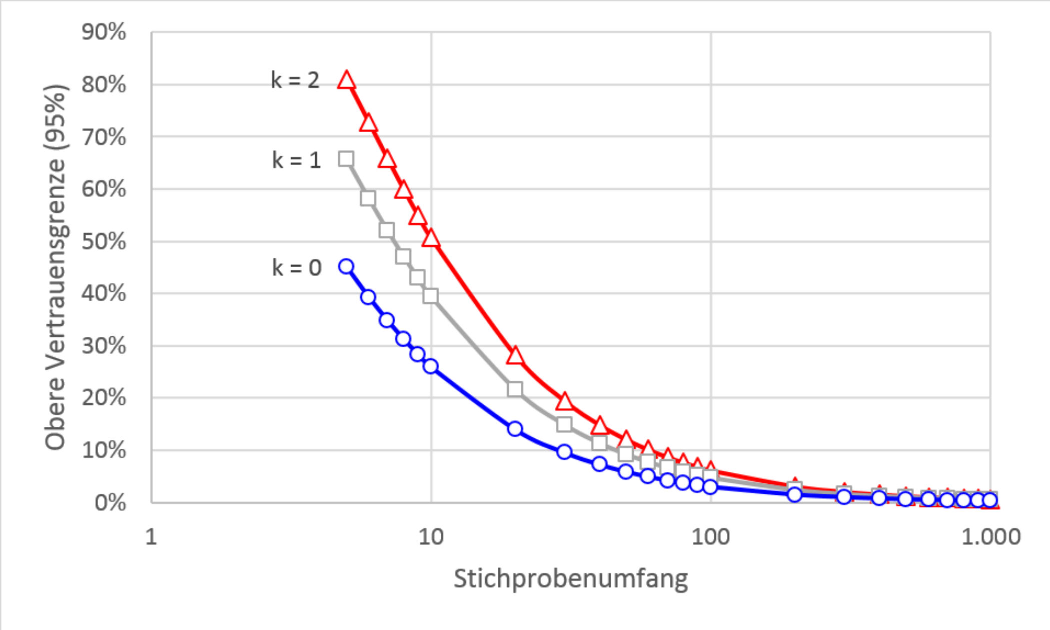



Abbildung 52: Obergrenze des Clopper-Pearson-Intervalls in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang

*(Vertrauensniveau 95 %, k = 0 … 2 fehlerhafte Teile in der Stichprobe)*

**Bewertung des Prozesses**

Tabelle 7 zeigt, dass Stichprobenumfänge der Größenordnung $n = 100.000$ und mehr erforderlich wären, um $P_{pk} = 1{,}33$ auf Vertrauensniveau 95 % statistisch nachzuweisen. Dies ist in der Praxis normalerweise nicht umsetzbar.

Auf Basis realistischerer Stichprobenumfänge bis in die Größenordnung von höchstens einigen hundert Teilen ist jedoch bestenfalls $P_{pk} = 0{,}6$ bis $P_{pk} = 0{,}85$ erreichbar.

*BEISPIEL: Stichprobe mit n = 200 Teilen und k = 0 fehlerhaften Teilen*

*Nach Tabelle 7 resultiert die Prozessleistung $P_{pk}$ = 0,72 auf Vertrauensniveau 95 %. Dies bedeutet, dass der Prozess mit 95 % Wahrscheinlichkeit **höchstens** 1,5 % fehlerhafte Teile liefert. Dies bedeutet aber auch, dass der Prozess **möglicherweise** sehr viel weniger fehlerhafte Teile liefert, was jedoch statistisch nicht nachgewiesen ist.*

*Würde man den Stichprobenumfang beispielsweise auf n = 600 Teile vergrößern und k = 0 fehlerhafte Teile finden, wäre statistisch nachgewiesen, dass der Prozess mit 95 % Wahrscheinlichkeit **höchstens** 0,5 % fehlerhafte Teile liefert ($P_{pk}$ = 0,86), bei k = 1 **höchstens** 0,8 % ($P_{pk}$ = 0,80) und bei k = 2 **höchstens** 1 % ($P_{pk}$ = 0,77). Dies bedeutet aber wiederum auch, dass der Prozess **möglicherweise** sehr viel weniger als 0,5 % bzw. 0,8 % bzw. 1 % fehlerhafte Teile liefert, was aber statistisch nicht nachgewiesen ist.*

Das Beispiel zeigt, dass die formale Erfüllung eines Kriteriums wie $P_{pk} \geq 1{,}33$ bei diskreten Merkmalen wirtschaftlich kaum möglich und sachlich nicht unbedingt sinnvoll ist. Stattdessen wird empfohlen, ähnlich wie bei Stichprobenplänen eine „vertretbare" Anzahl fehlerhafter Teile festzulegen, die der Prozess höchstens unentdeckt liefern darf, und dementsprechend den Stichprobenumfang festzulegen. Dieses Vorgehen ist durch nationale oder internationale Normen oder Richtlinien allerdings nicht abgesichert und muss deshalb im Einzelfall mit internen oder externen Kunden abgestimmt werden.

*ANMERKUNG 2: [ISO 22514-5] bezeichnet im Fall k > 0 die Anzahl fehlerhafter Teile bezogen auf den Stichprobenumfang als Qualitätslage $Q_P$ des Prozesses und verwendet $Q_P$ im Sinne einer Kenngröße. Bei Einsatz von Regelkarten kann eine mittlere Qualitätslage $Q_P$ aus den Werten der Regelkarte ermittelt werden. Dies ist nicht konsistent mit dem Vorgehen im Fall k = 0, bei dem die obere Vertrauensgrenze als Qualitätslage $Q_P$ verwendet wird, so dass k = 0 in der Regel zu einer ungünstigeren Qualitätslage $Q_P$ führt als k > 0. Aufgrund dieser Inkonsistenz wird die Verwendung des Begriffes „Qualitätslage" nicht empfohlen.*

# K Einseitig begrenzte Merkmale

In Zusammenhang mit der CDQ 0301 und auch mit den Verfahren des vorliegenden Hefts und des Hefts Nr. 10 kommt oft die Frage auf, was ein „einseitig begrenztes Merkmal“ ist. Die einschlägigen Normen zum Qualitätsmanagement und statistischen Begriffen enthalten derzeit offenbar keine entsprechende Definition.

Typischerweise handelt es sich bei den einseitig begrenzten Merkmalen um geometrische Merkmale wie Geradheit, Rundheit, Ebenheit, Zylinderform, Parallelität, Rechtwinkligkeit, Neigung, und Rundlauf. Dies sind Beispiele für Merkmale der Form, der Richtung, des Orts oder des Laufs, deren Tolerierung in der ISO 1101 beschrieben ist. Sie sind z. B. über den Abstand von einem Bezugspunkt, einer Bezugsgeraden oder einer Bezugsfläche definiert. Solche Beträge von Abständen oder Abweichungen können aufgrund der mathematischen Bedeutung des Worts „Betrag“ (Absolutbetrag, Absolutwert) nur Werte größer oder gleich null annehmen. Der Betrag ist der (nichtnegative) Abstand zur Zahl Null.

Es geht darum, dass die Entwicklung nur eine Untergrenze oder nur eine Obergrenze festgelegt hat die z. B. konstruktiv bedingt notwendig ist. Dann ist keine Toleranz T definiert. Zur Berechnung der kritischen Indizes für „Einseitig begrenzte Merkmale“ siehe den entsprechenden Abschnitt in 8.1.

Bei einem nullbegrenzten Merkmal muss der Zielwert nicht zwingend null sein. Die Rautiefe Rz ist ein nullbegrenztes Merkmal; allerdings kann es wegen der erwünschten Ölhaftung für Gleitflächen notwendig sein, sowohl eine Untergrenze größer null als auch eine Obergrenze anzugeben.

**Natürlich begrenzte Merkmale**

Oft findet man als Ergänzung zur Formulierung „einseitig unten/oben begrenztes Merkmal“ in der Literatur den Hinweis „physikalisch bedingt“ oder „technologisch bedingt“ in Klammern.

Das ist aber nicht immer richtig. Die Konzentration einer chemischen Lösung etwa, also eines Stoffgemischs, kann nur zwischen 0 und 1 liegen. Der Grund dafür ist nicht die Physik oder Chemie oder die Technologie, sondern die Definition der Konzentration als Quotient (siehe unten). So gesehen ist das Wort "natürlich" im Sinne von „definitionsgemäß“, "naturgegeben" oder „durch die Natur gegeben“ neutral, ohne sich auf ein Fachgebiet oder eine Skala zu beziehen.

Ein natürlich begrenztes Merkmal hat bereits aufgrund seiner Definition eine Untergrenze, die ein ermittelter Wert dieses Merkmals nicht unterschreiten oder eine Obergrenze, die der Wert nicht überschreiten kann. Auch beide Grenzen können definitionsbedingt gegeben sein.

Vermutlich denkt beim Begriff „natürlich begrenztes Merkmal“ zunächst kaum jemand daran, dass physikalische Basisgrößen wie Länge, Masse, Zeit Gewicht, Kraft, Stromstärke, Temperatur (in Kelvin), Stoffmenge und Lichtstärke oder daraus abgeleitete Größen wie Fläche, Volumen, Dichte, Druck, Drehmoment oder Geschwindigkeit nicht kleiner null werden können. Das gilt ebenso für die elektrischen Größen Spannung, Widerstand und Frequenz.

Sie „verstecken“ sich oft hinter technischen Bezeichnungen wie Höhe, Breite, Tiefe, Abstand (von Objekten), Durchmesser (von Objekten, Bohrungen), Schichtdicke (von Beschichtungen), Rauheit (von Oberflächen) Abreißkraft/Zugfestigkeit (von Drähten oder Klebeverbindungen), Berstdruck (von Membranen), Haftfestigkeit (von Beschichtungen, Lacken), Weiterdrehmoment oder Losbrechmoment (von Schraubverbindungen), elektrische Durchschlagsfestigkeit/ Spannungsfestigkeit (von Isolatoren), Dauer, Laufzeit, zeitliche Differenz, zeitlicher Abstand (elektrischer, optischer, akustischer Signale).

**Natürlich zweiseitig begrenzte Merkmale**

Die Werte von Merkmalen, die als Verhältnisse (Quotienten, Brüche) definiert sind, werden meist in Prozent (%), Promille (‰), parts per million (ppm) oder parts per billion (ppb) angegeben. Beispiele sind

- der Materialanteil Rmr eines Oberflächenprofils bei definierter Schnitthöhe
- die Konzentration oder Reinheit (Anteile in Festkörpern, Flüssigkeiten, Gasen): Quotient von Massen, Volumina, Stoffmengen oder Teilchenzahlen
- der Wirkungsgrad (mechanischer oder elektrischer Maschinen/Geräte)
- der Reflexionsgrad (das Reflexionsvermögen von Oberflächen): Verhältnis von reflektierter und einfallender Intensität

Weitere Gründe für natürliche Grenzen können festgelegte Prüfverfahren und vorgegebene Skalen sein, z. B. im Falle des Härtegrads (mechanischer Widerstand gegenüber dem Eindringen eines Prüfkörpers in einen Werkstoff) oder des pH-Werts.

# Symbolverzeichnis

| | |
|---|---|
| $\%GRR$ | Gesamtstreubreite eines Messprozesses bezogen auf die Toleranz des Merkmals oder auf die Gesamtstreubreite des Fertigungsprozesses *(MSA, Verfahren 2 und 3)* |
| $c_4$ | Faktor zur Ermittlung von $\hat{\sigma}$ aus der mittleren Standardabweichung $\bar{s}$ *(in älterer Literatur auch mit $a_n$ bezeichnet)* |
| $C_g$, $C_{gk}$ | potentieller und kritischer Messprozessfähigkeitsindex *(MSA, Verfahren 1)* |
| $C_m$, $C_{mk}$ | potentieller und kritischer Maschinenfähigkeitsindex |
| $C_p$, $C_{pk}$ | potentieller und kritischer Prozessfähigkeitsindex *(Langzeit)* |
| $C_{p-ST}$, $C_{pk-ST}$ | potentieller und kritischer Prozessfähigkeitsindex *(Kurzzeit, engl. **s**hort **t**erm)* |
| $d_2$ | Faktor zur Ermittlung von $\hat{\sigma}$ aus der mittleren Spannweite $\bar{R}$ |
| $i$ | Nummer (Index) des Messwertes innerhalb einer Stichprobe; $1 \leq i \leq n$ |
| $j$ | Nummer (Index) des Messwertes innerhalb aller Messwerte; $1 \leq j \leq m \cdot n$ |
| $k$ | Nummer (Index) der Stichprobe innerhalb aller Stichproben; $1 \leq k \leq m$ |
| $LCL$ | untere Eingriffsgrenze *(engl. **L**ower **C**ontrol **L**imit)* |
| $LL$ | untere Spezifikationsgrenze, Mindestwert *(engl. **L**ower **L**imit)* |
| $m$ | Anzahl Stichproben |
| $n$ | Anzahl Messwerte je Stichprobe *(Stichprobenumfang)* oder in einer Wertemenge |
| n′ | Anzahl Teile *(wenn abweichend von $n$)* |
| $P_m$, $P_{mk}$ | potentieller und kritischer Maschinenleistungsindex *(nach ISO 22514-3 anstelle von $C_m$ und $C_{mk}$)* |
| $P_p$, $P_{pk}$ | potentieller und kritischer Prozessleistungsindex *(Langzeit)* |
| $P_{p-ST}$, $P_{pk-ST}$ | potentieller und kritischer Prozessleistungsindex *(Kurzzeit, engl. **s**hort **t**erm)* |
| $p_L$ | untere Vertrauensgrenze *(engl. **l**ower confidence limit)* |
| $p_U$ | obere Vertrauensgrenze *(engl. **u**pper confidence limit)* |
| $R$ | Spannweite einer Wertemenge |
| $R_k$ | Spannweite der Stichprobe Nr. $k$ |
| $\bar{R}$ | Mittelwert von Spannweiten |
| $s$ | empirische Standardabweichung |
| $s_{total}$ | Standardabweichung aller Einzelwerte |
| $s_{\bar{x}}$ | Standardabweichung der Mittelwerte von $m$ Stichproben |
| $\bar{s}$ | mittlere Standardabweichung aus m Stichproben gleicher Größe |
| $\overline{s^2}$ | mittlere Varianz; Mittelwert quadrierter Standardabweichungen |
| $\sigma$ | Standardabweichung der Grundgesamtheit |
| $\hat{\sigma}$ | Schätzwert für die Standardabweichung der Grundgesamtheit |
| $T$ | Toleranz eines Merkmals |
| $u_{1-p}$ | Quantil der Standardnormalverteilung zur Wahrscheinlichkeit $1 - p$ |
| $UCL$ | obere Eingriffsgrenze *(engl. **U**pper **C**ontrol **L**imit)* |
| $UL$ | obere Spezifikationsgrenze, Höchstwert *(engl. **U**pper **L**imit)* |

| | |
|---|---|
| $x_i$ | Einzelwert Nr. $i$ einer Wertemenge |
| $x_{ik}$ | Einzelwert Nr. $i$ in Stichprobe Nr. $k$ |
| $x_{max}$ | größter Einzelwert einer Wertemenge *(Maximum)* |
| $x_{min}$ | kleinster Einzelwert einer Wertemenge *(Minimum)* |
| $\bar{x}$ | arithmetischer Mittelwert |
| $\bar{x}_k$ | arithmetischer Mittelwert der Einzelwerte in Stichprobe Nr. $k$ |
| $\bar{\bar{x}}$ | Mittelwert von Mittelwerten |
| $\tilde{x}$ | Median *(Zentralwert)* |
| $\tilde{x}_k$ | Median der Einzelwerte in Stichprobe Nr. $k$ |
| $\bar{\tilde{x}}$ | Mittelwert von Medianen |
| $\hat{X}_{0{,}135\,\%}$ | Schätzwert für das 0,135 %-Quantil der Werteverteilung der Grundgesamtheit |
| $\hat{X}_{50\,\%}$ | Schätzwert für das 50 %-Quantil der Werteverteilung der Grundgesamtheit |
| $\hat{X}_{99{,}865\,\%}$ | Schätzwert für das 99,865 %-Quantil der Werteverteilung der Grundgesamtheit |

Weitere, nur in einzelnen Kapiteln verwendete Symbole oder die Verwendung der Symbole mit abweichenden Bedeutungen werden im jeweiligen Zusammenhang definiert.

| | Heft 9 *(2005)* | DIN 55319 *(zurück-gezogen)* | ISO 21747 *(zurück-gezogen)* | qs-STAT *(Stand 06/2016)* | ISO 22514 | Heft 9 *(2016)* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **U**nterer **G**renz**w**ert<br>**U**ntere **S**pezifikations**g**renze<br>*(engl. **l**ower limit)* | $UGW$ | $L$ | $L$ | $USG$ | $L$ | $LL$ |
| **O**berer **G**renz**w**ert<br>**O**bere **S**pezifikations**g**renze<br>*(engl. **u**pper limit)* | $OGW$ | $U$ | $U$ | $OSG$ | $U$ | $UL$ |
| **U**ntere **E**ingriffs**g**renze<br>*(engl. **l**ower **c**ontrol **l**imit)* | $UEG$ | – | – | $UEG$ | – | $LCL$ |
| **O**bere **E**ingriffs**g**renze<br>*(engl. **u**pper **c**ontrol **l**imit)* | $OEG$ | – | – | $OEG$ | – | $UCL$ |
| Unteres Quantil<br>(0,135 %) | $\hat{Q}_{0{,}00135}$ | $\hat{Q}_{0{,}00135}$ | $X_{0{,}135\,\%}$ | $Q_{un\,3}$ | $X_{0{,}135\,\%}$ | $X_{0{,}135\,\%}$ |
| Oberes Quantil<br>(99,865 %) | $\hat{Q}_{0{,}99865}$ | $\hat{Q}_{0{,}99865}$ | $X_{99{,}865\,\%}$ | $Q_{ob\,3}$ | $X_{99{,}865\,\%}$ | $X_{99{,}865\,\%}$ |

Tabelle 8: Varianten gebräuchlicher Symbole und Abkürzungen

# Begriffe

*HINWEIS 1: Die nachstehenden Begriffsdefinitionen wurden den jeweils zitierten Normen und Richtlinien entnommen. Zugehörige Anmerkungen wurden nur in Einzelfällen übernommen, wenn sie für das Verständnis eines Begriffes als unmittelbar relevant und/oder unverzichtbar bewertet wurden. Ansonsten wird bzgl. Anmerkungen und Beispielen auf die jeweilige Norm bzw. Richtlinie verwiesen.*

*HINWEIS 2: „Redaktionelle Anmerkungen" sind **kein** Bestandteil der jeweiligen Norm oder Richtlinie.*

*HINWEIS 3: Es werden hauptsächlich die Begriffsdefinitionen nach [ISO 22514-1], [ISO 3534-2], [ISO 3534-1], [ISO 9000] und [VIM] verwendet. In einigen Fällen wird derselbe Begriff mit mehreren Definitionen aus verschiedenen Normen bzw. Richtlinien aufgeführt, sofern die Definitionen nicht vollständig konsistent erscheinen.*

*HINWEIS 4: Begriffe, deren Definitionen in der Zusammenstellung enthalten sind, werden bei Verwendung in Definitionen anderer Begriffe fett dargestellt.*

**Anforderung** *(engl. requirement)*

Erfordernis oder Erwartung, das oder die festgelegt, üblicherweise vorausgesetzt oder verpflichtend ist [ISO 9000, 3.6.4]

**Anzeige** *(engl. indication)*

Von einem **Messgerät** oder **Messsystem** gelieferter **Größenwert** [VIM, 4.1]

**Auflösung** *(engl. resolution)*

Kleinste Änderung einer **Messgröße**, die in der entsprechenden **Anzeige** eine merkliche Änderung verursacht [VIM, 4.14]

**Auswahleinheit** *(engl. sampling unit)*

Einer der einzelnen Teile, in die eine **Grundgesamtheit** gegliedert ist [ISO 3534-1, 1.2]

**Beherrschter Prozess** *(engl. Übersetzung von DIN 55350-11 nicht verfügbar)*

Prozess, dessen wesentliche Merkmale **beherrschte Prozessmerkmale** sind [DIN 55350-11, 3.11.2]

**Beherrschter Prozess** *(engl. stable process, process in a state of statistical control)*

**Prozess**, der nur **zufälligen Streuungsursachen** unterliegt

*ANMERKUNG 1: Ein beherrschter Prozess verhält sich im Allgemeinen so, als wenn die aus dem Prozess gezogenen **Stichproben** zu jeder Zeit einfache **Zufallsstichprobe**n aus derselben **Grundgesamtheit** sind.*

*ANMERKUNG 4: Bei einigen Prozessen kann der Mittelwert eines **Merkmals** driften, oder die Standardabweichung zunehmen, z. B. wegen Werkzeugverschleiß oder wegen abnehmender Konzentration einer Lösung. Eine fortschreitende Veränderung des Mittelwertes oder der Standardabweichung eines solchen Prozesses wird als Folge systematischer und nicht als Folge **zufälliger Streuungsursachen** angesehen. Damit werden keine einfachen Zufallsstichproben aus derselben Grundgesamtheit erhalten.*

[ISO 3534-2, 2.2.7]

*REDAKTIONELLE ANMERKUNG: Englische Originalfassung dieser Begriffsdefinition in ISO 3534-2 (2006) und ISO 21747 (2006) identisch; DIN ISO 3534-2 enthält die neuere deutsche Übersetzung (2013); DIN ISO 21747 enthält die ältere deutsche Übersetzung (2007) und verwendet die Begriffe **„stabiler Prozess"** und **„beherrschter Prozess"** synonym.*

**Beherrschtes Prozessmerkmal** *(engl. Übersetzung von DIN 55350-11 nicht verfügbar)*

Prozessmerkmal, bei dem sich die Parameter der Verteilung der Merkmalswerte praktisch nicht oder nur in bekannter Weise oder in bekannten Grenzen ändern [DIN 55350-11, 3.11.1]

**<u>Beherrschtes Produktmerkmal</u>**N2) *(engl. product characteristic in control)*

**Produktmerkmal**sparameter der Verteilung der Merkmalswerte, die sich praktisch nicht oder nur in bekannter Art und Weise oder innerhalb bekannter Grenzen ändern.

> *N2) Nationale Fußnote:*
>
> *ISO 21747:2006, 3.1.1.6, verwendete die englischen Benennungen „stable process" und „process in a state of statistical control" synonym, die DIN ISO 21747 mit „stabiler Prozess" und „beherrschter Prozess" übersetzte.*
>
> *Davon abweichend bezeichnet ISO 22514-1:2014, 3.1.21, nur das Verhalten nach ISO 21747:2006, 3.1.1.6, Anmerkung 1 bis 3, als „stable process" und „process in a state of statistical control", das DIN ISO 22514-1 mit „stabiler Prozess" übersetzt.*
>
> *Das Verhalten nach ISO 21747:2006, 3.1.1.6, Anmerkung 4, bezeichnet ISO 22514-1:2014, 3.1.20, hingegen als „product characteristic in control", das mit „beherrschtes Produktmerkmal" übersetzt wird.*
>
> *Dieser Bedeutungswandel ist in DIN ISO 3534-2:2013-12, 2.2.7, noch nicht berücksichtigt.*

[ISO 22514-1, 3.1.20]

**<u>Beobachteter Wert</u>** *(engl. observed value)*

Erhaltener Wert einer Eigenschaft, die mit einem Element der **Stichprobe** verbunden ist

[ISO 3534-1, 1.4]

**<u>Bestimmung</u>** *(engl. determination)*

Tätigkeit zur Ermittlung eines oder mehrerer **Merkmale** und ihrer Merkmalswerte [ISO 9000, 3.11.1]

**<u>Diskretes Merkmal</u>** *(engl. discrete characteristic)*

**Merkmal**, dessen Merkmalswerte die Zählwerte einer zählbaren **Größe** sind (z. B. gut/schlecht, in Ordnung/nicht in Ordnung, rot/grün/blau)

> *REDAKTIONELLE ANMERKUNG: Häufig auch unpräzise als „attributives Merkmal" bezeichnet; siehe auch „diskrete Skala" [ISO 3534-2, 1.1.5].*

**<u>Einflussgröße</u>** *(engl. influence quantity)*

**Größe**, die sich bei einer direkten **Messung** nicht auf die Größe auswirkt, die gerade gemessen wird, aber die Beziehung zwischen **Anzeige** und dem **Messergebnis** beeinflusst [VIM, 2.52]

**<u>Einheit</u>** *(engl. item, entity)*

Das, was einzeln beschrieben und betrachtet werden kann [ISO 3534-2, 1.2.11]

> *REDAKTIONELLE ANMERKUNG: Nicht zu verwechseln mit „Maßeinheit" (vgl. [VIM, 1.9])*

**<u>Empirisch</u>** *(engl. empirical)*

Aus Erfahrungen oder aus Beobachtungen abgeleitet, experimentell ermittelt, ohne Verwendung eines mathematischen Modells

> *REDAKTIONELLE ANMERKUNG: In der Statistik wird das Adjektiv „empirisch" verwendet, um aus Messdaten ermittelte Größen wie z. B. Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung $s$ von den entsprechenden Größen $\mu$ und $\sigma$ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zu unterscheiden. Die unterschiedliche Schreibweise dieser Größen mit lateinischen und griechischen Buchstaben dient demselben Zweck.*

**Fähigkeit** *(engl. capability)*

Eignung eines Objekts *(z. B. **Produkt**, Dienstleistung, **Prozess**, Person, Organisation, System, Ressource)* zum Realisieren eines Ergebnisses, das die **Anforderungen** an dieses Ergebnis erfüllen wird *(in Anlehnung an [ISO 9000, 3.6.12])*

**Fähigkeit** *(engl. capability)*

Eignung einer Organisation, eines Systems oder eines **Prozesses** zum Realisieren eines **Produktes**, das die **Anforderungen** an dieses Produkt erfüllen wird [ISO 22514-1. 3.3.2]

**Fähigkeitsindex** *(engl. capability index):* siehe **Prozessfähigkeitsindex**

**Grenzwert** *(engl. specification limit)*

Für ein **Merkmal** festgelegter begrenzender Wert [ISO 3534-2, 3.1.3]

**Größe** *(engl. quantity)*

Eigenschaft eines Phänomens, eines Körpers oder einer Substanz, wobei die Eigenschaft einen Wert hat, der durch eine Zahl und eine Referenz ausgedrückt werden kann [VIM, 1.1]

**Größenart** *(engl. kind of quantity)*

Aspekt, der untereinander vergleichbaren **Größen** gemeinsam ist [VIM, 1.2]

**Größenwert** *(engl. quantity value)*

Zahlenwert und Referenz, die zusammen eine **Größe** quantitativ angeben [VIM, 1.19]

**Grundgesamtheit** *(engl. population)*

Gesamtheit der betrachteten **Einheiten** [ISO 3534-2, 1.2.1]

**Höchstwert** *(engl. upper specification limit)*

**Grenzwert**, der den oberen begrenzenden Wert angibt [ISO 3534-2, 3.1.4]

**Kenngröße** *(engl. statistic)*

Vollständig bestimmte Funktion aus Zufallsvariablen

*NATIONALE FUSSNOTE: Kenngrößen charakterisieren Eigenschaften einer Häufigkeitsverteilung*

[ISO 3534-1, 1.8]

**Konformität** *(engl. conformity)*

Erfüllung einer **Anforderung** [ISO 9000, 3.6.11]

**Konformitätsbewertung** *(engl. conformity evaluation)*

Systematische **Prüfung** über den Grad, bis zu dem eine **Einheit** spezielle **Anforderungen** erfüllt [ISO 3534-2, 4.1.1]

**Kontinuierliches Merkmal** *(engl. continuous characteristic)*

**Merkmal**, dessen Merkmalswerte die **Messwerte** einer physikalischen **Größe** sind (z. B. Gewicht, Länge, Strom, Temperatur)

*REDAKTIONELLE ANMERKUNG: Häufig auch unpräzise als „variables Merkmal" bezeichnet; siehe auch „kontinuierliche Skala" [ISO 3534-2, 1.1.4].*

**Leistungsindex** *(engl. performance index)*

**Kenngröße**, die das **Leistungsmaß** in Bezug auf festgelegte **Spezifikationen** angibt [ISO 22514-1, 3.2.3]

**Leistungsmaß** *(engl. performance measure)*

Statistische **Messgröße** des Ergebnisses für ein **Merkmal** aus einem **Prozess**, von dem *nicht* gezeigt worden sein muss, dass dies ein **stabiler Prozess** ist [ISO 22514-1, 3.2.2]

**Merkmal** *(engl. characteristic)*

Kennzeichnende Eigenschaft

*ANMERKUNG 1: Ein Merkmal kann inhärent oder zugeordnet sein.*

*ANMERKUNG 2: Ein Merkmal kann qualitativer oder quantitativer Natur sein.*

*ANMERKUNG 3: Es gibt verschiedene Klassen von Merkmalen, z. B.:*

- *physikalische, z. B. mechanische, elektrische, chemische oder biologische Merkmale;*
- *sensorische, z. B. bezüglich Geruch, Berührung, Geschmack, Sehvermögen, Gehör;*
- *verhaltensbezogene, z. B. Anständigkeit, Ehrlichkeit, Wahrheitsliebe;*
- *zeitbezogene, z. B. Pünktlichkeit, Verlässlichkeit, Verfügbarkeit;*
- *ergonomische, z. B. physiologische oder auf Sicherheit für den Menschen bezogene Merkmale;*
- *funktionale, z. B. Spitzengeschwindigkeit eines Flugzeuges.*

[ISO 3534-2, 1.1.1]

**Messergebnis** *(engl. measurement result)*

Menge von **Größenwerten**, die einer **Messgröße** zugewiesen sind, zusammen mit jeglicher verfügbarer relevanter Information [VIM, 2.9]

**Messgerät** *(engl. measuring instrument)*

Gerät, das allein oder in Verbindung mit zusätzlichen Einrichtungen für die Durchführung von **Messungen** verwendet wird [VIM, 3.1]

**Messgröße** *(engl. measurand)*

**Größe**, die gemessen werden soll [VIM, 2.3]

**Messprozess** *(engl. measurement process)*

Satz von Tätigkeiten zum **Bestimmen** eines **Größenwertes** [ISO 9000, 3.11.5]

**<u>Messsystem</u>** *(engl. measuring system)*

Kombination aus **Messgeräten** und oft anderen Geräten sowie bei Bedarf Reagenzien und Versorgungseinrichtungen, die so angeordnet und angepasst sind, dass sie Information liefern, um **Messwerte** innerhalb bestimmter Intervalle für **Größen** bestimmter **Arten** zu erhalten

*ANMERKUNG: Ein Messsystem kann aus nur einem einzigen Messgerät bestehen*

[VIM, 3.2]

**<u>Messung</u>** *(engl. measurement)*

**Prozess**, bei dem einer oder mehrere **Größenwerte**, die vernünftigerweise einer **Größe** zugewiesen werden können, experimentell ermittelt werden

*ANMERKUNG 2: Eine Messung bedeutet Vergleich von Größen und schließt das Zählen mit ein*

[VIM, 2.1]

**<u>Messunsicherheit</u>** *(engl. measurement uncertainty)*

Nichtnegativer Parameter, der die Streuung der **Werte** kennzeichnet, die der **Messgröße** auf der Grundlage der benutzten Information beigeordnet ist [VIM, 2.26]

**<u>Messwert</u>** *(engl. measured quantity value; measured value)*

**Größenwert**, der ein **Messergebnis** repräsentiert [VIM, 2.10]

**<u>Mindestwert</u>** *(engl. lower specification limit)*

**Grenzwert**, der den unteren begrenzenden Wert angibt [ISO 3534-2, 3.1.5]

**<u>Parameter</u>**

Kenngröße einer Verteilungsfamilie

*ANMERKUNG 1 Der Parameter darf eindimensional oder mehrdimensional sein.*

*ANMERKUNG 2 Parameter werden manchmal als Lageparameter bezeichnet, insbesondere, wenn der Parameter direkt dem Erwartungswert der Verteilungsfamilie entspricht. Manche Parameter werden als Skalierungsparameter bezeichnet, insbesondere, wenn sie gleich der Standardabweichung oder zu ihr proportional sind. Parameter, die weder Lage- noch Skalierungsparameter sind, werden üblicherweise als Formparameter bezeichnet.*

[ISO 3534-1]

*REDAKTIONELLE ANMERKUNG: Lageparameter (Erwartungswert, Median), Streuungsparameter (Varianz, Standardabweichung, Variationskoeffizient) und Formparameter (Schiefe, Wölbung, Exzess) werden auch als Funktionalparameter bezeichnet.*

**<u>Parameter der Grundgesamtheit</u>**

Summarisches Maß der Werte irgendeines Merkmals einer Grundgesamtheit

*BEISPIEL Mittelwert $\mu$ der Grundgesamtheit; Standardabweichung $\sigma$ der Grundgesamtheit.*

*ANMERKUNG Parameter der Grundgesamtheit werden im Allgemeinen durch klein geschriebene griechische Buchstaben in Kursivschrift dargestellt.*

[ISO 3534-2]

**<u>Produkt</u>** *(engl. product)*

Ergebnis eines **Prozesses** [ISO 22514-1, 3.1.4], [ISO 3534-2, 1.2.32]

**Produktmerkmal** *(engl. product characteristic)*

Inhärentes **Merkmal** eines **Produktes** [ISO 22514-1, 3.1.7]

*REDAKTIONELLE ANMERKUNG: „Inhärent“ bedeutet „einer Einheit innewohnend“ (z. B. physikalische Eigenschaften wie Gewicht, Größe, Stromaufnahme eines Produktes); daher kann ein inhärentes Merkmal ein **Qualitätsmerkmal** sein, ein „zugeordnetes“ Merkmal (wie z. B. der Preis, Eigentümer) jedoch nicht.*

**Prozess** *(engl. process)*

Satz zusammenhängender oder sich gegenseitig beeinflussender Tätigkeiten, der Eingaben zum Erzielen eines vorgesehenen Ergebnisses verwendet [ISO 9000, 3.4.1]

**Prozessergebnisverteilung**

Zeitabhängiges Verteilungsmodell, das die momentane Verteilung des untersuchten Merkmals und die Änderungen der Werte ihres Lage-, Streuungs- und Formparameters während des Zeitintervalls der Prozessbeobachtung berücksichtigt. Nach [ISO 22514-2].

**Prozessfähigkeitsindex** *(engl. process capability index)*

**Größe**, die die **Fähigkeit** in Bezug auf gegebene **Spezifikationen** angibt [ISO 22514-1, 3.3.6]

**Prozessmerkmal** *(engl. process characteristic)*

Inhärentes **Merkmal** eines **Prozesses** [ISO 22514-1, 3.1.8]

*REDAKTIONELLE ANMERKUNG: Prozessmerkmale sind notwendige Merkmale, um die **Konformität** der **Produktmerkmale** sicherzustellen. Dabei handelt es sich um Merkmale, die an Anlagen und Einrichtungen ermittelt werden und nicht am **Produkt**.*
*Zum Begriff „inhärent“ siehe auch redaktionelle Anmerkung zum Begriff „Produktmerkmal“.*

**Prüfung** *(engl. inspection)*

**Konformitätsbewertung** durch Beobachten und Beurteilung, begleitet – soweit zutreffend – durch **Messung**, Testung oder Vergleich [ISO 3534-2, 4.1.2]

**Qualitätsfähigkeit** *(engl. quality capability)*

Eignung einer Organisation oder von Teilen einer Organisation (z. B. Personen, Verfahren, Prozesse, Maschinen), ein Ergebnis zu realisieren, welches die Qualitätsanforderungen an dieses Ergebnis erfüllen wird *(in Anlehnung an [ISO 22514-1, 3.3.2] und [ISO 9000, 3.6.12])*.

**Qualitätsmerkmal** *(engl. quality characteristic)*

Inhärentes **Merkmal** eines **Produktes**, eines **Prozesses** oder Systems bezogen auf eine **Anforderung** [ISO 22514-1, 3.1.9]

*REDAKTIONELLE ANMERKUNG: Zum Begriff „inhärent“ siehe auch redaktionelle Anmerkung zum Begriff „Produktmerkmal“.*

**Ranggröße** *(engl. order statistic)*

durch ihre Rangordnung in einer nicht absteigenden Anordnung von Zufallsvariablen festgelegte Kenngröße [ISO 3534-1]

**Rundestellenwert** (engl.: place value)

**Rundestelle:** Die Stelle eines Zahlsymbols des Zehner-Systems, an der nach dem Runden die letzte Ziffer stehen soll. Bemerkung: Bei Mitteilungen von Mess- und Rechenergebnissen sollen bei Zahlenangaben gerundeter Zahlen hinter der Rundestelle keine Nullen stehen. Der Stellenwert der Rundestelle heißt **Rundestellenwert**.

[DIN 1333], [ISO 80000-1].

**Schätzer** *(engl. estimator)*

**Kenngröße**, die zur **Schätzung** eines Parameters Θ verwendet wird [ISO 3534-1, 1.12]

**Schätzung** *(engl. estimation)*

Verfahren, das eine statistische Darstellung einer **Grundgesamtheit** aus einer aus dieser Grundgesamtheit gezogenen **Zufallsstichprobe** gewinnt.

> *ANMERKUNG 1: Insbesondere begründet das Verfahren, das von einem **Schätzer** zu einem speziellen **Schätzwert** führt, die Schätzung.*

[ISO 3534-1, 1.36]

**Schätzwert** *(engl. estimate)*

**Beobachteter Wert** eines **Schätzers** [ISO 3534-1, 1.31]

**Sollwert** *(engl. target value)*

Bevorzugter Wert oder Referenzwert eines **Merkmals**, der in einer **Spezifikation** angegeben ist

[ISO 3534-2, 3.1.2]

**Spezifikation** *(engl. specification)*

Dokument, das **Anforderungen** festlegt

> *ANMERKUNG: Eine Spezifikation kann sich beziehen auf Tätigkeiten (z. B. Verfahrensdokument, Prozessspezifikation und Testspezifikation) oder auf Produkte (z. B. Produktspezifikation, Leistungsspezifikation und Zeichnung).*

[ISO 9000, 3.8.7]

**Spezifikationsintervall** *(engl. specification interval)*

Bereich zwischen den **Grenzwerten Höchstwert** und **Mindestwert** [ISO 22514-1, 3.1.14]

> *REDAKTIONELLE ANMERKUNG: Die Grenzwerte werden auch als Spezifikationsgrenzen bezeichnet.*

**Stabiler Prozess; beherrschter Prozess** *(engl. stable process, process in a state of statistical control)*

Prozess, der (bezüglich seiner Streuung) nur **zufälligen Ursachen** unterliegt

> *ANMERKUNG 1: Ein stabiler Prozess wird sich im Allgemeinen so verhalten, als seien die Stichproben zu jeder Zeit Zufallsproben bei einfacher Probenahme aus derselben Grundgesamtheit.*
>
> *ANMERKUNG 4: Bei manchen Prozessen kann sich der Erwartungswert eines Merkmals ändern, oder die Standardabweichung kann sich vergrößern. Die Gründe dafür können zum Beispiel Werkzeugabnutzung oder die Verringerung der Konzentration in einer Lösung sein. Eine fortschreitende Änderung des Erwartungswerts oder der Standardabweichung eines solchen Prozesses wird als systematische und nicht als zufällige Ursache angesehen. Es sind dann die Ergebnisse der Probenahme keine einfachen Zufallsstichproben aus derselben Grundgesamtheit.*

[ISO 21747, 3.1.1.6]

*REDAKTIONELLE ANMERKUNG: Englische Originalfassung dieser Begriffsdefinition in ISO 3534-2 (2006) und ISO 21747 (2006) identisch; DIN ISO 21747 enthält die ältere deutsche Übersetzung (2007); DIN ISO 3534-2 enthält die neuere deutsche Übersetzung (2013) und verwendet nur den Begriff **„beherrschter Prozess“**.*

**Stabiler Prozess** *(engl. stable process, process in a state of statistical control)*

**Prozess**, der nur **zufälligen Streuungsursachen** unterliegt

*ANMERKUNG 2 zum Begriff: Ein stabiler Prozess verhält sich im Allgemeinen so, als wenn die aus dem Prozess gezogenen **Stichproben** zu jeder Zeit einfache **Zufallsstichproben** aus derselben **Grundgesamtheit** sind.*

[ISO 22514-1, 3.1.21]

*REDAKTIONELLE ANMERKUNG: Die Begriffsdefinition der englischen Originalfassung ISO 3534-2 (2006) wurde in modifizierter Form in die englische Originalfassung ISO 22514-1 (2014) übernommen; die deutsche Fassung DIN ISO 22514-1 (2016) verwendet nur den Begriff **„stabiler Prozess“**.*

**Stichprobe** *(engl. sample)*

Teilmenge einer **Grundgesamtheit**, die aus einer oder mehreren **Auswahleinheiten** besteht.

[ISO 3534-1, 1.3]

**Streuung** *(engl. variation)*

Unterschied zwischen Werten eines **Merkmals** [ISO 22514-1, 3.1.18]

(festgelegte) **Toleranz** *(engl. (specified) tolerance)*

Differenz zwischen **Höchstwert** und **Mindestwert** [ISO 3534-2, 3.1.6]

**Toleranzintervall** *(engl. tolerance interval):* siehe **Spezifikationsintervall**

**Toleranzzone** *(engl. tolerance zone):* siehe **Spezifikationsintervall**

**Vertrauensbereich** *(engl. confidence interval)*

Bereichsschätzer $(T_0, T_1)$ für einen Parameter $\theta$, bei dem die **Kenngrößen** $T_0$ und $T_1$ Intervallgrenzen sind und für den gilt, dass $P[T_0 < \theta < T_1] \geq 1 - \alpha$

*ANMERKUNG 2: Verbunden mit diesem Vertrauensbereich ist die zugehörige Kenngröße $100 \cdot (1-\alpha)\%$, in der $\alpha$ im Allgemeinen eine kleine Zahl ist. Diese Kenngröße, die Vertrauenskoeffizient oder Vertrauensniveau genannt wird, hat oft den Wert 95 % oder 99 %. Die Ungleichung $P[T_0 < \theta < T_1] \geq 1 - \alpha$ gilt für einen genau bezeichneten, aber unbekannten Wert $\theta$ der Grundgesamtheit.*

[ISO 3534-1, 1.28]

*REDAKTIONELLE ANMERKUNG: P bezeichnet eine Wahrscheinlichkeit (engl. probability).*

**Vertrauensniveau** *(engl. confidence level):* siehe **Vertrauensbereich**, Anmerkung 2

**Wahrer Wert** (einer Größe) *(engl. true quantity value)*

**Größenwert**, der mit der Definition einer **Größe** in Übereinstimmung ist [VIM, 2.11]

**<u>Wahrer Wert</u>** *(engl. true value)*

Wert, der eine **Größe** oder ein quantitatives **Merkmal** charakterisiert, und der unter denjenigen Bedingungen vollständig definiert ist, die bei der Betrachtung der Größe oder des quantitativen Merkmals vorliegen

> *ANMERKUNG 1: Der wahre Wert einer Größe oder eines quantitativen Merkmals ist ein theoretischer Begriff und im Allgemeinen nicht genau bekannt.*

[ISO 3534-2, 3.2.5]

**<u>Zufällige Streuungsursache</u>** *(engl. random cause, common cause, chance cause)*

Ursache für die **Streuung**, die einem **Prozess** ständig innewohnt [ISO 22514-1, 3.1.19]

**<u>Zufallsstichprobe</u>** *(engl.random sample)*

**Stichprobe**, die per Zufallsauswahl ausgewählt worden ist [ISO 3534-1, 1.6]

# Literatur


| | |
|---|---|
| [AIAG PPAP] | AIAG Core Tools, Production Part Approval Process (PPAP), 4th edition (2006) |
| [AIAG SPC] | AIAG Core Tools, Statistical Process Control (SPC), 2nd edition (2005) |
| [CDQ 0301] | CDQ 0301, Management von Merkmalen *(Zentralanweisung, ausschließlich RB-intern verfügbar)* |
| [DIN 1333] | DIN 1333:1992, Zahlenangaben |
| [DIN 55350-11] | DIN 55350-11:2008-05, Begriffe zum Qualitätsmanagement – Teil 11: Ergänzung zu DIN EN ISO 9000:2005 *(Normenreihe DIN 55350 z.Zt. in Überarbeitung)* |
| [DIN EN 61710] | DIN EN 61710 Potenzgesetz-Modell — Anpassungstests und Schätzverfahren, IEC 61710:2013 |
| [Epps] | T. W. Epps, L. B. Pulley, A test for normality based on the empirical characteristic function, Biometrika, Vol. 70, Issue 3, 1983, pp. 723–726 |
| [Freitag] | Freitag, Zeitreihenanalyse: Methoden und Verfahren, Eul-Verlag, 2003 |
| [Hampel] | Hampel, Ronchetti, Rousseeuw, Stahel, Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions. Wiley, New York, 1986 |
| [Hartung] | J. Hartung, Statistik, 15. Auflage, 2009, Oldenbourg Verlag München |
| | Schriftenreihe Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe, Technische Statistik |
| [Heft 1] | Heft Nr. 1, Grundlagen der Technischen Statistik — Kontinuierliche Merkmale |
| [Heft 2] | Heft Nr. 2, Grundlagen der Technischen Statistik — Diskrete Merkmale |
| [Heft 3] | Heft Nr. 3, Auswerten von Messreihen |
| [Heft 7] | Heft Nr. 7, Statistische Prozessregelung |
| [Heft 8] | Heft Nr. 8, Messunsicherheit |
| [Heft 10] | Heft Nr. 10, Fähigkeit von Mess- und Prüfprozessen |
| [ISO 1101] | DIN EN ISO 1101:2017 Geometrische Produktspezifikation (GPS) — Geometrische Tolerierung — Tolerierung von Form, Richtung, Ort und Lauf (ISO 1101:2017); |
| [ISO 21747] | DIN ISO 21747:2007-03, Statistische Verfahren – Prozessleistungs- und Prozessfähigkeitskenngrößen für kontinuierliche Qualitätsmerkmale (ISO 21747:2006; *zurückgezogen)* |
| [ISO 22514-1] | DIN ISO 22514-1:2016-06, Statistische Verfahren im Prozessmanagement – Fähigkeit und Leistung – Teil 1: Allgemeine Grundsätze und Begriffe (ISO 22514-1:2014) |
| [ISO 22514-2] | DIN ISO 22514-2:2015-06, Statistische Verfahren im Prozessmanagement – Fähigkeit und Leistung – Teil 2: Prozessleistungs- und Prozessfähigkeitskenngrößen von zeitabhängigen Prozessmodellen (ISO 22514-2:2013) |
| [ISO 22514-3] | ISO 22514-3:2008:02, Statistical methods in process management – Capability and performance, Part 3: Machine performance studies for measured data on discrete parts *(nur englische Version verfügbar)* |
| [ISO 22514-5] | ISO/DIS 22514-5:2015-11(E), Statistical methods in process management – Capability and performance, Part 5: Process capability estimates and performance for attributive characteristics *(in Vorbereitung, nur englische Version verfügbar)* |
| [ISO 22514-6] | ISO 22514-6:2013-02, Statistical methods in process management – Capability and performance, Part 6: Process capability statistics for characteristics following a multivariate normal distribution *(nur englische Version verfügbar)* |
| [ISO 3534-1] | DIN ISO 3534-1:2009-10, Statistik – Begriffe und Formelzeichen – Teil 1: Wahrscheinlichkeit und allgemeine statistische Begriffe (ISO 3534-1:2006) |
| [ISO 3534-2] | DIN ISO 3534-2:2013-12, Statistik – Begriffe und Formelzeichen – Teil 2: Angewandte Statistik (ISO 3534-2:2006) |

| | |
|---|---|
| [ISO 5479] | DIN ISO 5479 Statistische Auswertung von Daten — Tests auf Abweichung von der Normalverteilung (ISO 5479:1997) |
| [ISO 5725-2] | DIN ISO 5725-2 Genauigkeit von Messverfahren und Messergebnissen |
| [ISO 9000] | DIN EN ISO 9000:2015-11, Qualitätsmanagementsysteme – Grundlagen und Begriffe (ISO 9000:2015) |
| [ISO 9001] | DIN EN ISO 9001:2015-11, Qualitätsmanagementsysteme — Anforderungen (ISO 9001:2015) |
| [ISO 80000-1] | DIN EN ISO 80000-1:2013, Größen und Einheiten, Teil 1: Allgemeines |
| [Johnson] | W.P. Elderton, N.L. Johnson, Systems of Frequency Curves, Cambridge University Press (1969) |
| [Kölling] | W. Kölling, Aus der Reihe getanzt — Identifikation von Ausreißern mit dem Hampel-Test, QZ Jahrg. 46 (2001) 3, S. 315-319 |
| [Kruskal] | W. H. Kruskal; W. A: Wallis, Use of Ranks in One-Criterion Variance Analysis, Journal of the American Statistical Association, Vol. 47, No. 260. (Dec., 1952), pp. 583-621. |
| [Neumann] | J. von Neumann et. al., The Mean Square Successive Difference, The Annals of Mathematical Statistics, 12 (1941), 153-162 |
| [Sachs] | J. Hedderich, L. Sachs, Angewandte Statistik, Springer Verlag Berlin, 16. Auflage, 2018 |
| [Schulze] | E. Dietrich, A. Schulze, Statistische Verfahren zur Maschinen- und Prozessqualifikation, Hanser-Verlag, 2010 |
| [Swed] | F. S. Swed, C. Eisenhart, Tables for Testing Randomness of Grouping in a Sequence of Alternatives, Annals of Mathematical Statistics, 1943, XIV, 66-87 |
| [VDA-4] | VDA-Band 4, Sicherung der Qualität in der Prozesslandschaft, Methoden, Wirtschaftliche Prozessgestaltung und Prozesslenkung (2005) |
| [VIM] | Internationales Wörterbuch der Metrologie (VIM), Deutsch-Englische Fassung ISO/IEC-Leitfaden 99:2007, 4. Auflage (2012), Herausgeber DIN Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag Berlin Wien Zürich, ISBN 978-3-410-23472-3 |
| [Wilrich] | Graf, Henning, Stange, Wilrich, Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik, 3. Auflage (1987) |

# Stichwortverzeichnis

**R**



**S**



**T**



**U**



**V**



**W**



**Z**

Robert Bosch GmbH
C/QMM Tilsch
Wiener Straße 42 - 46
70469 Stuttgart
Germany

Telefon +49 711 811 - 0
www.bosch.com

**Robert Bosch GmbH**
C/QMM Tilsch
Wiener Straße 42 - 46
70469 Stuttgart
Germany
Telefon +49 711 811 - 0
**www.bosch.com**