



Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe | Technische Statistik

13. Methoden der Zuverlässigkeitsgestaltung, Verifizierung und Validierung



BOSCH
Technik fürs Leben





Inhaltsverzeichnis

- 1. Einleitung..... 3
- 2. Grundlagen 4
 - 2.1. Begriffe 4
 - 2.2. Warum versagen Bauteile 6
 - 2.2.1. Lokale und globale Ansätze 6
 - 2.2.2. Schädigungsverlauf, Wöhler-Diagramm 7
 - 2.2.3. Verteilte Kenngrößen, Ausfallwahrscheinlichkeit 9
 - 2.3. Zeitliches Ausfallverhalten, Ausfallrate und „Badewannenkurve“ 10
- 3. Gestaltung der Zuverlässigkeit 14
 - 3.1. Generelle Konzepte 14
 - 3.2. Aufgabe und Prinzipien 16
 - 3.3. Zuverlässigkeitsanforderungen 17
 - 3.4. Quantitative Zuverlässigkeitsbewertung..... 19
 - 3.4.1. Übersicht 19
 - 3.4.2. Bestimmung der Beanspruchung 20
 - 3.4.3. Bestimmung der Beanspruchbarkeit 24
 - 3.4.4. Komponentenzuverlässigkeit 26
 - 3.4.4.1. Wahre Ausfallwahrscheinlichkeit 26
 - 3.4.4.2. Vereinfachte Ausfallwahrscheinlichkeit 28
 - 3.4.4.3. Sicherheitsfaktoren 28
 - 3.4.4.4. Allgemeine Verteilungsfunktionen..... 30
 - 3.4.4.5. Rechnerische Lebensdauer bei variabler Beanspruchung 31
 - 3.4.5. Systemzuverlässigkeit 33
 - 3.4.6. Zusammenfassung und Beispiel 36
 - 3.5. Qualitative Methoden 40
 - 3.5.1. Failure Mode and Effects Analysis (FMEA) 40
 - 3.5.2. Design Review Based on Failure Mode (DRBFM) 40
 - 3.5.3. Fault Tree Analysis (FTA) 41
- 4. Verifizierung & Validierung 43
 - 4.1. Erprobung und Qualität..... 43
 - 4.2. Testplanung 45
 - 4.2.1. Anzahl Prüflinge und Prüfdauer für einen Success Run Test..... 45
 - 4.2.2. Berücksichtigung von Ausfällen 46
 - 4.2.3. Berücksichtigung von Vorinformationen..... 46
 - 4.2.4. Beschleunigte Lebensdauerprüfung..... 47
 - 4.2.5. Reliability Growth Management (RGM) 49
 - 4.3. Auswertung von Lebensdauerdaten 51
 - 4.3.1. Vollständige und unvollständige (zensorisierte) Daten..... 51
 - 4.3.2. Grafische Auswertung im Weibull-Netz 52
 - 4.3.2.1. Vollständige Daten 53
 - 4.3.2.2. Unvollständige Daten 54
 - Zensorisierung Typ I und II 55
 - Multiple Zensorisierung..... 56
 - Auswertung nach Johnson 56
 - Auswertung nach Nelson..... 57
 - 4.3.3. Analytische Auswertung 61
 - 4.3.3.1. Momentenmethode 61
 - 4.3.3.2. Regressionsverfahren 62
 - 4.3.3.3. Maximum-Likelihood Verfahren 63
 - 4.3.4. Berücksichtigung endlicher Stichprobenumfänge, Vertrauensbereiche..... 65



- 4.4. Besondere Versuche..... 67
 - 4.4.1. Lebensdauerversuch..... 67
 - 4.4.2. Sudden-Death-Test..... 68
 - 4.4.2.1. Vereinfachte grafische Auswertung..... 68
 - 4.4.2.2. Auswertung nach Nelson..... 69
 - 4.4.3. Stark beschleunigte Prüfverfahren..... 70
 - 4.4.3.1. Laststeigerungsverfahren (Step-Stress) 70
 - 4.4.3.2. Highly Accelerated Life Testing (HALT)..... 70
 - 4.4.3.3. Quantitative Accelerated Life Testing (QALT) 71
 - 4.4.3.4. Stress Screening und Highly Accelerated Stress Screening (HASS) 72
 - 4.4.4. Degradation Test 72
- 4.5. Validierung beim Kunden 74
- 4.6. Produktionsbegleitende Prüfungen 75
- 5. Zuverlässigkeit im Feld 76
 - 5.1. Produkthaftung 76
 - 5.2. Feldbeobachtung und Aktive Feldbeobachtung (AFB)..... 76
 - 5.3. Auswertung von Felddaten 77
- 6. Anhang 79
 - 6.1. Statistische Grundlagen..... 79
 - 6.1.1. Definition und Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten..... 79
 - 6.1.2. Datenreihen und deren Kennwerte..... 81
 - 6.1.3. Verteilungen und deren Kennwerte..... 81
 - 6.1.3.1. Verteilung und Verteilungsdichte, Momente 81
 - 6.1.3.2. Beispiele für Verteilungen 83
 - 6.1.3.3. Kennwerte unabhängiger und abhängiger Variablen 83
 - 6.1.3.4. Punkt- und Intervallschätzung des Mittelwertes, Vertrauensbereich 84
 - 6.1.3.5. Verteilungsfreie Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit, Vertrauensbereiche 85
 - 6.2. Verteilungen als Modell streuender Lebensdauerdaten 87
 - 6.2.1. Weibull-Verteilung..... 88
 - Weibull-Wahrscheinlichkeitspapier 89
 - 6.2.2. Exponentialverteilung..... 92
 - 6.2.3. Normalverteilung..... 94
 - 6.2.4. Lognormalverteilung 96
 - 6.2.5. Mischverteilung 99
 - 6.3. Tabellen 100
 - 6.3.1. Standardnormalverteilung 100
 - 6.3.2. t - Verteilung..... 101
 - 6.3.3. Median-Werte der Ausfallwahrscheinlichkeit..... 102
 - 6.3.4. Vertrauensgrenzen der Ausfallwahrscheinlichkeit..... 104
- 7. Literatur 106
- 8. Index 107

2020-04-06 - SOCOS



1. Einleitung

Bei Kundenumfragen wird der Zuverlässigkeit unter vielen anderen Produkteigenschaften oft einen besonderen Stellenwert beigemessen, [1] S. 2. Die Gewährleistung einer ausreichenden Produktzuverlässigkeit ist somit ein Schlüsselfaktor für den Geschäftserfolg. In Zeiten verkürzter Entwicklungszyklen bei gleichzeitig steigenden Produkthanforderungen sind hierzu neue Lösungsansätze erforderlich. Neben dem traditionell wichtigen experimentellen Zuverlässigkeitsnachweis rückt die gezielte Zuverlässigkeitsgestaltung, verbunden mit einer rechnerischen Zuverlässigkeitsvorhersage und Optimierung immer mehr ins Zentrum der Entwicklungstätigkeit. Damit wird die Frontloading - Strategie umgesetzt, welche zur Reduzierung des Gesamtaufwandes die Verlagerung des Schwerpunktes der Zuverlässigkeitsarbeit hin zu frühen Phasen der Produktentwicklung verlangt.

Höhere Kundenerwartungen und globale Trends wie z.B. Miniaturisierung, Komplexitätssteigerung und Gewichtsreduktion führen außerdem zu höheren Leistungsdichten und damit sinkenden Zuverlässigkeitsreserven. Diese können häufig nur durch eine höhere Treffsicherheit der eingesetzten Methoden aufgefangen werden.

Das vorliegende Heft wendet sich an Mitarbeiter, welche Aufgaben der Zuverlässigkeitsgestaltung, Verifikation und Validierung wahrnehmen. Es werden wichtige Methoden vorgestellt, welche die oben erwähnten Anforderungen erfüllen. Der Inhalt ist in Verbindung mit der BES-Practice-Beschreibung „Zuverlässigkeitsgestaltung“ [2] zu sehen, in der u.a. die Grundlagen und Prinzipien der Zuverlässigkeitsgestaltung näher erläutert werden.

Der Aufbau des Heftes ist wie folgt:

- In Kapitel 2 werden grundlegende Begriffe und Zusammenhänge eingeführt, welche für das Verständnis der nachfolgenden Ausführungen wichtig sind.
- Kapitel 3 widmet sich der Zuverlässigkeitsgestaltung. Zunächst werden das generelle Konzept und die Zuverlässigkeitsanforderungen erläutert. Anschließend werden quantitative und qualitative Methoden der Zuverlässigkeitsgestaltung, Prognose und Optimierung aufgeführt.
- In Kapitel 4 werden Grundlagen und Methoden der Zuverlässigkeitsverifizierung und Validierung vorgestellt.
- Kapitel 5 beschäftigt sich mit Fragen der Zuverlässigkeit im Feld.
- Im Anhang werden einige grundlegende statistische Konzepte vorgestellt, welche für das Verständnis der Zusammenhänge erforderlich sind.



2. Grundlagen

2.1. Begriffe

Zuverlässigkeit ist eine der wichtigsten Produkteigenschaften und bildet somit einen Teilaspekt und integralen Bestandteil der Qualität. Die Zuverlässigkeit beeinflusst ihrerseits entscheidend weitere Qualitätsmerkmale wie die Sicherheit. Eine visuelle Abgrenzung der Begriffe Qualität, Zuverlässigkeit und Sicherheit ist in Bild 1 aufgeführt.

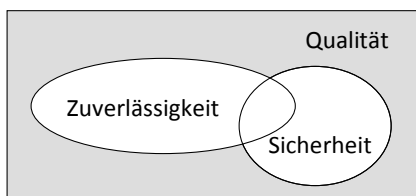


Bild 1: Qualität, Zuverlässigkeit und Sicherheit

Zuverlässigkeit ist nach [3] ein zusammenfassender Ausdruck zur Beschreibung der Verfügbarkeit und ihren Einflussfaktoren Funktionsfähigkeit, Instandhaltbarkeit und Instandhaltungsbereitschaft.

Um der verbreiteten Verwendung der Begriffe, insbesondere im deutschsprachigen Raum, Rechnung zu tragen, wird in [2] und auch im vorliegenden Heft auf der Basis der Systematik in [4] die in Bild 2 dargestellte, hierarchische Abgrenzung verwendet. Bei der Verlässlichkeit (dependability) handelt es sich somit um einen Oberbegriff für Zuverlässigkeit (reliability), Verfügbarkeit (availability), Sicherheit (safety) und Vertraulichkeit (security), welche die Attribute der Verlässlichkeit bilden. Schwerpunkt des vorliegenden Heftes bildet die Gestaltung der Zuverlässigkeit von Designelementen und Systemen. „Designelement“ bezeichnet dabei die kleinste in sich geschlossene Baueinheit zur Erfüllung von einer oder mehreren Funktionen (Glossar BES-PE 3-2009/11). Es kann aus einem oder mehreren Bauteilen bestehen.

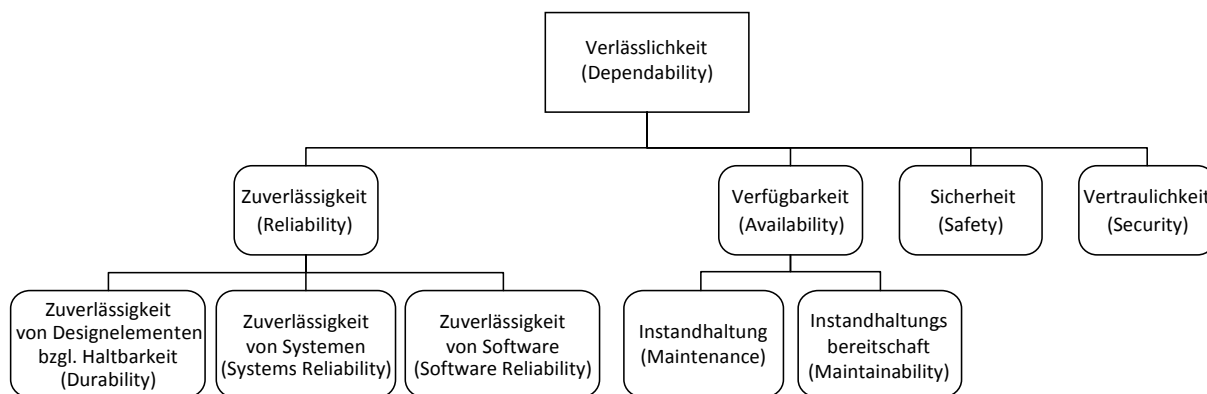


Bild 2: Verlässlichkeit und Zuverlässigkeit

Die Zuverlässigkeit ist nach [2] die Erzeugniseigenschaft, eine geforderte Funktion im vorgegebenen Betriebsbereich über eine festgelegte Nutzungsdauer auszuführen.

Die Nutzungsdauer gliedert sich in Betriebs- und Stillstandsdauer. Die Betriebsdauer ist jene Zeit, während der eine Einheit gemäß Verwendungszweck funktioniert. Während der Stillstandsdauer wird hingegen die Einheit nicht betrieben.

Die Beanspruchungsdauer ist jene Dauer, während der ein Schädigungsmechanismus (Vorgänge, die zu einer allmählichen Veränderung der Eigenschaften einer Einheit aufgrund von Belastungen führen) wirkt. Sie besteht allgemein aus Anteilen der Betriebs- und Stillstandsdauer, denn die



Betriebsdauer muss nicht mit der Beanspruchungsdauer übereinstimmen: Beispielsweise stehen auch bei stillgelegten Fahrzeugen bestimmte elektronische Komponenten unter Spannung, bzw. sind einer Korrosion ausgesetzt.

Die Lebensdauer ist jene Dauer, in der eine Einheit ununterbrochen einem Schädigungsmechanismus bis zum Ausfall ausgesetzt werden kann. Allgemein wird eine bezüglich der Beanspruchungsdauer hinreichend große Lebensdauer angestrebt, das Verhältnis zur Nutzungs- bzw. Betriebsdauer ist hingegen nicht entscheidend. Das Verhältnis zwischen Lebens- und Beanspruchungsdauer kann als Sicherheit gegenüber Ausfall aufgefasst werden. Obige Begriffe sind in Bild 3 grafisch visualisiert.

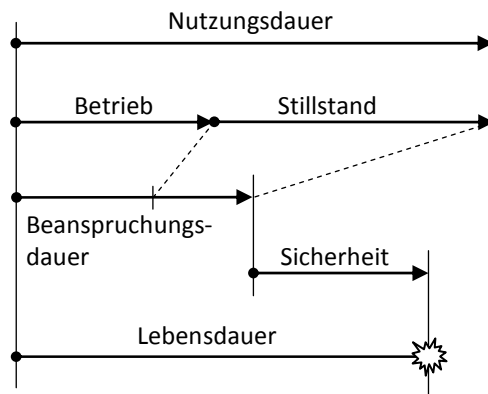


Bild 3: Zusammenhang zwischen Nutzungs-, Beanspruchungs- und Lebensdauer

Der Einfachheit halber und dem üblichen Sprachgebrauch entsprechend wird im nachfolgenden Text das Wort „Dauer“ stellvertretend für alle möglichen, schädigungsmechanismusspezifischen Lebensdauermerkmalen verwendet wie Zeit (Stunden, Monate, Jahre), Weg, zurückgelegte Strecke, Fahrleistung, „Schnittlänge“ eines Werkzeugs, Anzahl von Lastwechseln, Betätigungen, Schaltvorgängen, Arbeitszyklen, Umdrehungen etc.

Zuverlässigkeitsgestaltung ist eine ingenieurwissenschaftliche Disziplin, die wissenschaftliche Erkenntnisse anwendet, um zu gewährleisten, dass das Design des Erzeugnisses die Erzeugniseigenschaft „Zuverlässigkeit“ besitzt. Dies beinhaltet auch das Hineinkonstruieren der Fähigkeit, das Erzeugnis über den gesamten Lebenszyklus hinweg instand zu halten, zu testen und zu unterstützen.

Bei der Zuverlässigkeit können unterschiedliche Objekte betrachtet werden:

- mechanische, sowie elektrisch/elektronische Hardware,
- Software,
- Menschen,
- Systeme aus obigen Einheiten, sowie
- Dienstleistungen.

Beim vorliegenden Heft wird schwerpunktmäßig die Zuverlässigkeit von Designelementen aus mechanischer und elektrisch/elektronischer Hardware hinsichtlich Dauerhaltbarkeit (durability), sowie die Systemzuverlässigkeit aus solchen Designelementen betrachtet, siehe Bild 2.



2.2. Warum versagen Bauteile

2.2.1. Lokale und globale Ansätze

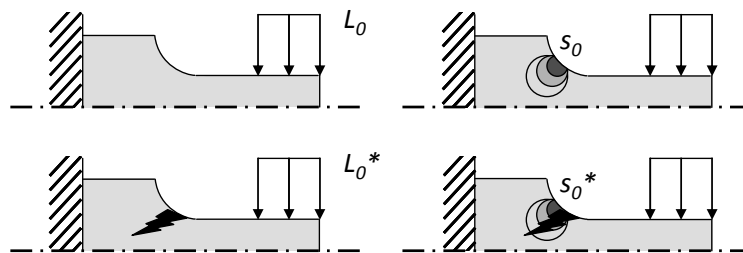


Bild 4: Globale (links) und lokale (rechts) Bewertungskonzepte der Zuverlässigkeit

Vordergründig tritt Bauteilversagen dann ein, wenn eine Belastung, die vom Bauteil ertragbare Belastung (Belastbarkeit) übersteigt. Allerdings ist diese Aussage nicht wirklich hilfreich, da sie die Gründe für das Versagen sehr oberflächlich erfasst und nicht zu einem tieferen Verständnis der Versagensursachen beiträgt. Außerdem kann schnell die Beobachtung gemacht werden, dass bei gleicher Last gewisse Bauteile versagen können, andere aber nicht. Somit kann die Ursache für ein Versagen nicht allein in der Belastung gesucht werden. Konzepte, welche das Versagen eines Bauteils auf der Basis einer Gegenüberstellung von Belastung und Belastbarkeit vornehmen, werden globale oder Last-basierte Konzepte genannt.

Eine weiterführende Betrachtungsweise geht davon aus, dass die äußere Belastung an jedem Ort des Bauteils eine (lokal unterschiedliche) Beanspruchung hervorruft. Versagen tritt dann ein, wenn die lokale Beanspruchung, die ertragbare Beanspruchung am Ort des Versagens (Beanspruchbarkeit) übersteigt. Sowohl Beanspruchung als auch Beanspruchbarkeit sind von der Art der Belastung abhängig, da unterschiedliche Belastungsarten unterschiedliche Schädigungsmechanismen hervorrufen können, welche durch unterschiedliche Größen charakterisiert werden.

Konzepte, welche sich auf eine lokale Gegenüberstellung von Beanspruchung und Beanspruchbarkeit stützen, werden lokale oder örtliche Konzepte genannt.

BEISPIEL:

Wir betrachten einen abgesetzten Balken mit Verrundungsradius R_0 , welcher durch eine äußere Kraft L_0 quasi-statisch belastet wird, Bild 4.

Um im Rahmen eines globalen Konzeptes bestimmen zu können wie sicher das Bauteil gegenüber Versagen durch spröden Bruch ist, müssen Bauteil-Versuche bei unterschiedlichen Kräften L durchgeführt und jene Kraft L_0^ bestimmt werden, bei der erstmals Versagen eintritt. Diese Kraft stellt die globale Belastbarkeit dar. Der Quotient L_0^*/L_0 stellt ein Maß für die Sicherheit des Bauteils gegenüber Versagen dar.*

Die Übertragung der Ergebnisse auf andere Bauteile ist allerdings nicht ohne Weiteres möglich: Für einen anderen Balken mit Verrundungsradius R_1 müssen die Bauteilversuche komplett wiederholt werden, um seine Belastbarkeit L_1^ bestimmen zu können. Außerdem sind Aussagen über die Sicherheit bevor ein Bauteil zur Verfügung steht ebenfalls unmöglich.*

Für die Bewertung nach einem lokalen Konzept muss zunächst eine lokale Größe gefunden werden, welche die Beanspruchung infolge der äußeren Kraft charakterisiert. Für das vorliegende Beispiel wäre dies z.B. die mechanische Spannung. Diese Spannung kann, linear-elastisches Verhalten vorausgesetzt, im Kerbgrund (dem Ort der höchsten Spannung) aus der Kraft L_0 einfach berechnet werden als $s_0 = c(R_0)L_0$, wobei der Übertragungsfaktor $c(R_0)$ vom Verrundungsradius, aber nicht von der Belastung abhängt. Die Spannung s_0 stellt die Beanspruchung dar.

Analog kann auch eine lokale Größe abgeleitet werden, welche die Belastbarkeit charakterisiert: $s_0^ = c(R_0)L_0^*$, hierbei handelt es sich um die Beanspruchbarkeit. Der Quotient s_0^*/s_0 stellt ein lokales Maß für die Sicherheit des Bauteils gegenüber Versagen dar. Diese Vorgehensweise hat klare Vorteile: Für die*



Bewertung einer Designalternative, z.B. eines Balkens mit dem Verrundungsradius R_1 müssten keine weiteren Versuche durchgeführt werden, sondern lediglich eine Neuberechnung von $c(R_1)$ vorgenommen werden, da $s_1^/s_1 = s_0^*/(c(R_1)L_0)$.*

An dieser Stelle wurde die vereinfachende Annahme getroffen, dass $s_1^ = s_0^*$, d.h. dass alle Balken dieselbe lokale Beanspruchbarkeit besitzen, welche somit einen echten Materialparameter darstellt. Dies muss nicht bei allen Schädigungsmechanismen zwingend der Fall sein, allerdings müssen die Gesetzmäßigkeiten bekannt sein, nach denen die Beanspruchbarkeit von diversen Einflüssen abhängt. Dies ist wesentlicher Bestandteil eines lokalen Bewertungskonzepts.*

Aus obigem Beispiel werden die Vor- und Nachteile von beiden Bewertungskonzepten deutlich. Für Last-basierte (globale) Konzepte gilt:

- Vorteil dieser Konzepte ist eine gute Treffsicherheit, da alle experimentell bestimmte Größen direkt am Bauteil ermittelt wurden.
- Nachteilig wirkt sich aus, dass die Übertragbarkeit auf andere Bauteile nicht gegeben ist und relativ wenig über die Ursachen des Versagens gelernt werden kann. Außerdem ist die Durchführung des Bauteilversuchs bei komplexer Belastung oft schwierig bis unmöglich bzw. zu teuer.

Bei den lokalen Konzepten gilt hingegen:

- Von Vorteil ist deren Anwendbarkeit in frühen Stadien des Produkt-Entstehungsprozesses, bzw. dort wo Bauteilversuche schwierig, zu teuer oder nicht vertretbar sind. Außerdem kann auf ihrer Basis ein tieferes Verständnis über die Versagensursachen aufgebaut werden.
- Als Nachteil lokaler Konzepte kann die manchmal unzureichende Treffsicherheit erwähnt werden, außerdem ist viel Know-how in Form eines Bewertungskonzeptes erforderlich.

Ausweg bildet hier, wie so oft, die Anwendung einer Kombination beider Konzepte: Die Beanspruchbarkeit, welche im Rahmen eines lokalen Konzeptes verwendet werden soll, muss in einem möglichst bauteilnahen Versuch ermittelt werden. So können alle Einflüsse erfasst werden, welche mangels ausreichenden Wissens nicht explizit in einem Bewertungskonzept enthalten sind.

2.2.2. Schädigungsverlauf, Wöhler-Diagramm

Bei den bisherigen Ausführungen wurden immer die Höhe der Belastung/Belastbarkeit bzw. der lokalen Größen Beanspruchung/Beanspruchbarkeit betrachtet. Dies stellt nur dann eine sinnvolle Vorgehensweise dar, wenn eine Belastung aufgebracht wird, welche entweder sofort zum Ausfall führt, oder unendlich lange ertragen werden kann. Solche Fälle sind, insbesondere im Kontext einer Zuverlässigkeitsbetrachtung, selten von praktischer Bedeutung.

Oft tritt ein Versagen auch bei konstanter bzw. periodischer Last nicht sofort, sondern erst nach einer gewissen Dauer auf, Bild 5. Beispiele dafür sind das Kriechen der Metalle bei Temperaturen oberhalb 40% der Schmelztemperatur, bzw. der Rissfortschritt spröder Werkstoffe. Damit ist die Modellvorstellung verbunden, dass die Belastung eine gewisse zeitlich ansteigende (und eventuell ortsabhängige) Schädigung hervorruft, welche bis zum Versagen führen kann. Diese muss durch einen, der Physik der lokalen Vorgänge entsprechenden, Schädigungsparameter charakterisiert werden.

Bei der Belastung handelt es sich also um eine zweidimensionale Größe, sie hat sowohl eine (ggf. variable) Höhe, als auch eine Dauer. Deswegen muss bei Angabe einer Belastungshöhe immer die Belastungsdauer mit angegeben werden, bei variabler Höhe sogar der komplette Last-Zeit-Verlauf (oft auch Last-Zeit-Reihe genannt).



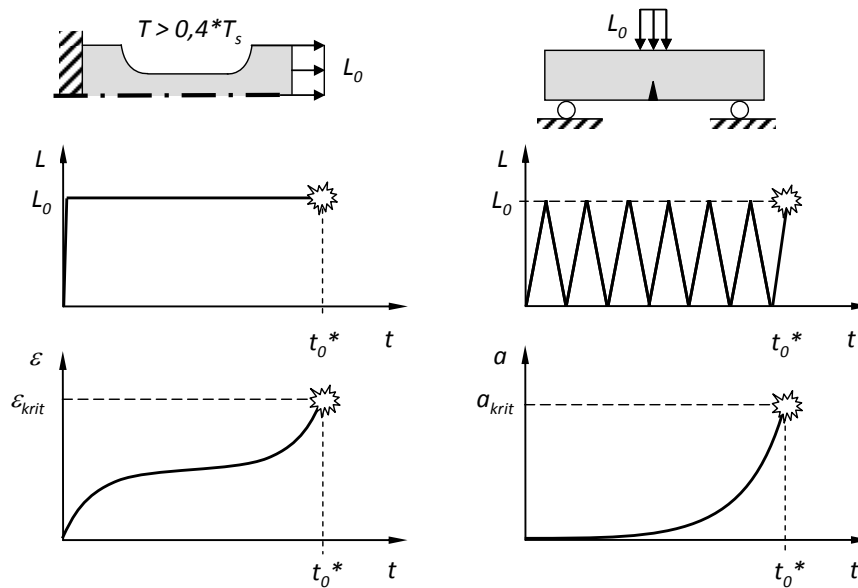


Bild 5: Verzögerter Bruch infolge voranschreitender Schädigung. Links: Kriechen bei Metallen bei konstanter Last (Schädigungsparameter Dehnung ϵ). Rechts: Rissfortschritt (Schädigungsparameter Risslänge a). t^* gibt die jeweilige Lebensdauer an.

Bei unterschiedlichen Lasthöhen können unterschiedliche Lebensdauern erzielt werden. Vereinfacht, kann die Information über die Abhängigkeit der Lebensdauer von der Lasthöhe, insbesondere bei gleichförmiger Belastung, in einem t - L -Diagramm nur durch entsprechende Lebensdauerpunkte (t^*, L_0) charakterisiert werden, wobei die Art der Belastung anderweitig beschrieben werden muss (z.B. konstant, gleichförmig zyklisch mit Unterlast Null etc.). Die Lebensdauerpunkte können auch mit einer Linie verbunden werden (stetiges Verhalten vorausgesetzt), um die Abhängigkeit der Lebensdauer von der Lasthöhe zu visualisieren, Bild 6. Diese Abhängigkeit wird oft durch eine Potenzfunktion beschrieben, welche in logarithmischer Darstellung als Gerade erscheint. Diese Darstellung wird bei einer gleichförmig-zyklischen Belastung traditionell Wöhler-Linie genannt.

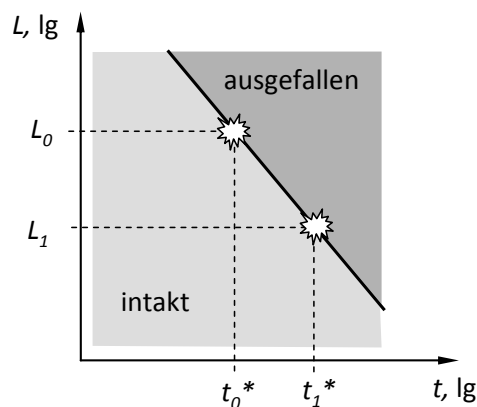


Bild 6: Lebensdauerpunkte in einem Wöhler-Diagramm.

Es ist von zentraler Bedeutung, das Wöhler-Diagramm von der Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Schädigung durch einen Schädigungsparameter klar zu unterscheiden. Letztere ist für die Visualisierung der physikalischen Vorgänge und deren Verständnis wichtig. Bei Zuverlässigkeitsbewertungen spielt in der Praxis aber eher die Wöhler-Darstellung der Lebensdauerpunkte eine bedeutende Rolle. Dies hat auch damit zu tun, dass nicht für jeden Schädigungsmechanismus entsprechendes Wissen über das Wesen eines Schädigungsparameters und dem konkreten zeitlichen Verlauf der Schädigung verfügbar ist.



Beim Wöhler-Diagramm handelt es sich *nicht* um einen zeitlichen Verlauf, welcher dargestellt wird, sondern um eine Grenze zwischen den Bereichen „Betrachtungseinheit intakt“ (links unten) und „Betrachtungseinheit ausgefallen“ (rechts oben). Es kann sowohl eine Betrachtung „in Last-Richtung“ bei einem konstanten Lebensdauermerkmal, als auch eine Betrachtung „in Lebensdauer-Richtung“ bei einer konstanten Last bzw. Beanspruchung durchgeführt werden.

2.2.3. Verteilte Kenngrößen, Ausfallwahrscheinlichkeit

Wie im vorhergehenden Abschnitt erwähnt, versagt ein konkretes Bauteil, wenn seine Belastung die Belastbarkeit übersteigt, bzw. seine lokale Beanspruchung am Ort des Versagens seine Beanspruchbarkeit übersteigt.

Wenn nun eine Serie von Versuchen mit mehreren Bauteilen unter derselben Belastung durchgeführt wird, werden sich unterschiedliche Lebensdauern ergeben, trotz gleichen Versuchsbedingungen und (nominell) gleichen Bauteilen. Die Lebensdauer ist somit keine deterministische, sondern eine statistisch verteilte Größe. Gemeint ist damit, dass aufgrund zufällig schwankender Material- und Herstellbedingungen die Lebensdauer eines Bauteils nicht exakt vorhergesagt werden kann. Dasselbe gilt oft auch für dessen Belastung, aufgrund schwankender Nutzungsbedingungen. Da die lokalen Größen Beanspruchung und Beanspruchbarkeit von den globalen Belastung und Belastbarkeit abgeleitet werden, handelt es sich hierbei ebenfalls um verteilte Größen. Diese werden durch eine statistische Verteilung charakterisiert. Details zu Verteilungen und deren Kennwerte finden sich im Anhang, Kap. 6.1.3. Die Tatsache, dass es sich bei der Lebensdauer um eine verteilte Größe handelt, wird manchmal symbolisch durch Angabe einer Verteilungsdichtefunktion über den Lebensdauerpunkten angedeutet, Bild 7.

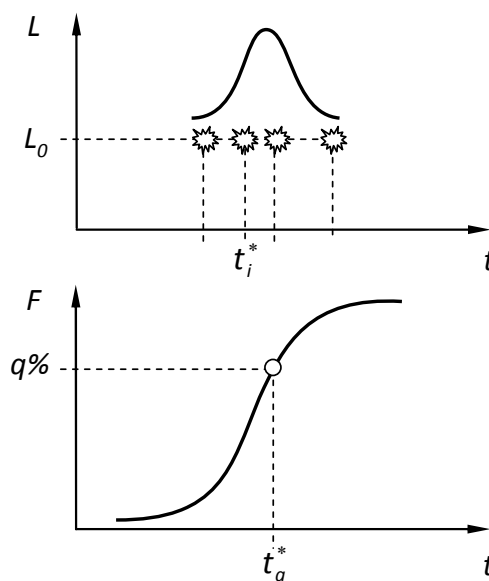


Bild 7: Verteilte Lebensdauer. Die Punkte markieren die variable Lebensdauer t_i^* des i -ten, nominell gleichen Teils bei einer konstanten Belastungshöhe L_0 (oben). Ausfallwahrscheinlichkeit F in Abhängigkeit des Lebensdauermerkmals t (unten).

Der Ansatz verteilter Kenngrößen eröffnet eine ganz neue Sicht auf die Frage, warum Bauteile versagen: Da weder die exakte Beanspruchung, noch die exakte Beanspruchbarkeit eines konkreten Bauteils im Voraus bekannt sind (sondern eventuell nur a-posteriori registriert bzw. ermittelt werden können), kann auch die Frage, ob ein konkretes Bauteil versagen wird nicht deterministisch beantwortet werden. Man kann darauf nur eine Ausfallwahrscheinlichkeit als Antwort angeben. Mit anderen Worten: Man kann nur bestimmen, welcher Anteil aus der Grundgesamtheit aller Bauteile wahrscheinlich ausfallen kann, nicht jedoch, ob ein konkretes Bauteil versagen wird.



Allgemein bezeichnet t_q^* (in der Literatur gelegentlich auch B_q genannt) die Lebensdauer, bis zu der der Anteil q der Erzeugnisse einer Grundgesamtheit ausgefallen ist. Übliche Werte für q sind z.B. 10%, 2% oder 1%. Mathematisch ausgedrückt ist t_q^* das q -Quantil der Verteilung. t_{10}^* bezeichnet z.B. die Lebensdauer, bis zu der 10 Prozent der Erzeugnisse einer Grundgesamtheit ausgefallen sind. Der Median der Verteilung ist das 50%-Quantil t_{50}^* . Bei allgemeinen schiefen Verteilungen unterscheidet sich der Median vom Mittelwert, auch MTTF (mean time to failure) genannt, meistens kann aber eine Beziehung zwischen beiden Größen angegeben werden. t_q^* lässt sich anhand der Ausfallwahrscheinlichkeitskurve $F(t)$ (gegebenenfalls als Gerade in einem passenden Wahrscheinlichkeitspapier) leicht bestimmen. Dazu wird der Schnittpunkt der $q\%$ -Horizontalen mit der Ausfallwahrscheinlichkeitskurve bestimmt und das zugehörige Lebensdauermerkmal auf der t-Achse abgelesen, Bild 7.

Die Zuverlässigkeit wird mit der Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ beschrieben, welche aus der Ausfallwahrscheinlichkeit bestimmt werden kann:

$$R(t) = 1 - F(t). \tag{2.1}$$

2.3. Zeitliches Ausfallverhalten, Ausfallrate und „Badewannenkurve“

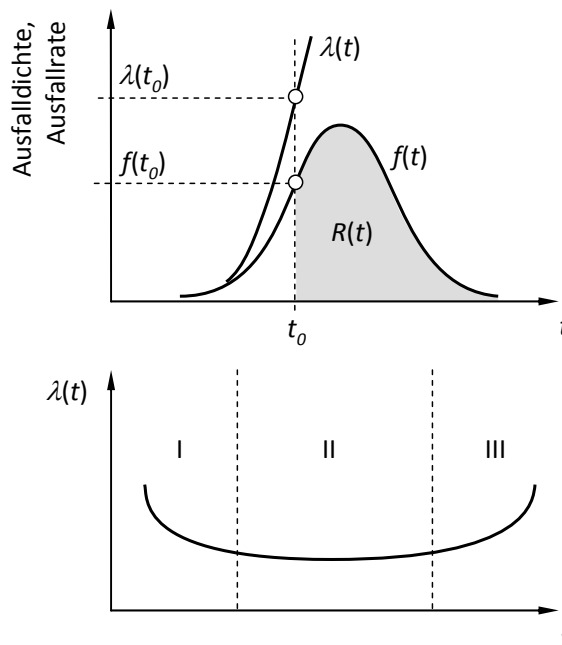


Bild 8: Ausfallrate und „Badewannenkurve“ nach [1]

Besonders im Umfeld der Qualitätssicherung ist es üblich, das Ausfallverhalten durch die Ausfallrate λ zu charakterisieren:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}, \tag{2.2}$$

wobei mit $f(t)$ die Ausfallwahrscheinlichkeitsdichtefunktion und mit $R(t)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t bezeichnet wurden, Bild 8. Die Ausfallrate zu einem bestimmten Zeitpunkt kann empirisch abgeschätzt werden, indem die Anzahl der Ausfälle pro Zeiteinheit auf die Summe der noch nicht ausgefallenen Teile bezogen wird. Diese Schätzung wird Ausfallquote genannt.

Die Ausfallrate lässt sich als Maß für die Wahrscheinlichkeit interpretieren, dass ein Teil ausfällt, wenn es bis zu diesem Zeitpunkt nicht ausgefallen ist, [1] S.23. Bei der Ausfallrate handelt es sich um eine *relative* Größe: die Ausfälle werden auf die Anzahl der noch intakten Einheiten bezogen. Die Rate ist außerdem eine *Zeit-bezogene* Größe, wie der Name schon andeutet: die Ausfälle werden pro

2020-04-06 - SOCOS



Zeiteinheit (Periode, Jahr, Stunde, usw.) angegeben. Insofern ist die Angabe „X-ppm“ keine Ausfallrate.

Der Verlauf der Ausfallrate über die Einsatzdauer von Teilen besitzt einen charakteristischen Verlauf. Aufgrund der Ähnlichkeit mit dem Bild eines Längsschnitts durch eine Badewanne trägt sie den Namen „Badewannenkurve“. Dieser Verlauf besitzt im Allgemeinen drei Abschnitte, wobei nicht jedes Teil diesen typischen Verlauf aufzeigt:

- Abschnitt I zeigt eine abfallende Ausfallrate und ist typisch für Frühausfälle aufgrund von Fertigungs- und Montagefehler. Frühausfallverhalten bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall im folgenden Zeitabschnitt bei Beanspruchungsbeginn hoch ist und mit der Zeit abnimmt. Diese Ausfälle können typischerweise durch Qualitätskontrolle bzw. Versuche an einer Null-Serie aufgefangen werden.
- Abschnitt II zeigt eine konstante Ausfallrate, typisch für Zufallsausfälle aufgrund z.B. von Bedienfehlern und Verunreinigung. Hier ist die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall im folgenden Zeitabschnitt unabhängig von der Vorgeschichte des Erzeugnisses. Innerhalb gleich großer Zeitabschnitte fällt stets der gleiche Anteil der am Anfang jedes Zeitabschnitts noch intakten Erzeugnisse aus. Elektronische Bauteile können diesen Verlauf z.B. aufgrund von kosmischer Strahlung aufweisen. Ausfälle können hier durch eine korrekte Benutzung vermieden werden.
- Abschnitt III weist eine ansteigende Ausfallrate und ist typisch für Degradation, Verschleiß und Ermüdung. In diesem Bereich wird es immer wahrscheinlicher, dass ein bis dahin noch intaktes Erzeugnis innerhalb des folgenden Zeitabschnitts ausfällt. (Zu frühe) Ausfälle in diesem Bereich können nur durch eine richtige Auslegung vermieden werden.

Die Ausfallrate darf nicht mit der absoluten Anzahl von Ausfällen gleichgesetzt werden, wie die folgenden zwei Beispiele zeigen.

BEISPIEL:

Ein Hersteller hat 100 Einheiten produziert und registriert in den nachfolgenden 4 Zeit-Perioden folgende Ausfallzahlen:

Periode	1	2	3	4
Ausfälle in der Periode	10	9	8	7

Handelt es sich hierbei vermutlich um eine sinkende, konstante oder steigende Ausfallrate?

Zur Schätzung der Ausfallrate kann die Ausfallquote herangezogen werden. Aus der folgenden Tabelle ist ersichtlich, dass trotz sinkender Ausfallzahlen, die Ausfallquote annähernd konstant bleibt. Der Effekt ist darauf zurückzuführen, dass die Summe der noch intakten Einheiten im Laufe der Zeit sinkt.

Periode	intakte Einheiten am Anfang der Periode	Ausfälle in der Periode	Ausfallquote, [1/Periode]
1	100	10	0,10
2	90	9	0,10
3	81	8	0,10
4	73	7	0,10



BEISPIEL:

Ein Hersteller produziert 4 Zeit-Perioden lang je 100 Einheiten pro Periode und registriert anschließend folgende Ausfallzahlen:

Periode	1	2	3	4
Ausfälle in der Periode	10	19	27	34

Handelt es sich hierbei vermutlich um eine sinkende, konstante oder steigende Ausfallrate?

Zur Schätzung der Ausfallrate wird wieder die Ausfallquote herangezogen. Aus der folgenden Tabelle ist ersichtlich, dass trotz steigenden Ausfallzahlen, die Ausfallquote annähernd konstant bleibt. Der Effekt ist darauf zurückzuführen, dass die Summe der intakten Einheiten im Laufe der Zeit steigt, da immer wieder neu produzierte Einheiten hinzukommen.

Periode	intakte Einheiten am Anfang der Periode aus Produktionsperiode				Ausfälle in der Periode aus Produktionsperiode				Summe intakte Einheiten am Anfang der Periode	Summe Ausfälle in der Periode	Ausfallquote, [1/Per.]
	0	1	2	3	0	1	2	3			
1	100				10				100	10	0,10
2	90	100			9	10			190	19	0,10
3	81	90	100		8	9	10		271	27	0,10
4	73	81	90	100	7	8	9	10	344	34	0,10

Im Rahmen der Erzeugnisentwicklung wird versucht, die Zuverlässigkeit eines Erzeugnisses systematisch zu erhöhen, d.h. Frühausfälle möglichst zu vermeiden (Qualitätssicherung), den Bereich der „Zufallsausfälle“ (Nutzungszeitraum) zu verbreitern und den Beginn der Phase Verschleiß- und Alterungsausfälle so weit wie nötig hinauszuzögern, Bild 9. Die Untersuchung des Ausfallverhaltens von Erzeugnissen geschieht im Rahmen entwicklungsbegleitender Lebensdaueruntersuchungen, die im Rahmen der Weibull-Theorie ausgewertet werden.

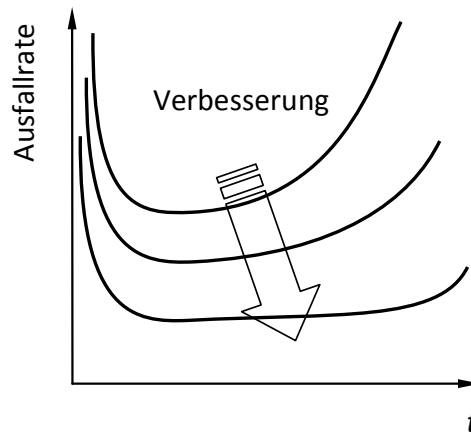


Bild 9: Verbesserung der Zuverlässigkeit im Zuge der Erzeugnisentwicklung (schematisch)

Die Ausfallraten zahlreicher elektronischer Standardbauelemente sind in Ausfallratenkatalogen aufgelistet, z.B. das Militärhandbuch 217 zur Zuverlässigkeitsvorhersage von elektronischen Komponenten [10]. Ausgehend von den darin angegebenen temperaturabhängigen Grundausfallraten der Bauelemente können unter Voraussetzung einfacher Modellannahmen und unter Berücksichtigung von Belastungsfaktoren, Ausfallraten bei konkreten Anwendungsbedingungen berechnet werden. Die Belastungsfaktoren berücksichtigen beispielsweise die mechanische, klimatische und elektrische Beanspruchung.



Allerdings können gemessene und auf Grundlage verschiedener Handbücher berechnete Prognosewerte der Zuverlässigkeit elektronischer Komponenten um bis zu einem Faktor 100 differieren. Die erwähnten Berechnungsmethoden müssen daher kritisch hinterfragt werden:

- Eines der Hauptprobleme ist darin zu sehen, dass die der Bewertung zugrundeliegenden Daten veraltet sind. Die Handbücher werden nicht immer regelmäßig aktualisiert (die letzte Ausgabe von [10] ist z.B. aus dem Jahr 1995), so dass die Angaben nicht heutiger Technologien entsprechen.
- Zum anderen werden wesentliche Einflussgrößen wie Temperaturwechsel, Temperaturgradient, Schock, Vibration, Ein-/Ausschaltvorgänge, Fertigungsqualität und Alterung nicht bzw. nicht realitätsnah berücksichtigt.
- Ein prinzipieller Einwand ergibt sich aus der Tatsache, dass diese Berechnungsmodelle immer mit konstanten Ausfallraten operieren und daher nur Zufallsausfälle (den Bereich II der Badewannenkurve) abdecken können. Grund dafür ist, dass sich in diesem Fall die Berechnung der Systemausfallrate aus den Ausfallraten der einzelnen Elemente besonders einfach gestaltet, siehe Kap. 3.4.5. Bei heutigen elektronischen Komponenten spielt Degradation allerdings eine wichtige Rolle. Degradation führt zu steigenden Ausfallraten und kann mit Modellen wie die Exponentialverteilung, welche von konstanten Ausfallraten ausgehen, nicht erfasst werden.

Aus den oben erwähnten Gründen ist die quantitative Zuverlässigkeitsanalyse von elektronischen Komponenten auf Basis von Handbüchern mit Vorsicht und Verständnis anzuwenden.

FIT (Failures In Time) ist eine Maßeinheit zur Angabe von Ausfallraten elektronischer Bauteile und Komponenten im Bereich von Zufallsausfällen, $\lambda = \text{konstant}$:

$$1FIT = \frac{1}{10^9 h} \quad (2.3)$$

BEISPIEL:

Wenn innerhalb einer Betriebszeit von einem Jahr 7 von 500 Bauelementen ausfallen, so ist die Ausfallrate

$$\lambda = \frac{7}{500 \cdot 8760 h} = 1,598 \cdot 10^{-6} h^{-1},$$

was gleichbedeutend ist mit $\lambda = 1598$ FIT.

Umgekehrt lässt sich bei bekannter Ausfallrate (z.B. aus Tabellenwert) die zu erwartende Zahl von Ausfällen berechnen. Absolvieren beispielsweise 2000 Bauelemente einen 1200 Stunden-Test, so ist bei der obigen Ausfallrate mit etwa $2000 \cdot 1200 h \cdot 1598 \cdot 10^{-9} h^{-1} \approx 4$ Ausfällen zu rechnen.



3. Gestaltung der Zuverlässigkeit

3.1. Generelle Konzepte

Um die Zuverlässigkeit eines Erzeugnisses zu erreichen, gibt es eine Reihe von Ansätzen. Allen gemein ist, dass die erreichte Zuverlässigkeit anschließend verifiziert und validiert werden muss.

1. Testbasierte Auslegung. Bei diesem Ansatz steht während des Designs vor allem die Gestaltung der Funktionalität im Fokus. Schwachpunkte bzgl. Zuverlässigkeit werden durch Tests offengelegt und anschließend durch eine Designmaßnahme behoben. Es folgen weitere Tests, um die Wirksamkeit der Maßnahme zu verifizieren. Der Zyklus „Design⇔Test⇔Fix⇔Test“ wird abgebrochen, wenn die geforderte Zuverlässigkeit anhand eines Tests nachgewiesen wurde.
2. Erfahrungsbasierte Auslegung. Aufgrund von empirischen und qualitativen Erfahrungen ist der Ausleger in der Lage das Design so zu gestalten, dass es zuverlässig ist. Dieser Ansatz setzt Kenntnisse über das Zuverlässigkeitsverhalten früherer Produkte sowie ein Wissen um deren Übertragbarkeit auf das aktuelle Produkt voraus. Diese Kenntnisse stammen typischerweise aus früheren test-, norm- und/oder overdesignbasierten Ansätzen sowie durch Auswertung von Felddaten.
3. Overdesignbasierte Auslegung. Das Design wird so gestaltet, dass die Zuverlässigkeitsanforderungen deutlich übertroffen werden. Dazu wird ein besonders großer Sicherheitsabstand zwischen Beanspruchung und Beanspruchbarkeit angestrebt. Die Wahl dieses Sicherheitsabstandes rührt nicht aus der Kenntnis der Verteilungen von Beanspruchung und Beanspruchbarkeit, sondern leitet sich aus der Erfahrung oder Normen und Regelwerken ab.
4. Norm- und Regelwerkbasierter Auslegung. Die Auslegung erfolgt gemäß den Vorgaben bzw. Auslegungsrichtlinien von Normen und Regelwerken.
5. Auslegung basierend auf der Gestaltung des Designs bzgl. Zuverlässigkeit. In diesem Ansatz wird die Zuverlässigkeit während der Designphase bewusst und aktiv in das Designelement hineinkonstruiert. Ziel ist es dabei eine hohe Treffsicherheit zu erreichen, also „Underdesign“ als auch „Overdesign“ zu vermeiden.

Ausgehend von den aufgrund der Belastungen zu erwartenden Schädigungsmechanismen wird das Designelement so gestaltet, dass die Beanspruchungen innerhalb der Gebrauchsdauer entsprechend den Zuverlässigkeitsanforderungen kleiner bleiben als seine Beanspruchbarkeiten. Die Gestaltung erfolgt durch die optimale Wahl von Systemstruktur und –partitionierung, Lösungsprinzip, Designelementgeometrie (Dimensionierung), –anordnung, Werkstoff und Herstellprozess. Mit Hilfe von auf der rechnerischen Überlagerung von Beanspruchung und Beanspruchbarkeit basierenden Auslegungskonzepten kann im Anschluss die Zuverlässigkeit prognostiziert werden.

Alle Ansätze haben ihre Vor- und Nachteile. Die wichtigsten sind in Tabelle 1 aufgelistet. Welcher Ansatz für die Auslegung eines Designelementes Anwendung findet, ist für das einzelne Designelement zu prüfen und festzulegen. Hauptkriterien sind:

- Neuheitsgrad,
- Wirtschaftlichkeit, d.h. Entwicklungskosten (Testaufwand, Serienanlaufkosten, Übertragbarkeit vorhandener Belastungs-, Beanspruchungs- und Beanspruchbarkeitsdaten sowie Auslegungskonzepte auf Folgegenerationen), Herstellkosten, potentielle Qualitätskosten,
- Schnelligkeit (Time-to-Market),
- zukünftige strategische Bedeutung des Designelementes, sowie
- Kunden- und gesetzliche Anforderungen.



Ansatz	Hauptvorteile	Hauptnachteile
Test-basiert	Kein Vorwissen beim Design nötig, Verifikation am Designelement	Aufwand (Tests, Rekursionen), Zeitbedarf, begrenzte Übertragbarkeit, bei hohem Neuheitsgrad nur schlecht einsetzbar
Erfahrungsbasiert	Aufwand (schnell)	Erfahrungsträger nötig, Übertragbarkeit oft nicht gegeben, nur bei evolutionärer Entwicklung zielführend
Overdesignbasiert	Aufwand (schnell), (Rechts-) Sicherheit	Erhöhte PHEK durch Overdesign, nur bei evolutionärer Entwicklung zielführend
Normbasiert	Aufwand (schnell), (Rechts-) Sicherheit, Akzeptanz	Erhöhte PHEK durch Overdesign, nur bei normierten Bauteilen und Anwendungsfällen möglich
Zuverlässigkeitsgestaltung	Übertragbarkeit, Treffsicherheit, da auf physikalischem Verständnis beruhend, auch bei Neuentwicklungen zielführend	Entwicklungsvorleistungen für Bestimmung Belastung, Beanspruchung, Beanspruchbarkeit und Auslegungskonzept nötig

Tabelle 1: Hauptvor- und -nachteile der 5 Ansätze zur Erreichung von Zuverlässigkeit.

In Tabelle 2 findet sich eine relative Bewertung der 5 Ansätze bzgl. der Hauptkriterien. Je nach der für das einzelne Designelement sachgerechten Gewichtung der Kriterien, können unterschiedliche Ansätze zum Einsatz kommen.

Der Ansatz der Zuverlässigkeitsgestaltung stellt den besten Kompromiss dar, wenn es gilt Designelemente unter der gleichzeitigen Bewältigung von steigenden Beanspruchungen (steigende Lasten und/oder steigenden Leistungsdichten), kürzer werdenden Entwicklungszeiten, steigendem Druck auf die Produktkosten und steigenden Anforderungen zu bewältigen. Diese Kombination tritt heutzutage verstärkt auf. Bei einem hohen Neuheitsgrad ist außerdem nur Zuverlässigkeitsgestaltung zielführend. Darüber hinaus ist nur dieser Ansatz nachhaltig, da durch ihn ein physikalisch basiertes Verständnis des Versagensverhalten des Designelementes entwickelt und damit eine auf zukünftige Generationen übertragbare Wissensbasis aufgebaut werden kann. Diese Wissensbasis steht für zukünftige Entwicklungen als gesichertes und extrapolierbares Erfahrungswissen zur Verfügung. Dadurch amortisieren sich zum einen die Entwicklungsvorleistungen mit der Zeit und zum anderen kann der Schnelligkeitsvorteil eines erfahrungsbasierten Auslegens genutzt werden.

Aus den erwähnten Gründen wird die Anwendung der Zuverlässigkeitsgestaltung empfohlen.

Ansatz	Einsetzbarkeit bei Neuentwicklungen	Entwicklungskosten	Herstellkosten	Risiko von Qualitätskosten	Schnelligkeit (Time-to-Market)
Testbasiert	o	-	o	o	-
Erfahrungsbasiert	-	+	o	-	+
Overdesignbasiert	-	+	-	+	+
Normbasiert	-	+	-	+	+
Zuverl. Gestaltung	+	o	+	o	o

Tabelle 2: Relative Bewertung der 5 Ansätze zur Sicherstellung der Zuverlässigkeit von Designelementen („+“ gute, „-“ schlechte, „o“ durchschnittliche Eignung).



3.2. Aufgabe und Prinzipien

Es ist die Aufgabe der Zuverlässigkeitsgestaltung, das Designelement so zu gestalten, dass seine Beanspruchung innerhalb der Gebrauchsdauer entsprechend den Anforderungen kleiner bleibt als seine Beanspruchbarkeit.

Dies wird erreicht, indem zum einen die Beanspruchung gestaltet wird durch

- Systemstrukturierung und -partitionierung,
- Lösungsprinzip,
- Designelementgeometrie und
- Designelementanordnung

und zum anderen die Beanspruchbarkeit entsprechend gestaltet wird durch

- Lösungsprinzip,
- Designelementgeometrie,
- Werkstoffauswahl und Herstellprozess.

Voraussetzung ist eine vollständige und quantitative Beschreibung der Belastung auf das übergeordnete System und der sich aus der Belastung ableitenden inneren Lasten, die am Freischnitt des Designelements wirken.

Die Prinzipien geben Antwort auf die folgenden grundlegenden Fragen:

- Was ist das Ziel der Zuverlässigkeitsgestaltung?
- Mit welcher Arbeitsweise wird Zuverlässigkeit gestaltet, so dass das Ziel erreicht wird?
- An welchem Objekt wird Zuverlässigkeit gestaltet?
- Wann im Entwicklungsprozess muss Zuverlässigkeit gestaltet werden?

Für den Entwickler stellen die Prinzipien den „Flugkorridor“ dar, innerhalb dessen er die Zuverlässigkeit im Design gestalten kann. Der Führungskraft dienen sie als Basis für die inhaltliche Führung der Zuverlässigkeitsgestaltung.

Die Prinzipien sind:

- **Ausfallvermeidung.** Zuverlässigkeitsgestaltung hat das Ziel, das Auftreten von Ausfällen innerhalb der Gebrauchsdauer zu vermeiden, indem Versagensmechanismen nicht angeregt werden. Ist die Anregung von Versagensmechanismen innerhalb der Gebrauchsdauer nicht zu vermeiden, ist die Zuverlässigkeit so zu gestalten, dass Ausfälle mit einer bzgl. der Problemstellung hinreichend kleinen Ausfallwahrscheinlichkeit vermieden werden. Wie klein die Ausfallwahrscheinlichkeit gewählt werden muss, ist für jeden Anwendungsfall gesondert festzulegen.
- **Gestaltung mit Modellen und Wirkzusammenhängen.** Zuverlässigkeitsgestaltung erfolgt auf Basis der Modelle und Wirkzusammenhänge der Zuverlässigkeit. Im Einzelnen ist die Kenntnis der Zusammenhänge nötig zwischen Belastung – Design, Design – Beanspruchung, Design – Beanspruchbarkeit, Beanspruchung – Schädigungsmechanismen und Zuverlässigkeit – Beanspruchung/Beanspruchbarkeit.
- **Fokussierung auf Designelemente.** Designelemente stehen im Fokus, da alle Erzeugnisse aus ihnen aufgebaut sind und die gleichen Designelemente in unterschiedlichen Erzeugnissen immer wieder verwendet werden. Die Zuverlässigkeitsgestaltung beginnt mit der Systemstrukturierung und -partitionierung entlang des V-Modells. Dies schafft optimale Bedingungen zur Gestaltung



auf Designelementebene. Die Anforderungen werden aus der übergeordneten Ebene für die darunterliegende abgeleitet. Die Verifizierung erfolgt vom Designelement ausgehend hin zum System. Dabei sind insbesondere die Wechselwirkungen zu berücksichtigen.

- **Rechtzeitige Gestaltung.** Da Zuverlässigkeitsgestaltung durch die Gestaltung des Designs erfolgt, muss sie in den Phasen des Produktentstehungsprozesses stattfinden, in denen das Design festgelegt wird. Dies sind Produktinnovation, Projektvorbereitung bzw. Vorentwicklung und Produkt-/Prozesskonzeption. Zuverlässigkeitsgestaltung ist Teil der Produktgestaltung.

Von Produkt-/Prozessentwicklung bis Serienhochlauf wird Zuverlässigkeit verifiziert und validiert. In der Serienproduktion werden zuverlässigkeitsrelevante Parameter durch statistische Prozessregelung (SPC) überwacht und deren Wirkung auf das Erzeugnis experimentell überprüft (Z-Prüfung). Im Betrieb wird Zuverlässigkeit gemessen. Dies dient zum einen der Validierung der Treffsicherheit der Zuverlässigkeitsprognosen und damit der genutzten Auslegungskonzepte und zum anderen zur Schaffung einer Datenbasis (Beanspruchbarkeiten) für zukünftige Entwicklungen.

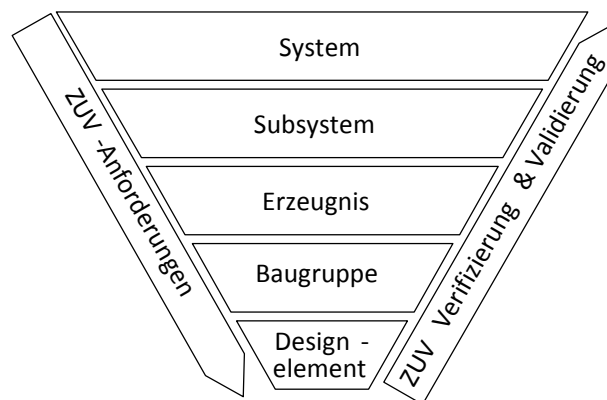


Bild 10: V-Modell einer Produktentwicklung. Anforderungen werden ausgehend vom übergeordneten System heruntergebrochen auf die Designelemente. Verifizierung und Validierung erfolgen in umgekehrter Reihenfolge vom Designelement hin zum System.

3.3. Zuverlässigkeitsanforderungen

Für die Gewährleistung einer ausreichenden Zuverlässigkeit müssen als erstes die Zuverlässigkeitsanforderungen bestimmt werden. Diese werden durch folgende Angaben charakterisiert:

- Für welche Funktionen muss Zuverlässigkeit gewährleistet werden und wie sehen die Fehlermodi aus, bei denen die Funktion nicht mehr erfüllt wird. Diese Zuordnung ermöglicht später eine klare Entscheidung, ob ein Ausfall vorliegt oder nicht. Nähere Details über Funktionen sind in [11], Anlage 3 zu finden.
- Bei welcher Belastung muss Zuverlässigkeit gewährleistet werden. Die Belastung umfasst alle von außen einwirkenden mechanischen, thermischen, elektromagnetischen und chemischen Lasten und damit auch die Umgebungsbedingungen. Die Belastungshöhe ist oft variabel, ihre Definition muss daher Teil-Belastungen mit ihren Häufigkeiten beinhalten. Davon klar abzugrenzen sind allerdings Belastungen außerhalb des Verwendungszwecks (sogenannter Misuse), welche nicht zu den Anforderungen zählen.
- Für welche Nutzungs- und Betriebsdauer muss die Zuverlässigkeit sichergestellt werden. Aus diesen Angaben ist später die relevante Beanspruchungsdauer abzuleiten, welche Grundlage für die Zuverlässigkeitsbewertung des Bauteils darstellt. Je nach Schädigungsmechanismus können unterschiedliche Kenngrößen die „Dauer“ bestimmen: bei Ermüdung typischerweise die Anzahl der Lastwechsel, bei Korrosion die Zeit. Zu beachten ist außerdem, dass bei komplexer Belastung



mit mehreren Komponenten außer der Dauer auch die zeitliche Synchronisation der Komponenten oft von besonderer Bedeutung ist.

- Welches Zuverlässigkeitsmaß muss gewährleistet sein. Damit wird die geforderte Zuverlässigkeit in Form einer Überlebenswahrscheinlichkeit quantifiziert. Dieses Maß muss so gewählt werden, dass auch eine Verifizierung durch Erprobung möglich ist.

Als Zuverlässigkeitsmaß werden manchmal Lebensdauergrößen wie MTTF und B_{10} vorgegeben, siehe auch Kap. 2.2.3. Davon ist generell abzuraten, da es sich hierbei um Lebensdauer- und keine Zuverlässigkeitsvorgaben handelt, welche einerseits die gestalterischen Freiräume der Entwicklung deutlich einschränken und andererseits keinerlei Aussagefähigkeit bezüglich der Überlebenswahrscheinlichkeit des Designelements besitzen, da die Nutzungs- und Betriebsdauer nicht spezifiziert wurden. Ein solches Vorgehen ist nur im Falle einer unbekanntenen Nutzungs- und Betriebsdauer sinnvoll, wie es typischerweise bei Katalogware vorkommt, siehe dazu auch Kap. 3.4.2. Die Vorgabe eines bestimmten Lebensdauerquantils als Zuverlässigkeitsmaß vernachlässigt zudem die Streuung der Lebensdauer, was weitreichende Folgen für die Zuverlässigkeit haben kann, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL:

Ein Hersteller muss für ein Zukaufteil zwischen zwei Zulieferer wählen, die folgende Angaben über die Lebensdauer des Teils gemacht haben: Zulieferer 1: $B_{10} = 5000h$, Zulieferer 2: $B_{10} = 6000h$. Der Hersteller entscheidet sich aufgrund der besseren B_{10} -Werte für den Zulieferer 2.

Innerhalb des Gewährleistungszeitraums von 1000h kommt es allerdings vermehrt zu Reklamationen wegen Ausfällen beim Zukaufteil. Eine nähere Analyse der Ausfallzahlen hat jedoch ergeben, dass der Zulieferer seine Angaben eingehalten hat, wie die nachfolgende Tabelle zeigt:

Zulieferer	Weibull-Parameter		MTTF, [h]	B_{10} , [h]	Ausfälle nach		
	T , [h]	b , [-]			1000h	5000h	6000h
1	7275,4	6	6749,5	5000	7 ppm	10%	
2	26896,7	1,5	24280,9	6000	7143 ppm		10%

Was ist passiert? Der Hersteller hat zwar einen Zulieferer ausgewählt, der für seine Teile nach 6000h eine max. Menge an Ausfällen von 10% angegeben hat, er hat es jedoch versäumt zu berücksichtigen, wie schnell diese Ausfälle erreicht werden, d.h. ob beispielsweise 9% Ausfälle bereits nach 1000h oder erst nach 5000h erreicht werden. Mit anderen Worten: der Hersteller hat es versäumt, die Streuung der Lebensdauer (beschrieben durch den Weibull-Parameter b) richtig zu berücksichtigen.

Übrigens: wäre die Entscheidung aufgrund der MTTF - Angabe der Zulieferer gefallen, wäre das Ergebnis dasselbe. Hier ist der Unterschied zugunsten des Zulieferers 2 noch deutlicher.

Die allgemeinen Anforderungen können, je nach Kunde, auf einem sehr unterschiedlichen Niveau vorgegeben worden sein, die Ableitung von Zuverlässigkeitsanforderungen kann sich deswegen schwierig gestalten:

- Falls die Anforderungen direkt vom Endkunden kommen, sind sie sehr allgemein und „in der Sprache des Kunden“ formuliert. Funktionen sind nur auf der obersten Systemebene (Produkt-Ebene) vorgegeben. Belastungen, sowie Nutzungs- und Betriebsdauern müssen oft entsprechend des Verwendungszwecks angenommen werden. Gleiches gilt für das Zuverlässigkeitsmaß. Der Weg bis zur Bestimmung aller relevanten Zuverlässigkeitsanforderungen ist hier meistens besonders lang. Eine systematische Use-Groups und Use-Case Analyse, sowie die Methode Quality-Function-Deployment (QFD) können helfen, schrittweise die Anforderungen soweit zu quantifizieren, dass Lasten, Nutzungs-/Betriebsdauern, sowie ein geeignetes Zuverlässigkeitsmaß zunächst am Produkt und später an der betrachteten Einheit spezifiziert werden können.
- Für einen Systemlieferanten können quantitative Anforderungen von einem OEM-Kunden für das zu liefernde System vorgegeben worden sein. Diese müssen anschließend auf Vollständigkeit und



Sinnhaftigkeit überprüft werden. Beispielsweise resultieren die Anforderungen an einem Einspritzsystem aus den Gegebenheiten am Fahrzeug. Zuverlässigkeitsanforderungen an den einzelnen Bauteilen sind hier zwar unbekannt, können aber aus den Systemanforderungen abgeleitet werden. Falls keine Anforderungen von einem OEM-Kunden vorliegen, müssen diese mit ihm zusammen erst erarbeitet werden, wie im Fall „Anforderungen vom Endkunden“ beschrieben.

- Bei einem (Unter-)Lieferanten können direkt Funktionen, Lasten, Nutzungs- und Betriebsdauer, sowie Zuverlässigkeitsmaß als Anforderungen am Bauteil vorgegeben worden sein, häufig abgeleitet aus den Anforderungen des übergeordneten Systems. Z.B. resultieren Anforderungen an einem Zahnrad aus den Gegebenheiten am Getriebe.

Folgende Quellen können für die Ermittlung der Anforderungen bzw. deren Ergänzung verwendet werden:

- Kunde; die Erfüllung der Kundenwünsche steht im Zentrum jeder qualitätsorientierten Unternehmenspolitik. Hier ist insbesondere die Variabilität aufgrund unterschiedlicher Benutzer (z.B. Anfänger, Pragmatiker und Semi-Professional), übergeordnete Systeme (z.B. Applikationen in diversen Fahrzeugtypen), Teilanwendungen einschl. Montage, Transport und Service (z.B. Bohren und Drehen) und Betriebsbedingungen (z.B. unterschiedliche geographische Einsatzgebiete) zu berücksichtigen.
- Markt; der Vergleich mit Wettbewerber ist für die erfolgreiche Positionierung am Markt entscheidend.
- gesetzliche Vorgaben und der Stand der Technik; diese sind generell bei der Ableitung und Festlegung von Zuverlässigkeitsanforderungen zu beachten.

Der Kundenzufriedenheit die man erzielen möchte, stehen Entwicklungs- und Produktionskosten entgegen. Außerdem besteht direkter Bezug zwischen der avisierten Zuverlässigkeit und den Qualitätskosten, sowie den Gesamtkosten, die das System verursacht (Total Life Cycle Cost). Die Festlegung von Zielgrößen für die Zuverlässigkeitsanforderungen ist somit eine unternehmerische Entscheidung, mit der eine Positionierung im Markt stattfindet. Die Methode QFD kann an dieser Stelle sowohl bei der Definition von Zielwerten, als auch bei der Ausrichtung der Produktentwicklung auf den Kundenwünschen entscheidend beitragen.

3.4. Quantitative Zuverlässigkeitsbewertung

3.4.1. Übersicht

Der Zusammenhang zwischen Beanspruchung/Beanspruchbarkeit und Zuverlässigkeit kann folgendermaßen zusammengefasst werden, Bild 11:

- Ausgangspunkt der Bewertung sind die Lasten, welche zu einer Schädigung im Bauteil führen können.
- Aus den Lasten wird im Rahmen eines lokalen Konzepts die Beanspruchung abgeleitet. Dafür müssen geeignete Größen gefunden werden, welche den betrachteten Schädigungsmechanismus charakterisieren.
- Parallel dazu wird anhand eines Versuchs die Beanspruchbarkeit ermittelt. Im Rahmen des lokalen Konzeptes handelt es sich um einen Probenversuch. Die Beanspruchbarkeit des Bauteils wird aus der Belastbarkeit der Probe anhand des Konzepts abgeleitet.
- Aus den verteilten Beanspruchung und Beanspruchbarkeit wird die Ausfallwahrscheinlichkeit F berechnet. Die Überlebenswahrscheinlichkeit $R = 1 - F$ ist ein Maß für die Zuverlässigkeit. Sie kann anhand eines Vergleichs mit der geforderten Zuverlässigkeit bewertet werden.



2020-04-06 - SOCOS

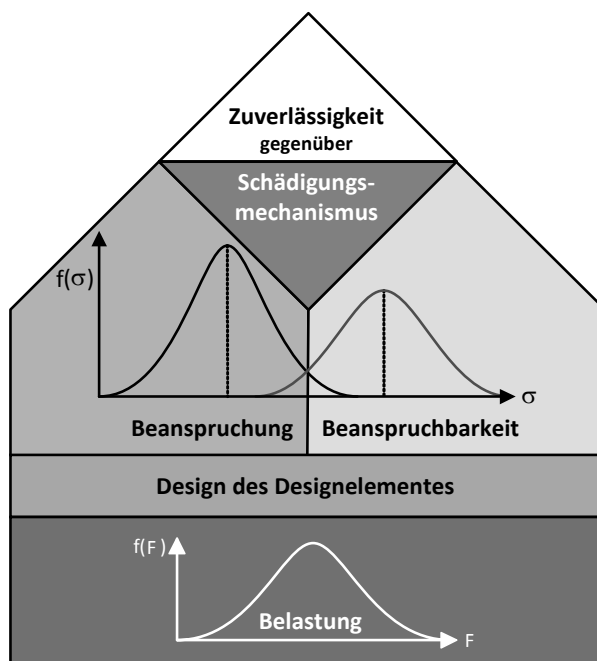


Bild 11: House of Reliability: Von der Belastung zur Ausfallwahrscheinlichkeit

3.4.2. Bestimmung der Beanspruchung

Bei diesem Schritt geht es darum, die Beanspruchung, sowie die Beanspruchungsdauer aus den Anforderungen abzuleiten. Die Beanspruchung ist eine lokale Größe, welche die Auswirkungen der Belastung im Designelement im Hinblick auf den betrachteten Schädigungsmechanismus charakterisiert.

Schädigungsmechanismus	Lasten und Randbedingungen	Beanspruchungsparameter
plastische Verformung	statische mechanische Last	mechanische Spannung oder Dehnung
Kriechen	statische mechanische Last und Temperatur	mechanische Dehnung und Temperatur
Ermüdung bis zum technischen Anriss	variable mechanische Last oder variable Temperatur	Amplitude der mechanischen Spannung oder Dehnung
Rissausbreitung	statische bzw. variable mechanische Last oder konstante bzw. variable Temperatur	Spannungsintensitätsfaktor (SIF) bzw. Schwingweite des SIFs
Verschleiß (Adhäsion, Abrasion, Oberflächenzerrüttung, Tribooxidation)	mechanische Last und Temperatur, Zusammensetzung des Tribosystems, sowie Relativbewegung der Partner	Reibleistungsdichte*
elektrochemische Korrosion	Metall, leitfähiges Medium und Temperatur	elektrisches Potential*
Diffusion	Konzentrationsunterschied	Konzentrationsgradient
Dielektrikumschädigung	elektrisches Feld, Temperatur	elektrische Spannung, Temperatur
Elektromigration (einschließlich Thermo- und Spannungsmigration)	elektrischer Strom, sowie ggf. Temperaturunterschiede und eine statische mechanische Last	elektrische Stromdichte, Temperatur, Temperaturgradient, Gradient der hydrostatischen mech. Spannung

* Als Bestandteil eines lokalen Auslegungskonzeptes noch nicht etabliert

Tabelle 3: Lasten und zugehörige Schädigungsmechanismen



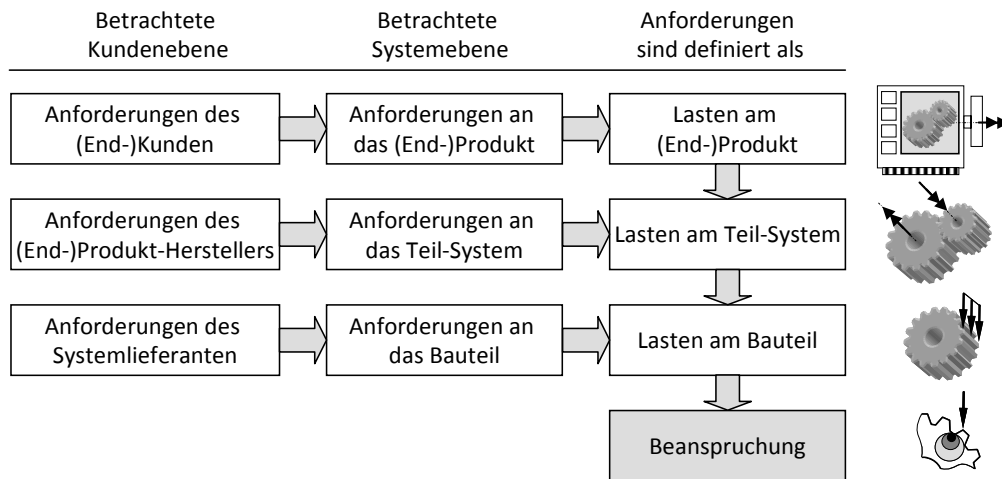


Bild 12: Von den Anforderungen über den Lasten zur Beanspruchung

In Tabelle 3 sind einige Schädigungsmechanismen mit den zugehörigen Beanspruchungsparametern aufgeführt. Weitere Details finden sich in [12,13]. Kombinationen von Schädigungsmechanismen sind ebenfalls möglich, typisches Beispiel ist die thermomechanische Ermüdung (Ermüdung, Kriechen und Oxidation).

Ausgangspunkt für die Bestimmung der Beanspruchung ist immer

- ein konkretes Design,
- eine Belastung $L(t)$, welche auch aus mehreren Komponenten bestehen kann, sowie
- ein Beanspruchungsparameter P als lokale Größe, welche den betrachteten Schädigungsmechanismus charakterisiert.

Die Beanspruchung zu bestimmen heißt, den örtlichen und zeitlichen Verlauf dieser lokalen Größe $P(\mathbf{x},t)$ am Bauteil infolge der Belastung zu bestimmen (\mathbf{x} - Ortsvektor, t - Zeit). Falls für die jeweilige Belastung mehrere Schädigungsmechanismen angeregt werden, sind eventuell auch unterschiedliche lokale Größen und unterschiedliche Beanspruchungen zu berücksichtigen. In diesem Fall steigt die Komplexität der Bewertung enorm.

Bei der Bestimmung der Beanspruchung werden zunächst schrittweise von den Anforderungen Last-Zeitverläufe und daraus Beanspruchungs-Zeitverläufe abgeleitet, Bild 12. Oft ist eine Aufgliederung nach

- Teilanwendung,
- Schädigungsmechanismus und
- Beanspruchungstyp

erforderlich, da die spätere Gewichtung, Superposition und Extrapolation der einzelnen Beanspruchungskomponenten nicht beliebig untereinander möglich ist. Beispielsweise ist eine direkte Addition von Stoß- und Torsionsbelastung nicht möglich, genau so wie die direkte Addition der Beanspruchung aus Teilanwendungen, die eine unterschiedliche Dauer aufweisen. Verschiedene Beanspruchungskomponenten wie Schub- und Normalspannungen können ebenfalls nicht direkt addiert werden.

Belastungshöhe und -dauer können:

- aus den Belastungen des übergeordneten Systems je nach Verwendungszweck bestimmt werden. Sie liegen dann typischerweise in Form von Last-Zeitreihen oder (klassierten) Last-Kollektiven vor. Kollektive haben zwar eine kompakte Form, aber auch Nachteile: So ist die zeitliche Abfolge der



Belastung in einem Kollektiv nicht definiert, außerdem können verschiedene Komponenten einer komplexen Belastung durch Kollektive nicht zeitlich synchronisiert werden. Falls diese Fälle für die Anwendung relevant sind, sollte daher auf Last-Zeitreihen zurückgegriffen werden.

- aus Messungen an ähnlichen Vorgängerprodukten abgeleitet werden. In diesem Fall muss die Übertragbarkeit vom alten zum neuen Produkt sichergestellt werden, oder eine Umbewertung der Belastungen durchgeführt werden.

Die Beanspruchung wird aus den Lasten typischerweise durch Simulation berechnet, kann aber auch anhand analytischer Zusammenhänge abgeleitet werden. Oft handelt es sich hierbei um strukturmechanische Berechnungen mithilfe der Methode der Finiten Elemente (FEM), bei denen aus den äußeren Kräften und Momenten lokale Spannungen berechnet werden, typischerweise für Bewertungen der Schädigungsmechanismen Ermüdung oder Risswachstum. Es können z.B. aber auch lokale Temperaturverläufe aus einer vorgegebenen, eventuell variablen Umgebungstemperatur bzw. einer Wärmequelle berechnet werden, z.B. für Bewertungen des Schädigungsmechanismus Kriechen. Falls linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt wird, können quasi-statische Berechnungen zur Ermittlung des Beanspruchungszustands für eine Einheitslast durchgeführt werden. Die zeitliche Abfolge des Beanspruchungsparameters ergibt sich hier durch Skalierung der Last-Zeit-Reihe $L(t)$ mit dem (ortsabhängigen) Übertragungsfaktor $c_{L=1}(\mathbf{x})$:

$$P(\mathbf{x},t) = c_{L=1}(\mathbf{x}) \cdot L(t) . \quad (3.1)$$

Bei einem nicht-linearen Verhalten muss P direkt aus der Abhängigkeit $P = P(\mathbf{x},L(t))$ abgeleitet werden, was sich deutlich aufwendiger gestaltet. Sowohl beim Beanspruchungsparameter, als auch beim Übertragungsfaktor muss es sich *nicht* um eine skalare Größe handeln. Bei Ermüdung wird für beide Größen beispielsweise die mechanische Spannung verwendet, welche einen Tensor 2.-Stufe mit 6 unabhängigen Komponenten darstellt.

Alternativ kann in Ausnahmefällen auch eine experimentelle Bestimmung der Beanspruchung, z.B. anhand von Dehnungsmessstreifen (DMS) erforderlich werden, oft dann, wenn die Wirkzusammenhänge zwischen Last und Beanspruchung nicht ausreichend bekannt sind. Dies gestaltet sich allerdings schwierig, da die Zugänglichkeit der Messorte für die Ermittlung lokaler Größen oft nicht gegeben ist.

Da es sich bei der Beanspruchung um eine örtlich verteilte Größe handelt und der Ort des Versagens im Voraus generell unbekannt ist, muss eine Zuverlässigkeitsbewertung für die komplette (diskretisierte) Einheit durchgeführt und anschließend nach dem worst-case-Prinzip jener Ort mit der kleinsten Zuverlässigkeit als wahrscheinlichster Versagensort bestimmt werden. Darauf verzichtet werden kann nur dann, wenn z.B. aus Erfahrung der Versagensort im Voraus bekannt ist.

Schwieriger gestaltet sich oft die Ermittlung der Beanspruchungsdauer. Dies ist jene Dauer, während die der betrachtete Schädigungsmechanismus wirkt, gemessen in einer schädigungsmechanismus-spezifischen Einheit. Sie muss aus der Betriebs- und Stillstandsdauer abgeleitet werden, bei denen es sich typischerweise um reale Zeiteinheiten handelt.

Folgendes Vorgehen wird empfohlen:

1. Zunächst ist die Einheit zu bestimmen, in der die Beanspruchungsdauer gemessen werden soll. Die zwei häufigsten Fälle sind
 - a. reale Zeiteinheiten (Stunden, Tage, Jahre etc.) für Zeit-orientierte Schädigungsmechanismen wie z.B. Korrosion oder Kriechen und
 - b. Anzahl Lastwechsel für den Schädigungsmechanismus Ermüdung.
2. Danach müssen Nutzungsdauer und Nutzungsschema anhand einer Use-Case und Use-Groups Analyse bestimmt werden. Daraus ergibt sich die Aufteilung der Nutzungsdauer in Betriebs- und Stillstandsdauer.



3. Als Nächstes müssen jene Anteile der Betriebs- und Stillstandsdauer bestimmt werden, während der der Schädigungsmechanismus wirkt (Beanspruchungsdauer). Lastwechselorientierte Schädigungsmechanismen wie Ermüdung werden wahrscheinlich hauptsächlich während der Betriebsdauer wirken, Zeit-orientierte wie Korrosion ggf. während der gesamten Nutzungsdauer (Betriebs- und Stillstandsdauer). Es können aber auch unerwartete Effekte auftreten: So kann eine elektronische Komponente in einem Fahrzeug auch dann unter Spannung stehen, während das Fahrzeug nicht betrieben wird, was zu wechselnden thermischen Spannungen und damit zu Ermüdung führen kann. Oder: die Korrosion einer Komponente kann während des Betriebs im Fahrzeug durch eine erhöhte Temperatur unterbunden sein, so dass diese nur während der Stillstandszeit geschädigt wird.
4. Als Letztes wird die Gesamt-Beanspruchungsdauer auf die Beanspruchungsdauern der einzelnen Teilanwendungen verteilt. Dazu sind oft übergeordnete Annahmen über die relative Häufigkeit der einzelnen Teilanwendungen erforderlich, welche auf einer möglichst objektiven Grundlage getroffen werden müssen. So kann beispielsweise der relative Anteil von Stadt-, Land- und Autobahnfahrten oder bestimmter Fahrmanöver anhand statistischer Erhebungen über das Fahrverhalten bestimmt werden. Gleiches gilt für die relative Häufigkeit von Anwendungen bei niedriger bzw. hoher Außentemperatur, Feuchte etc., dazu können Wetterstatistiken der jeweiligen Region Auskunft geben.

Aus den bisherigen Ausführungen wird ersichtlich, dass keine allgemeingültigen Vorschriften für die Ableitung der Beanspruchungsdauer formuliert werden können und jeder Einzelfall separat analysiert werden muss.

BEISPIEL:

Eine Kolben-Pumpe wird über einen 3-fach Nocken an einer Antriebswelle betrieben. Die Anlage, zu der die Pumpe gehört, soll 20 Jahre lang genutzt werden und ist in einem 1-Schicht-Zyklus 8h pro Tag in Betrieb. Die Welle dreht sich mit konstanten 3000 U/min während die Anlage im Betrieb ist. Für die Ermittlung des Beanspruchungsumfangs hinsichtlich Ermüdung eines Bauteils in der Pumpe, welches durch Druckstöße im Pumpenraum belastet wird, kann folgendermaßen vorgegangen werden:

Zunächst ist die Einheit zu bestimmen, in der der Beanspruchungsumfang gemessen werden soll, bei Ermüdung sind dies die Anzahl der Lastwechsel. Als nächstes werden die Anteile der Betriebs- und Stillstandsdauer bestimmt, bei denen der Schädigungsmechanismus Ermüdung wirkt, im vorliegenden Fall nur während der Betriebsdauer. Diese ist allerdings nicht direkt vorgegeben, sondern muss aus der Nutzungsdauer und dem Nutzungsschema berechnet werden:

$$T_B = 20 \text{ Jahre} \cdot 230 \text{ Tage/Jahr} \cdot 8 \text{ h/Tag} \cdot 60 \text{ min /h} = 2208000 \text{ min}$$

Dabei wurde angenommen, dass die Anlage 230 Tage im Jahr in Betrieb ist. Aus der Betriebsdauer können nun die Anzahl der Kolbenhübe bestimmt werden:

$$N_K = T_B \text{ min} \cdot 3000 \text{ U/min} \cdot 3 = 19,872 \cdot 10^9.$$

Da aus früheren Druck-Messungen bekannt ist, dass pro Kolbenhub ca. 10 Druck-(Nach-)Schwingungen entstehen, ergibt sich für die Anzahl der Lastwechsel:

$$N = N_K \cdot 10 = 198,72 \cdot 10^9.$$

Ein besonderes Vorgehen bei der Bestimmung der Beanspruchung ist bei sogenannter Katalogware zu berücksichtigen. Hierbei handelt es sich um Produkte, welche ein breites Anwendungsspektrum besitzen und bei denen es oft unklar ist, wie die zukünftige Nutzung und insbesondere die Nutzungsdauer aussieht.

In einem solchen Fall muss der Hersteller potentielle Anwendungen in typische Klassen zusammenfassen und innerhalb jeder Klasse Lasten und Beanspruchungen ableiten, wie oben beschrieben. Die Bewertung der Zuverlässigkeit seitens des Herstellers erfolgt hier jedoch nicht für eine im Voraus festgelegte Beanspruchungsdauer, sondern indirekt durch Angabe der Lebensdauer



des Produktes für die jeweilige Anwendungsklasse. Der Anwender kann so jene Beanspruchungsdauer bestimmen, bei der eine bestimmte Zuverlässigkeit gewährleistet ist, nachdem er die Anwendungsklasse gewählt hat, die für seine konkrete Anwendung am sinnvollsten erscheint. Das Vorgehen ist im Bild 13 dargestellt, weitere Details zur Darstellung von Lebensdauerdaten im Wahrscheinlichkeitsnetz finden sich im Kapitel 4.3.2.

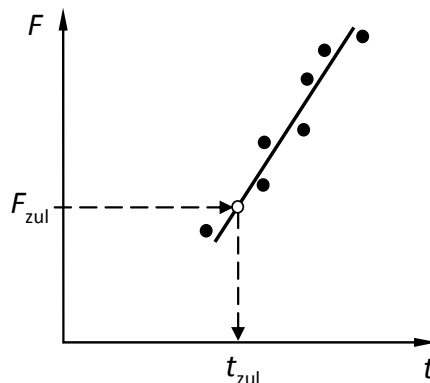


Bild 13: Ableitung der Beanspruchungsdauer aus der zulässigen Ausfallwahrscheinlichkeit anhand der Lebensdauer bei Katalogware (Darstellung im Wahrscheinlichkeitspapier)

Nach Ermittlung aller Beanspruchungskomponenten erfolgt deren Superposition zu einem skalaren Vergleichsbeanspruchungs-Zeitverlauf und anschließend eine Klassierung zu einem Beanspruchungskollektiv. Unter Klassieren versteht man einen Vorgang, bei dem der zeitliche Verlauf der Beanspruchungs-Zeitverläufe in einzelne schädigungsrelevante Teile zerlegt wird, welche anschließend in Klassen zusammengefasst werden. Für den Schädigungsmechanismus „Ermüdung“ spielen vor allem die Amplituden der Spannungsänderungen eine Rolle, aber auch die mittlere Spannung bei der die Spannungsänderungen stattfinden. Da bei einem Kollektiv, welches die Basis für eine Schädigungsbewertung bildet, die Information über die Mittelspannungen verloren geht, müssen die Amplituden „schädigungsäquivalent“ auf eine bestimmte Mittelspannung transformiert werden. Außerdem muss sichergestellt werden, dass die Einstufen - Beanspruchbarkeitskennlinie (Wöhler-Linie) damit kompatibel ist, d.h. dieselbe Mittelspannung aufweist.

Im Anschluss wird eine Schädigungsbewertung durchgeführt, das Vorliegen entsprechender Beanspruchbarkeiten vorausgesetzt. Das Vorgehen wird in Kap. 3.4.6 zusammengefasst.

3.4.3. Bestimmung der Beanspruchbarkeit

Als Beanspruchbarkeit wird die maximal ertragbare Beanspruchung eines Designelementes für einen festgelegten Beanspruchungsumfang und für einen gegebenen Schädigungsmechanismus bezeichnet. Sie wird rechnerisch aus der Belastbarkeit ermittelt, welche sich unmittelbar aus einem Versuch ergibt. Die Versuchsführung erfolgt typischerweise derart, dass die Belastungshöhe L_i konstant gehalten wird, und mehrere Prüflinge solange belastet werden, bis sie ausfallen. Der Versuch, bei dem die Belastung gleichförmig auf verschiedene Niveaus bis zum Ausfall aufgebracht wird, heißt Wöhlerversuch. Die Zeit bis zum Ausfall stellt die (variable) Lebensdauer der Prüflinge t_i^* dar. Durch eine statistische Auswertung werden bei gegebener Lasthöhe L_i Parameter der Verteilung wie z.B. der Median $t_{50}^*(L_i)$ ermittelt. Das Vorgehen wird anschließend für eine andere Lasthöhe wiederholt.

Falls die Anwendung der Daten in einem lokalen Konzept angestrebt wird, kann anschließend die Umrechnung der Last L_i in eine lokale Größe am Versagensort (der Beanspruchung) s_i erfolgen. In diesem Fall werden meisten Probenversuche durchgeführt. Der Wöhler-Versuch kann aber auch an Bauteilen durchgeführt werden, um Belastbarkeiten für Last-basierte Bewertungen zu ermitteln. Um eine einheitliche Behandlung beider Fälle sicherzustellen, wird im Folgenden ein Parameter P_i eingeführt, welcher sowohl für eine Last L_i als auch für eine Beanspruchung s_i stehen kann, Bild 14.



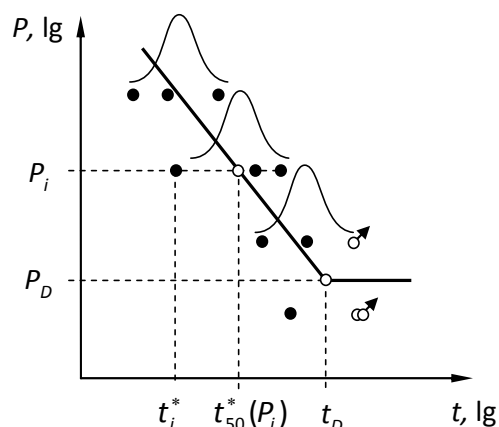


Bild 14: Wöhlerversuch und Wöhlerlinie. Die ausgefüllten Kreise markieren den Zeitpunkt des Ausfalls bei einem bestimmten Niveau des Parameters P , die leeren Kreise mit Pfeil sind Versuche, die ohne Ausfall beendet wurden.

Mit sinkender Belastung steigt die mittlere Lebensdauer an. In doppelt-logarithmischer Auftragung kann diese Beziehung typischerweise als Linie dargestellt werden. Unter einer gewissen Schwelle steigen die Lebensdauern so stark an, dass die für den Versuch realistischerweise zur Verfügung stehenden Zeit überschritten wird und kein Ausfall ermittelt werden kann. Bei dieser Schwelle handelt es sich um die sogenannte Dauerfestigkeit. Die Zeitspanne bis zur Erreichung der Dauerfestigkeit wird Zeitfestigkeit genannt. Vereinfacht wird oft angenommen, dass die Wöhlerlinie danach horizontal verläuft, obwohl für manche Werkstoffklassen ein zwar sehr flacher, jedoch nicht horizontaler Verlauf nachgewiesen werden kann.

Die mathematische Beschreibung der Wöhlerlinie erfolgt durch folgende Gleichung:

$$\frac{t}{t_D} = \left(\frac{P}{P_D} \right)^{-k} \quad \text{für } P \geq P_D \quad \text{und } t = \infty \quad \text{für } P < P_D, \quad (3.2)$$

wobei mit P_D die sogenannte Dauerfestigkeit und mit t_D der Übergangs- (Abknick-)Punkt von Zeit- zur Dauerfestigkeit bezeichnet wurde. Der Wöhler-Exponent k bestimmt die Neigung der Wöhlerlinie, je größer k , desto flacher der Verlauf im Bereich der Zeitfestigkeit. t bezeichnet allgemein das Lebensdauermerkmal, welches für bestimmte Schädigungsmechanismen unterschiedlich aussehen kann. Im Falle von Ermüdung wird beispielsweise traditionell die Variable N zur Bezeichnung der Anzahl der Lastwechsel verwendet. Bei den Größen handelt es sich um Median-Werte von Belastbarkeit bzw. Beanspruchbarkeit, der Index „50“, sowie der Superskript „*“ wurden jedoch der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

Gl. (3.2) wird auch als Coffin – Manson Gesetz bezeichnet und oft zur Beschreibung der Lebensdauer bei Ermüdung infolge mechanischer oder thermischer Belastung verwendet. Diese Beziehung wird auch in vielen weiteren Fällen verwendet, wie z.B. zur Charakterisierung der Lebensdauer von Isolatoren unter Einwirkung einer elektrischen Spannung [12], S.259.

In manchen Fällen kann, anhand physikalisch-theoretischer Zusammenhänge, auch eine andere Beziehung zwischen P und t abgeleitet werden. Typisches Beispiel ist folgende Beziehung:

$$\frac{t}{t_0} = \exp\left(\frac{c}{P} - \frac{c}{P_0}\right), \quad (3.3)$$

welche direkt aus der bekannten Arrhenius - Gleichung zur Beschreibung der Geschwindigkeit chemischer Reaktionen abgeleitet wurde. Mit c wurde dabei das Verhältnis E_a/K von Aktivierungsenergie E_a und Boltzmann-Konstante $K = 8,6E-5$ eV/K bezeichnet, allgemein kann c aber auch als eine freie Konstante aufgefasst werden, welche an Versuchsergebnissen angepasst werden



muss. Diese Gleichung wird oft zur Beschreibung der Lebensdauer im Falle einer Schädigung durch Temperatureinwirkung verwendet, so dass $P = T$ (T -Absoluttemperatur in Kelvin).

Die Motivation dazu liefert die Modellvorstellung, dass bei der Schädigung ein temperaturabhängiger, physikalisch-chemischer Prozess abläuft, welcher erst nach Erreichung eines kritischen Stoffumsatzes zum Ausfall führt, so dass die Lebensdauer t umgekehrt - proportional zur Reaktionsgeschwindigkeit v ist, welche durch die Arrhenius - Gleichung

$$v(T) = v_0 \exp\left(-\frac{c}{T}\right) \tag{3.4}$$

beschrieben wird (mit v_0 wurde eine Materialkonstante bezeichnet). Aus

$$t \sim \frac{1}{v(T)} \text{ folgt } \frac{t}{t_0} = \frac{v(T_0)}{v(T)} \tag{3.5}$$

und mit der Verallgemeinerung $T = P$ daraus unmittelbar Gl. (3.3). Weitere theoretische Beziehungen zwischen Beanspruchung und Lebensdauer sind in [12], Kap. 7.4 aufgeführt.

3.4.4. Komponentenzuverlässigkeit

3.4.4.1. Wahre Ausfallwahrscheinlichkeit

Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird aus den Verteilungen von Beanspruchbarkeit und Beanspruchung bestimmt, Bild 15.

Es wird angenommen, dass die bewertete Größe lognormalverteilt ist, d.h. der Logarithmus der Größe ist normalverteilt. Wir bezeichnen mit $P = \lg(X)$ also den Logarithmus zur Basis 10 entweder der Belastung, oder der Beanspruchung, oder der Beanspruchungsdauer, bzw. mit $P^* = \lg(X^*)$ entsprechend den Logarithmus der Belastbarkeit, Beanspruchbarkeit, oder Lebensdauer (das Vorgehen ist in allen drei Fällen identisch). Die Verteilungsdichtefunktionen von P und P^* sind gegeben durch

$$f_p(P, \bar{P}, s_p^2), f_{p^*}(P^*, \bar{P}^*, s_{p^*}^2). \tag{3.6}$$

Mit \bar{P}, \bar{P}^* wurden die Mittelwerte von P und P^* bezeichnet, mit $s_p^2, s_{p^*}^2$ ihre Varianzen. Für die Bewertung wird zunächst eine Hilfsvariable

$$z = P^* - P \tag{3.7}$$

eingeführt. Aus der Normalverteilung von P und P^* folgt unmittelbar die Normalverteilung von z , mit

$$f_z(z, \bar{z}, s_z^2), \bar{z} = \bar{P}^* - \bar{P}, s_z^2 = s_p^2 + s_{p^*}^2. \tag{3.8}$$

Ausfälle liegen vor, wenn $P > P^*$, d.h. wenn die Beanspruchung höher ist als die Beanspruchbarkeit, was identisch ist zu $z < 0$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist der relative Anteil dieser Fälle unter allen möglichen Fällen und kann angegeben werden mit

$$F = \int_{-\infty}^0 f_z(z) dz. \tag{3.9}$$

Durch eine Transformation lässt sich die explizite Auswertung des obigen Integrals vermeiden. Wir führen die Variable u ein,

$$u = \frac{z - \bar{z}}{s_z}, \tag{3.10}$$

so dass diese standard-normalverteilt ist (Mittelwert 0 und Standardabweichung 1) und bezeichnen mit u_0 folgenden Ausdruck:



$$u_0 = u(z=0) = -\frac{\bar{z}}{s_z} . \tag{3.11}$$

Daraus folgt für die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$F(u_0) = \int_{-\infty}^{u_0} f_u(u) du . \tag{3.12}$$

Dieses Integral kann von Tabellenkalkulationsprogrammen wie Microsoft-Excel berechnet werden und ist im Anhang, Kap. 6.3.1 tabellarisch angegeben. Eine grafische Darstellung ist in Bild 15 unten zu finden.

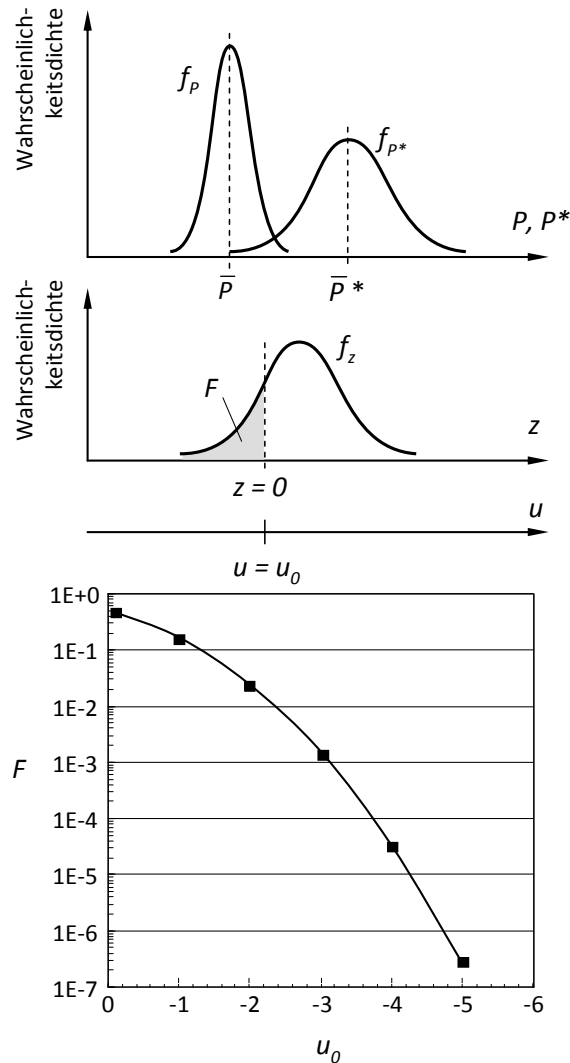


Bild 15: Ausfallwahrscheinlichkeit für normal oder lognormalverteilte Größen

Zusammenfassend kann die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit also wie folgt beschrieben werden:

1. Gegeben sind die Mittelwerte und Varianzen von P und P^* mit $\bar{P}, s_p^2, \bar{P}^*, s_{p^*}^2$. Berechne

$$u_0 = -\frac{\bar{P}^* - \bar{P}}{\sqrt{s_{p^*}^2 + s_p^2}} . \tag{3.13}$$

2. Lese den Wert $F(u_0)$ der Standard-Normalverteilung aus Kap. 6.3.1 ab, dies ist die Ausfallwahrscheinlichkeit. Die Zuverlässigkeit ist $R = 1 - F$.



3. Bewerte, ob die vorliegende Zuverlässigkeit größer ist als die erforderliche ($R \geq R_{erf}$).

3.4.4.2. Vereinfachte Ausfallwahrscheinlichkeit

Oft ist die Verteilung der Beanspruchung nicht bekannt. Vereinfacht wird deswegen als Beanspruchung ein fester Wert P angenommen, der immer eintritt, Bild 16.

Die Bewertung vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$\bar{z} = \bar{p}^* - P, \tag{3.14}$$

$$s_z^2 = s_{p^*}^2, \tag{3.15}$$

$$u_0 = -\frac{\bar{p}^* - P}{s_{p^*}}. \tag{3.16}$$

Allerdings kann gezeigt werden, dass dies nur dann ein konservatives Vorgehen darstellt, wenn P ein hohes Quantil der (unbekannten) Verteilung der Beanspruchung darstellt (z.B. 99%), ansonsten ist die berechnete vereinfachte Ausfallwahrscheinlichkeit kleiner als die wahre. Details dazu finden sich in [5], S.311f.

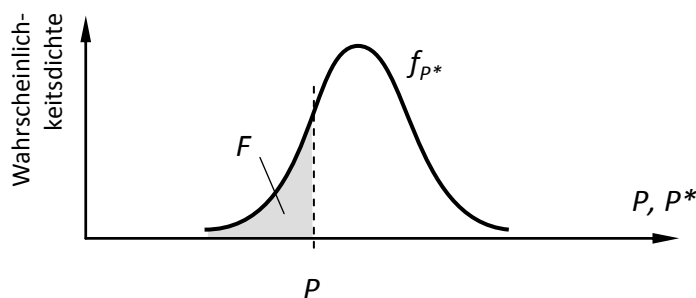


Bild 16: Vereinfachte Ausfallwahrscheinlichkeit

3.4.4.3. Sicherheitsfaktoren

Zur Bewertung der Zuverlässigkeit kann alternativ anstelle der Überlebenswahrscheinlichkeit, auch ein Sicherheitsfaktor

$$j = \frac{X_{50}^*}{X_{50}}, \tag{3.17}$$

verwendet werden, wobei mit X_{50}^* der Median (Wert mit 50%-Ausfallwahrscheinlichkeit) der lognormalverteilten Größen Belastbarkeit, Beanspruchbarkeit bzw. Lebensdauer und mit X_{50} der Median der lognormalverteilten Größen Belastung, Beanspruchung, bzw. Beanspruchungsdauer bezeichnet wurden (und *nicht* die Mittelwerte der entsprechenden Größen). Die Bewertung erfolgt durch den Vergleich von j mit einer erforderlichen Sicherheit j_{erf} und ist erfolgreich, falls $j \geq j_{erf}$. Der Sicherheitsfaktor wird grafisch bei einer logarithmischen Skala oft als Abstand zwischen den Logarithmen der Medianwerte aufgetragen, Bild 17.

Die Angabe eines Sicherheitsfaktors stellt eine Alternative zur Bewertung der Zuverlässigkeit anhand einer Überlebenswahrscheinlichkeit dar. Diese wird zwar traditionell oft verwendet, hat jedoch den entscheidenden Nachteil, dass eine relativ willkürliche erforderliche Sicherheit vorgegeben werden muss. Als Basis für deren Bestimmung können Richtlinien oder Erfahrungswerte herangezogen werden. Diese korrelieren jedoch in den seltensten Fällen mit realen Ausfallzahlen, so dass die Verbindung zwischen Feldverhalten und Auslegung aufgeweicht wird.



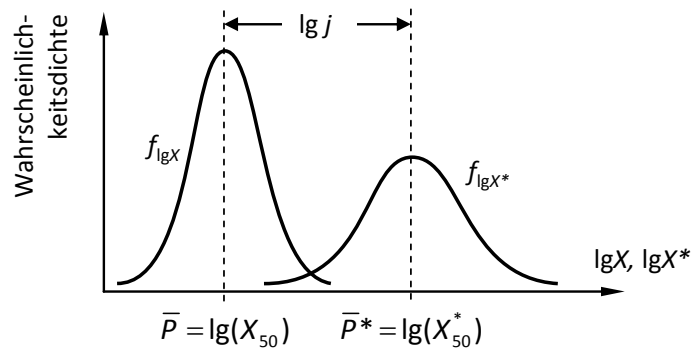


Bild 17: Darstellung des Sicherheitsfaktors

Durch eine statistische Begründung der erforderlichen Sicherheit kann jedoch gezeigt werden, dass beide Vorgehensweisen äquivalent sind. Die Beziehung zwischen Sicherheitsfaktor und Ausfallwahrscheinlichkeit kann wie folgt abgeleitet werden.

Durch logarithmieren von Gl. (3.17) und unter Berücksichtigung der Beziehung (siehe [6], S.71)

$$\bar{P} = E(\lg(X)) = \lg(X_{50}), \tag{3.18}$$

$$\bar{P}^* = E(\lg(X^*)) = \lg(X_{50}^*), \tag{3.19}$$

folgt mit Gl. (3.8) und (3.11), dass

$$\lg j = \bar{P}^* - \bar{P} = \bar{z} = -u_0 s_z. \tag{3.20}$$

Mit E(.) wurde dabei der Erwartungswert einer Zufallsvariable bezeichnet. Aus Gl. (3.20) folgt

$$j(u_0) = 10^{-u_0 s_z}. \tag{3.21}$$

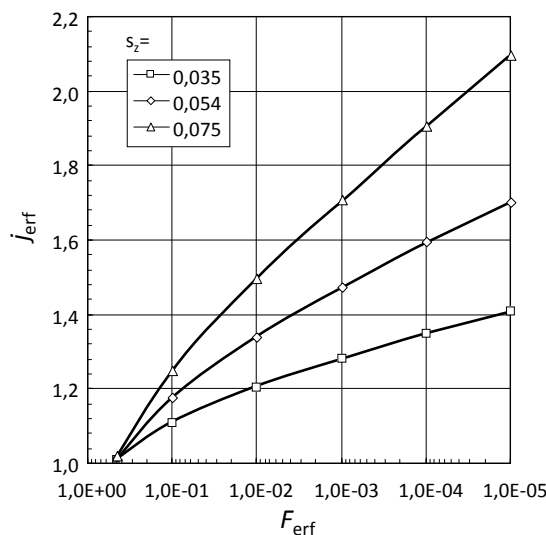


Bild 18: Erforderliche Sicherheit in Abhängigkeit von der erforderlichen Ausfallwahrscheinlichkeit bei unterschiedlichen Werten für s_z .

Andererseits hängt die Ausfallwahrscheinlichkeit F nach Gleichung (3.12) ebenfalls von u_0 ab, d.h. für eine gegebene Streuung s_z besteht eine Beziehung zwischen $j(u_0)$ und der Zuverlässigkeit $R(u_0) = 1 - F(u_0)$. Falls also, bei einer bekannten und vorgegebenen Streuung s_z , die erforderliche Sicherheit aus $u_{0,erf}$ nach Gl. (3.21) abgeleitet wurde:

$$j_{erf} = 10^{-u_{0,erf} s_z} \tag{3.22}$$

und $u_{0,erf}$ aus der erforderlichen Zuverlässigkeit R_{erf} nach Gl. (3.12) bestimmt wurde:



$$1 - R_{\text{erf}} = \int_{-\infty}^{u_{0,\text{erf}}} f_u(u) du, \tag{3.23}$$

so sind beide Vorgehensweisen äquivalent. Die Beziehung ist in Bild 18 visualisiert.

BEMERKUNG:

Das im Bereich der Ermüdung oft verwendete Streumaß $1/T = X_{R=10\%} / X_{R=90\%} > 1$ kann mittels der Beziehung

$$s = \frac{\lg(1/T)}{2,56} \tag{3.24}$$

in s umgerechnet werden. Mit $X_{R=10\%}$ bzw. $X_{R=90\%}$ wurde das Quantil einer beliebigen streuenden lognormalverteilten Größe bezeichnet, z.B. Beanspruchung, Beanspruchbarkeit oder Lebensdauer, entsprechend bei einer Überlebenswahrscheinlichkeit von $R=10\%$ bzw. $R=90\%$.

3.4.4.4. Allgemeine Verteilungsfunktionen

In den vorhergehenden Kapiteln wurden normal- oder lognormalverteilte Größen vorausgesetzt. Dies ist nicht immer eine sinnvolle Annahme. Wie ein Vorgehen bei allgemeiner Verteilung der Größen aussehen kann wird nachfolgend beschrieben.

Die Verteilung von Belastung, Beanspruchung oder Beanspruchungsdauer wird durch die Verteilungsdichtefunktionen f_P beschrieben, die Verteilung von Belastbarkeit, Beanspruchbarkeit und Lebensdauer wird entsprechend durch f_{P^*} angegeben. Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist allgemein der Anteil an zu erwartenden Ausfällen, bezogen auf allen möglichen Fällen.

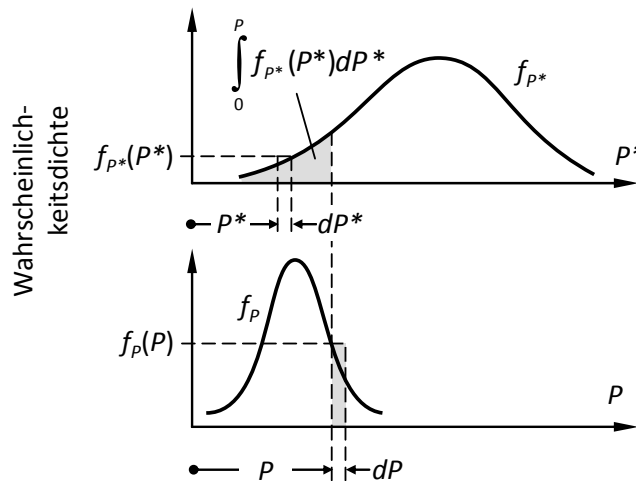


Bild 19: Ausfallwahrscheinlichkeit aus der verteilten Belastung und Belastbarkeit bzw. Beanspruchung und Beanspruchbarkeit

Betrachten wir zunächst einen konkreten Wert für P , Bild 19. Ausfälle sind hier für alle Bauteile mit $P^* < P$ zu erwarten, d.h. Belastbarkeit kleiner als die Belastung, oder Beanspruchbarkeit kleiner als die Beanspruchung, oder die Lebensdauer kleiner als die Beanspruchungsdauer. Bauteile im Bereich $(P^*, P^*+dP^*]$ haben die Auftretenswahrscheinlichkeiten $f_{P^*}(P^*)dP^*$, s. Kap. 6.1.3.1. Diese Bauteile müssen zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit für alle $0 < P^* < P$ aufsummiert werden. Da es sich um eine unendlich große Grundgesamtheit handelt (Kenngrößen werden durch Verteilungen beschrieben) erfolgt die Aufsummierung durch Integralbildung:

$$\int_0^P f_{P^*}(P^*) dP^* . \tag{3.25}$$



Obiges Integral stellt die sogenannte bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit für ein bestimmtes P (Belastung, Beanspruchung oder Beanspruchungsdauer) dar.

Um die (gesamt-) Ausfallwahrscheinlichkeit für alle möglichen P auszurechnen, muss nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit (siehe dazu Kap. 6.1.1 im Anhang) jede bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit mit ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit gewichtet, und über alle möglichen Fälle aufsummiert werden. Die Lasten/Beanspruchungen/Beanspruchungsdauern im Bereich $(P, P+dP]$ haben die Auftretenswahrscheinlichkeit $f_p(P)dP$, die Aufsummierung erfolgt erneut durch Integralbildung. Für die Ausfallwahrscheinlichkeit folgt schließlich:

$$F = \int_0^{\infty} f_p(P) \left[\int_0^P f_{p^*}(P^*) dP^* \right] dP . \tag{3.26}$$

Bei der obigen Formel handelt es sich um eine allgemeine Formulierung für beliebige Verteilungen. In der Praxis werden meistens Sonderfälle betrachtet, welche eine vereinfachte Berechnung erlauben, so dass die Auswertung obiger Integrale vermieden werden kann.

3.4.4.5. Rechnerische Lebensdauer bei variabler Beanspruchung

Für die experimentelle Ermittlung der Lebensdauer von Bauteilen bei variablen Belastungen sind immer wieder Versuche erforderlich. Es stellt sich die Frage, ob diese Lebensdauer nicht rechnerisch aus der Wöhlerlinie (Einstufen-Belastbarkeit) und dem Lastkollektiv abgeleitet werden kann. Ähnliches gilt für die lokale Betrachtung eines Beanspruchungskollektivs und einer Beanspruchbarkeits - Wöhlerlinie. In einem gewissen Rahmen ist dies durch Anwendung des Konzeptes der Schadensakkumulation möglich, welches im Folgenden erläutert werden soll. Um eine einheitliche Behandlung der lokalen und globalen Variante sicherzustellen, wird wie gewohnt der Parameter P eingeführt, welcher sowohl für eine Last L als auch für eine Beanspruchung s stehen kann. Mit t wird allgemein das relevante Lebensdauermerkmal bezeichnet, bei Ermüdung handelt es sich hier um die Lastwechselzahl N .

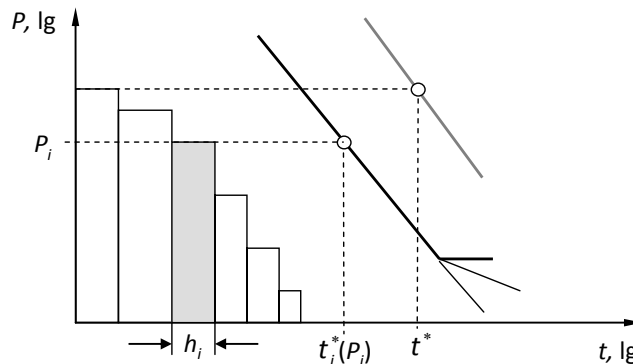


Bild 20: Von der Wöhler- zur Gassner- (Lebensdauer)-Linie durch Schadensakkumulation

Bei Einstufenbelastung einer bestimmten Höhe P_i stellt der Schnittpunkt der Wöhlerlinie mit dieser Belastung die Lebensdauer t_i^* dar, Bild 20. Die Tatsache, dass es sich hierbei um eine statistisch verteilte Größe handelt, bleibt zunächst außer Acht. Falls auf dieser Lasthöhe die Belastung nicht den Umfang t_i^* hat, sondern $h_i < t_i^*$ wird es nicht zum Ausfall kommen. Die Modellvorstellung ist, dass nur ein Teil der Lebensdauer „verbraucht“ wird, nämlich der h_i/t_i^* -te Teil. Dieser Teil kann auch als Teilschädigung D_i verstanden werden. Falls in einem Lastkollektiv auch weitere Teilkollektive mit anderen Lasthöhen P_i auftreten, muss für die Ermittlung der Gesamtschädigung des Kollektivs D deren Teilschädigung D_i aufaddiert werden:



$$D = \sum_i D_i = \sum_i \frac{h_i(P_i)}{t_i^*(P_i)} \quad (3.27)$$

Für die Bewertung der Teilkollektive unterhalb der sogenannten Dauerfestigkeit, bei denen $t_i^*(P_i) = \infty$ gibt es unterschiedliche Ansätze, auch Miner - Regel genannt:

- „Miner elementar“: diese Teilkollektive tragen genauso zur Gesamtschädigung bei, wie die übrigen. Unterhalb der Dauerfestigkeit wird die Neigung der Wöhlerlinie fortgesetzt.
- „Miner original“: diese Teilkollektive tragen nicht zur Gesamtschädigung bei und werden vernachlässigt. Unterhalb der Dauerfestigkeit wird ein horizontaler Verlauf angenommen.
- „Miner modifiziert“: diese Teilkollektive tragen weniger zur Gesamtschädigung bei als die übrigen. Dies wird dadurch erreicht, dass unterhalb der Dauerfestigkeit eine flachere Neigung angenommen wird als die der Wöhlerlinie.

Der dritte Ansatz hat sich aus praktischer Sicht am besten bewährt und wird in der Variante „Miner - Haibach“ oft verwendet, darauf soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden, siehe [5] S.191ff.

Bei einer Einstufenbelastung tritt Versagen offensichtlich bei $D = t_i^*/t_i^* = 1$ statt. Analog dazu scheint bei variabler Lasthöhe zunächst auch angebracht anzunehmen, dass Versagen bei $D = 1$ eintritt. Falls die Kollektivschädigung $D < 1$ beträgt, kann das Kollektiv $1/D$ -mal wiederholt werden, bis $D = 1$ und damit Versagen erreicht wird. Daraus folgt, dass bei einem Kollektivumfang h_0 die erreichte Lebensdauer

$$t^* = \frac{1}{D} h_0 = \frac{1}{D} \sum_i h_i \quad (3.28)$$

beträgt, wobei D aus Gl. (3.27) ermittelt werden kann.

Dieses Konzept wird lineare Schadensakkumulation genannt und stellt eine gewisse Vereinfachung dar, weil es für den linearen Ansatz in der Realität keine physikalische Begründung gibt. Es sind zahlreiche Effekte bekannt, die zu einem nicht-linearen Verlauf der Gesamtschädigung führen. So haben Lebensdauerexperimente gezeigt, dass tatsächliches Versagen oft nicht bei $D = 1$ stattfindet, sondern eher für Schadenssummen zwischen 0,1 bis 10, manchmal auch darüber hinaus. Dieser Ansatz ist aber oft die einzige praktikable Lösung, um aus der Einstufen-Bearbeitbarkeit eine rechnerische Abschätzung der Lebensdauer unter variabler Belastung zu erhalten. Eine gewisse pragmatische Verbesserung der Treffgenauigkeit kann dadurch erreicht werden, dass für bestimmte Kollektivformen die tatsächliche Schadenssumme, genannt kritische Schadenssumme $D_{50\%} \neq 1$ ermittelt wird und im weiteren Verlauf der Bewertung mit dieser statt mit $D_{50\%} = 1$ gerechnet wird. Für die Bewertung der Lebensdauer ergibt sich:

$$t^* = \frac{D_{50\%}}{D} \sum_i h_i \quad (3.29)$$

Damit die Ansätze aus den vorhergehenden Kapiteln zur Berechnung der Zuverlässigkeit verwendet werden können, muss die exakte Verteilung der Lebensdauer nach Gl. (3.29) abgeleitet werden. Dies stellt allerdings ein nicht-triviales Problem dar. Man kann zeigen, dass bei lognormalverteilter Beanspruchung h_i und Beanspruchbarkeit t_i^* , die Teil-Schädigungen D_i ebenfalls lognormalverteilt sind. Dies gilt für die Gesamtschädigung D (als Summe lognormalverteilter Teil-Schädigungen) und daher auch für die Lebensdauer t^* aber *nicht* mehr. Für die Bewertung wäre ein Ansatz denkbar, bei dem die Gleichungen (3.29) und (3.27) als funktionaler Zusammenhang zwischen der Lebensdauer und den Zufallsvariablen h_i und t_i^* gesehen werden:

$$t^* = f(h_i, t_i^*) \quad (3.30)$$

Damit wird die Lebensdauer zwar eine Zufallsvariable mit unbekannter Verteilung sein, deren Kennwerte wie Mittelwert und Varianz können aber aus den Kennwerten der Verteilungen von h_i



und t_i^* abgeleitet werden, siehe dazu Kapitel 6.1.3.3 im Anhang. Pragmatisch wird allerdings oft eine lognormalverteilte Lebensdauer t^* angenommen, mit gleicher Streubreite wie die Wöhlerlinie.

Für die Lebensdauersicherheit j_t ergibt sich schließlich mit Gl. (3.29):

$$j_t = \frac{t^*}{\sum_i h_i} = \frac{D_{50\%}}{D} \quad (3.31)$$

3.4.5. Systemzuverlässigkeit

Die Zuverlässigkeit eines Systems kann aus dem Ausfallverhalten seiner Bestandteile mit Hilfe der Boole'schen Systemtheorie bewertet werden. Dazu müssen einige wesentliche Voraussetzungen erfüllt sein [1], S.78:

- Das System ist entweder nicht reparierbar, oder die Bewertung findet (bei reparierbaren Systemen) bis zum ersten Systemausfall statt.
- Die Systemelemente können nur die Zustände „funktionsfähig“ oder „ausgefallen“ annehmen.
- Die Systemelemente sind unabhängig voneinander, d.h. das Ausfallverhalten eines Elements wird nicht vom Ausfallverhalten anderer Elemente beeinflusst.

Der erste Schritt in der Bewertung der Systemzuverlässigkeit besteht darin, die Zuverlässigkeitsstruktur des Systems in einem Zuverlässigkeitsschaltbild nachzubilden. In diesem Schaltbild wird die Auswirkung eines Elementausfalls auf das System modelliert, wobei der mechanische Aufbau nicht unbedingt nachgebildet werden muss. So können Elemente, welche nur einmal physikalisch in der Struktur vorhanden sind, an mehreren Stellen im Zuverlässigkeitsschaltbild auftreten.

Das Schaltbild besitzt einen Eingang E und einen Ausgang A . Das System ist funktionsfähig, wenn ein Pfad aus funktionsfähigen Elementen zwischen Eingang und Ausgang existiert, ansonsten ist das System ausgefallen.

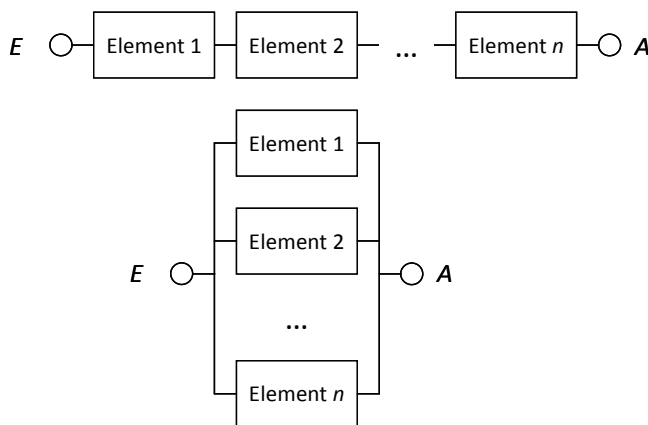


Bild 21: Zuverlässigkeitsschaltbild einer Serienstruktur (oben), einer Parallelstruktur (unten)

Drei Elementarstrukturen können für den Aufbau des Schaltbilds verwendet werden, Bild 21:

- Die Serienstruktur, Bild 21 oben. Hier liegt Funktionsfähigkeit nur dann vor, wenn alle Elemente funktionsfähig sind, d.h. der Ausfall *eines* Elementes führt sofort zum Ausfall der Struktur.
- Die Parallelstruktur, Bild 21 unten. Hier liegt Funktionsfähigkeit dann vor, wenn mindestens eines der Elemente funktionsfähig ist, d.h. der Ausfall *aller* Elemente führt erst zum Ausfall der Struktur.
- Die k -aus- n Struktur. Hier liegt Funktionsfähigkeit dann vor, wenn mindestens k von insgesamt n Elementen funktionsfähig sind.



BEMERKUNG:

Ein Seriensystem ist somit ein n-aus-n System und ein Parallelsystem ein 1-aus-n System. Das Schaltbild eines k-aus-n Systems kann als Kombination von Serien- und Parallelelementen dargestellt werden.

Das Zuverlässigkeitsschaltbild bildet die Zuverlässigkeitsstruktur ab und darf nicht mit der physikalischen Struktur des Systems verwechselt werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL:

Eine elektrische Komponente besteht aus einer Parallelschaltung von drei gleichen elektrischen Widerständen $R_i=3\Omega$, Bild 22 links. Laut Spezifikation darf der Widerstand der Komponente nicht über 1.2Ω liegen. Wie sieht das Zuverlässigkeitsschaubild aus? Der Gesamtwiderstand der Komponente beträgt nach dem Gesetz für parallel - geschaltete Widerstände mit $n=3$:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = 1\Omega. \tag{3.32}$$

Falls 1, 2 oder 3 der Widerstände ausfallen, ergeben sich folgende Gesamtwiderstände der Komponente:

Ausfälle	n	R, Ω
1	2	1.5
2	1	3
3	0	∞

Daraus ist ersichtlich, dass für die Funktionsfähigkeit der Komponente alle Widerstände funktionsfähig sein müssen, was durch eine Serienstruktur für das Zuverlässigkeitsschaubild beschrieben wird, Bild 22 rechts.

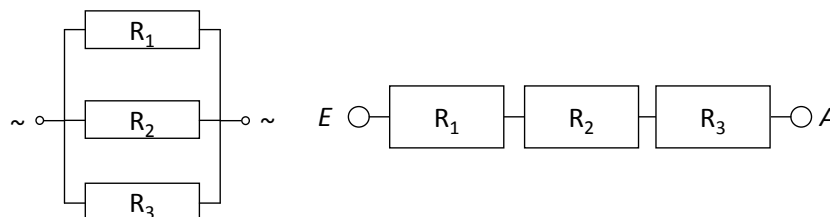


Bild 22: Elektrischer Schaltplan einer Komponente mit drei parallel - geschalteten Widerständen (links), Zuverlässigkeitsschaltbild der Komponente (rechts)

Die Ausfall- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit dieser Elementarstrukturen ergibt sich aus den Ausfall- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten der Elemente wie folgt, [1], S.81.

Für die Überlebenswahrscheinlichkeit der **Serienstruktur** aus n Elementen folgt aus dem Produktgesetz, dass

$$R_S = R_1 R_2 \dots R_n = \prod_{i=1}^n R_i, \tag{3.33}$$

wobei aus $R_i < 1$ folgt, dass $R_S < \min(R_i)$, d.h. die Überlebenswahrscheinlichkeit der Struktur und daher auch deren Zuverlässigkeit *kleiner* ist als die Zuverlässigkeit eines jeden Elementes. Falls allerdings deutliche Unterschiede in der Zuverlässigkeit der Einzelelemente bestehen, und zwar derart, dass nur ein Element eine Zuverlässigkeit $R_0 < 1$ aufweist und für alle übrigen gilt, dass $R_i \approx 1$, so wird das Element mit der kleinsten Zuverlässigkeit die Zuverlässigkeit des Systems bestimmen und $R_S \approx R_0$.

Falls das Ausfallverhalten der Elemente einer Serienstruktur durch eine Exponentialverteilung beschrieben werden kann, gestaltet sich die Berechnung der Systemzuverlässigkeit besonders einfach. Die Zuverlässigkeit der Elemente ist in diesem Fall (siehe auch Kap. 6.2.2) gegeben durch



$$R_i(t) = \exp(-\lambda_i t). \tag{3.34}$$

Für die Systemzuverlässigkeit folgt entsprechend Gl. (3.33), dass

$$R = \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda_i t) = \exp(-\lambda t), \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tag{3.35}$$

wobei mit λ und λ_i die Ausfallraten des Systems und der Elemente bezeichnet wurden. Bei einer Serienstruktur ist demnach die Ausfallrate eines Systems einfach die Summe der Ausfallraten der Elemente (mit exponentialverteilterm Ausfallverhalten). Allerdings sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass die Exponentialverteilung nur Zufallsausfälle (konstante Ausfallrate) beschreiben kann, aber keine Frühausfälle (sinkende Ausfallrate) und keine Degradation, Ermüdung und Verschleiß (steigende Ausfallrate).

Für die **Parallelstruktur** aus n Elementen folgt aus dem Produktgesetz hingegen, dass

$$F_p = F_1 F_2 \dots F_n = \prod_{i=1}^n F_i = \prod_{i=1}^n (1 - R_i), \tag{3.36}$$

$$R_p = 1 - F_p = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i), \tag{3.37}$$

wobei aus $F_i < 1$ folgt, dass $F_p < \min(F_i)$ und daher $R_p > \max(R_i)$, d.h. die Überlebenswahrscheinlichkeit der Struktur und daher auch deren Zuverlässigkeit ist *größer* als die Zuverlässigkeit eines jeden Elementes.

Besitzen n unabhängige Elemente des Systems alle die Überlebenswahrscheinlichkeit R_0 , so ist die Überlebenswahrscheinlichkeit eines **k-aus-n Systems** gegeben durch (siehe [13], S.20):

$$R = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} R_0^i (1 - R_0)^{n-i}. \tag{3.38}$$

Komplexe Systeme können als Kombination aus den oben erwähnten Elementarstrukturen gebildet werden. Die quantitative Bewertung der Überlebenswahrscheinlichkeit eines Systems kann aus den Überlebenswahrscheinlichkeiten der Elemente abgeleitet werden, indem in der hierarchischen Struktur des Systems von innen nach außen die erwähnten Elementarstrukturen gesucht und nach den obigen Formeln bewertet werden, bis das komplette System abgearbeitet ist.

Folgendes Beispiel verdeutlicht den großen Einfluss der Systemstruktur auf die Zuverlässigkeit.

BEISPIEL:

Ein komplexes Produkt (beispielsweise ein PKW) besteht aus 500 Teilen, bei denen ein Ausfall direkt zum Ausfall des gesamten Produktes führt. Es soll abgeschätzt werden, welche Systemzuverlässigkeit des Produktes bei einer Zuverlässigkeit der Einzelteile von 99% bzw. 99,99% vorliegt.

Da der Ausfall eines jeden Teils direkt zum Ausfall des Systems führt, ist eine Serienstruktur für die Modellierung der Zuverlässigkeit des Produkts angebracht. Die Überlebenswahrscheinlichkeit des Systems ist somit $R_{s,99\%} = 0,99^{500} = 0,66\%$, bzw. $R_{s,99,99\%} = 0,9999^{500} = 95,12\%$.

Obwohl man also meinen könnte, dass mit 99% eine hohe Überlebenswahrscheinlichkeit der Einzelteile vorliegt, ist diese offenkundig nicht ausreichend, um in komplexen Systemen eine ausreichende Systemzuverlässigkeit zu gewährleisten. Dies ist auch der Grund für die sehr hohen Anforderungen an die Zuverlässigkeit von Elementen in komplexen Systemen.



3.4.6. Zusammenfassung und Beispiel

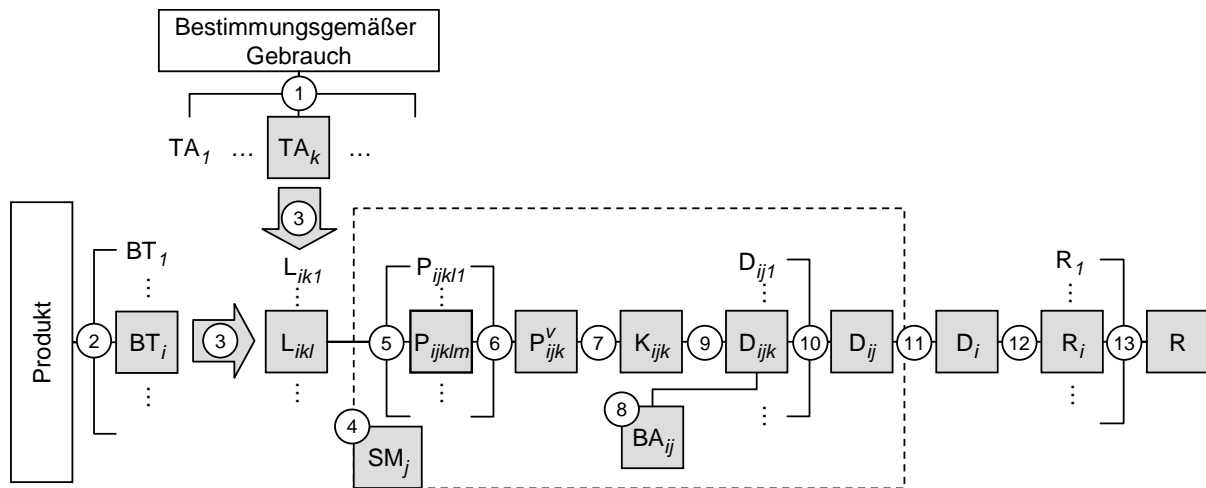


Bild 23: Von den Lasten zur Systemzuverlässigkeit. Abkürzungen: TA-Teilanwendung, BT-Bauteil, SM-Schadensmechanismus, L-Last, P-Beanspruchungsparameter, P^v -Vergleichsbeanspruchungsparameter, K-Beanspruchungskollektiv, BA-Beanspruchbarkeit, D-Schädigung, R-Zuverlässigkeit.

Der Weg von den Belastungen bis zum Zuverlässigkeitsnachweis kann wie folgt zusammengefasst werden, Bild 23:

1. Aufgliederung der Anwendung in Teilanwendungen. Im Bereich Automotive können dies z.B. Fahrstrecken wie Stadt/Land/Autobahn, Fahrmanöver wie Kurvenfahrt/Geradeausfahrt, geografische und klimatische Einsätze wie Nordeuropa/Afrika oder Winter/Sommer sein. Verschiedene Applikationen werden wie unterschiedliche Anwendungen behandelt; in einem worst-case-Ansatz wird die auslegungsrelevante Applikation (diejenige mit der kleinsten Zuverlässigkeit) festgelegt.
2. Systempartitionierung des Produkts in Bauteile.
3. Ableitung der Last-Zeitverläufe $L_{ikl}(t)$ des i -ten Bauteils für die k -te Teilanwendung für einen repräsentativen Zeitraum aus den Systemlasten, typischerweise durch Mehrkörpersimulation (MKS), oder Messung, ggf. an einem Vorgängerprodukt.
4. Festlegung der relevanten Schädigungsmechanismen.
5. Festlegung des Beanspruchungsparameters für den j -ten Schädigungsmechanismus. Ermittlung der Beanspruchungs-Zeitverläufe $P_{ijklm}(t)$ für die ikl -te Last bezüglich des j -ten Schädigungsmechanismus, typischerweise durch Berechnung mittels der Methode der Finiten Elemente (FEM) oder Messung anhand von Dehnungsmessstreifen (DMS).
6. Berechnung des Vergleichsbeanspruchung - Zeitverlaufs $P^v_{ijk}(t)$ durch Gewichtung und Superposition aller Beanspruchungen aus den Lasten des i -ten Bauteils, j -ten Schädigungsmechanismus und k -te Teilanwendung anhand des Auslegungskonzepts (Bei Ermüdung: Anwendung des relevanten Mehrachsigsigkantsatzes).
7. Klassierung von $P^v_{ijk}(t)$ zu einem Kollektiv K_{ijk} . Ggf. Transformation des Kollektivs anhand des Auslegungskonzepts (Bei Ermüdung: Transformation auf das Spannungsverhältnis der Wöhlerlinie).
8. Ermittlung der Beanspruchbarkeits - Kennlinie (Wöhlerlinie) BA_{ij} für das i -te Bauteil und den j -ten Schädigungsmechanismus, typischerweise anhand eines Probenversuchs mit anschließender Umberwertung auf das Bauteil anhand des Auslegungskonzepts zur Berücksichtigung der Unterschiede zwischen Probe und Bauteil (bei Ermüdung: z.B. Oberflächenqualität und Spannungsgradient).



9. Berechnung der Schadenssumme D_{ijk} des i -ten Bauteils für den j -ten Schädigungsmechanismus und der k -ten Teilanwendung aus den entsprechenden Kollektiven und Wöhlerlinien.
10. Berechnung der Schadenssumme D_{ij} des i -ten Bauteils für den j -ten Schädigungsmechanismus durch Skalierung (Extrapolation) und Addition der Schadenssummen D_{ijk} über alle Teilanwendungen. Ggf. kann dieser Schritt übersprungen werden, damit seltene Ereignisse, welche als Teilanwendung behandelt werden (z.B. eingeschränkte Weiterfahrt zur nächsten Servicestation), in Schritt 13 durch Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit durch Superposition der Zuverlässigkeiten aller Teilanwendungen berücksichtigt werden können.
11. Berechnung der Schadenssumme D_i des i -ten Bauteils durch Gewichtung und Addition der Schadenssummen D_{ij} über alle Schädigungsmechanismen anhand des Auslegungskonzepts. Dies stellt typischerweise eine große Schwierigkeit dar, weil eine lineare Schadensakkumulation hier oft nicht zutreffend ist. Als Beispiel kann die Superposition von Ermüdung und Kriechen bei der Hochtemperaturermüdung erwähnt werden.
12. Berechnung der Zuverlässigkeit R_i des i -ten Bauteils aus seiner Schadenssumme D_i .
13. Berechnung der Systemzuverlässigkeit R aus den Zuverlässigkeiten seiner Bauteile R_i . Durchführung des Zuverlässigkeitsnachweises durch Vergleich von R mit der geforderten Systemzuverlässigkeit R_{erf} . Alternativ können bereits nach der Systempartitionierung solche Zielwerte für die erforderliche Zuverlässigkeit der Bauteile $R_{i,erf}$ vorgegeben werden, bei denen die Erfüllung des Systemzuverlässigkeitsnachweises sichergestellt ist. In diesem Fall kann der Zuverlässigkeitsnachweis bereits ein Schritt vorher auf Bauteilebene durchgeführt werden, indem R_i mit $R_{i,erf}$ für das i -te Bauteil verglichen wird. Falls Zuverlässigkeiten einzelner Teilanwendungen mit bekannten Eintretenswahrscheinlichkeiten vorliegen, können diese durch Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit (siehe Kap. 6.1.1) unter Berücksichtigung ihrer Eintretenswahrscheinlichkeiten zu einer Gesamtzuverlässigkeit superponiert werden.

Der Weg von den Anforderungen bis zur Bewertung der Zuverlässigkeit soll anhand eines (fiktiven) Beispiels der Bohrfutter/Bohrer-Einheit einer Schlagbohrmaschine für den Heimgebrauch schematisch aufgezeigt werden. Es sei darauf hingewiesen, dass es sich hierbei um eine schematische Darstellung handelt, welche nicht auf alle Aspekte einer Zuverlässigkeitsbewertung in der erforderlichen Tiefe eingehen kann und manche Zusammenhänge vereinfacht und verkürzt wiedergibt.

BEISPIEL:

Nach Festlegung des Marktsegmentes „Heimgebrauch“, werden als erstes durch Umfragen die Kundenanforderungen an dem Produkt Schlagbohrmaschine ermittelt und mit Hilfe der Methode QFD daraus technische Produktmerkmale abgeleitet. Nach einem Wettbewerbervergleich wurde festgelegt, dass das Produkt folgende 2 Teilanwendungen mit einer Überlebenswahrscheinlichkeit von $R_{erf} = 99\%$ abdecken muss:

Teilanwendung 1: 20 min schlagbohren in Beton einer definierten Qualität mit Presskraft $F_1 = 100$ N,

Teilanwendung 2: 40 min bohren in Mauerwerk einer definierten Qualität mit Presskraft $F_2 = 100$ N.

Hierbei handelt es sich um Anforderungen auf der obersten System-Ebene (Produkt-Anwendung). Die Presskräfte am Griff des Schlagbohrers können beispielsweise durch Versuche an ähnlichen Vorgängerprodukten ermittelt worden sein. Aus dieser Systembelastung auf oberster System-Ebene resultieren nach einer weiteren Detaillierung des Designs Lasten für alle Sub-Systeme bzw. Bauteile wie z.B. das Getriebe, Stoßmechanismus etc. Für einen SDS-Bohrer (Bauteil 1) können aus den Lasten F_1 und F_2 mittels einer Mehrkörper-Simulation des (Schlag-)Bohr-Prozesses über 1 Minute folgende Last-Zeitverläufe berechnet werden:

Last-Zeitverlauf 111: Stoßkraftbelastung $F_{111}(t)$, $t = 0, \dots, 1$ min,

Last-Zeitverlauf 112: Torsionsmomentbelastung $M_{112}(t)$, $t = 0, \dots, 1$ min,



Last-Zeitverlauf 121: Torsionsmomentbelastung $M_{121}(t)$, $t = 0, \dots, 1 \text{min}$.

Für den Zulieferer des Werkzeugs sind diese Daten erforderlich, um eine erfolgreiche Zuverlässigkeitsauslegung durchführen zu können. Da für deren Ableitung ein Kenntnis des kompletten Systems erforderlich ist, können diese Anforderungen nur vom Produkthersteller (OEM) kommen.

Aus den Last-Zeitverläufen 111, 112 und 121 kann der Werkzeuglieferant nach Vorliegen eines Werkzeugdesigns nun eine Beanspruchung durch eine strukturmechanische FEM - Simulation berechnen. Er weiß aus Erfahrung, dass für das Werkzeug Ermüdung als Schädigungsmechanismus (SM 1) in Frage kommt und legt deswegen die mechanische Spannungen im Werkzeug als lokale Beanspruchungsgröße fest. Eine linear-elastische FEM - Simulation liefert, lineares Materialverhalten vorausgesetzt, die (ortsabhängigen) Übertragungsfaktoren $c_{F=1}(\mathbf{x})$ und $c_{M=1}(\mathbf{x})$ für eine Einheitslast bzw. ein Einheitsmoment, mit deren Hilfe die (ortsabhängigen) Spannungs-Zeitverläufe ermittelt werden können. Falls wir mit $c_{F=1}$ und $c_{M=1}$ die Koeffizienten am Versagensort bezeichnen ergeben sich folgende Spannungs-Zeitverläufe:

Spannungs-Zeitverlauf 1111: Normalspannung $\sigma_{1111}(t) = c_{F=1} \cdot F_{111}(t)$, $t = 0, \dots, 1 \text{min}$,

Spannungs-Zeitverlauf 1112: Schubspannung $\tau_{1112}(t) = c_{M=1} \cdot M_{112}(t)$, $t = 0, \dots, 1 \text{min}$,

Spannungs-Zeitverlauf 1121: Schubspannung $\tau_{1121}(t) = c_{M=1} \cdot M_{121}(t)$, $t = 0, \dots, 1 \text{min}$.

Nun kann die Superposition der einzelnen Spannungs-Zeitverläufe erfolgen. Bei den Spannungs-Zeitverläufen 1111 und 1112 handelt es sich um die Komponenten einer mehrachsigen Beanspruchung, welche je nach verwendetem Mehrachsigsigkeitsansatz gewichtet und zu einem Vergleichsspannungsverlauf superponiert werden können (nähere Details hierzu sind z.B. in [5], S.162ff zu finden):

$$\sigma_{111}^V = \sigma_{111}^V(\sigma_{1111}(t), \tau_{1112}(t)), t = 0..1 \text{min},$$

$$\sigma_{112}^V = \sigma_{112}^V(\tau_{1121}(t)), t = 0..1 \text{min}.$$

Die skalaren Vergleichsspannungsverläufe können nun zu Kollektiven klassiert werden:

$$\sigma_{111}^V \rightarrow K_{111,1\text{min}}$$

$$\sigma_{112}^V \rightarrow K_{112,1\text{min}}$$

damit ergeben sich die mittelspannungstransformierten Kollektive zu

$$K_{111,1\text{min}} \rightarrow K_{111,1\text{min},tr}$$

$$K_{112,1\text{min}} \rightarrow K_{112,1\text{min},tr}$$

Diese transformierten Kollektive stellen die gesuchte Beanspruchung im eigentlichen Sinne dar. Für die weitere Schädigungsbewertung des Mechanismus „Ermüdung“ ist die Ermittlung der Beanspruchbarkeit des Bohrers in Form einer Wöhlerlinie für schwelende Druck-Belastung erforderlich:

$$BA_{11}$$

Für die Schädigungen aus einer 1-minütigen Anwendung ergibt sich damit:

$$D_{111,1\text{min}} = D_{111,1\text{min}}(K_{111,1\text{min},tr}, BA_{11}),$$

$$D_{112,1\text{min}} = D_{112,1\text{min}}(K_{112,1\text{min},tr}, BA_{11}).$$

Diese Teil-Schädigungen können nun auf die erforderliche Teil – Anwendungsdauer hochgerechnet und addiert werden:

$$D_{11} = 20 \cdot D_{111,1\text{min}} + 40 \cdot D_{112,1\text{min}}.$$

Alternativ ist auch eine Hochskalierung der Kollektive mit einer anschließenden Schädigungsberechnung möglich. Allerdings ist hier der rechnerische Aufwand für die Schädigungsberechnung um ein Mehrfaches höher, während die Hochskalierung der Schädigungssumme nur eine Multiplikation mit einem Faktor erfordert, so dass dieses Vorgehen wesentlich effizienter ist.



Bei D_{11} handelt es sich um die Schadenssumme des einzigen betrachteten Schädigungsmechanismus „Ermüdung“, somit ist $D_1 = D_{11}$. Der Zuverlässigkeit des Werkzeugs R_1 kann nun aus der Schädigungssumme D_1 angegeben werden als

$$R_1 = R_1(D_1, D_{50\%}),$$

wobei mit $D_{50\%}$ die kritische Schädigungssumme bezeichnet wurde, welche aus früheren Lebensdauerversuchen bekannt ist.

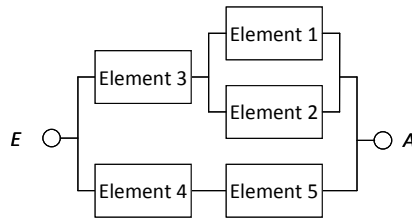


Bild 24: Zuverlässigkeitsschaubild des Systems Bohrfutter/Bohrer

Für den Nachweis ausreichender Zuverlässigkeit des gesamten Systems „Bohrfutter/Bohrer“ muss auch die Zuverlässigkeit der restlichen Bauteile des Systems analog bewertet werden. Nehmen wir an, dass das System aus 5 Elementen besteht: 1 – SDS-Bohrer, 2 – SDS-Reservebohrer, 3 – SDS-Bohrfutter, 4 – zusätzliches Sechskant-Bohrfutter, 5 – Sechskant-Bohrer. Die Überlebenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Elemente seien R_1 bis R_5 . Die Systemzuverlässigkeit wird nach der Boole’schen Systemtheorie aus der Zuverlässigkeit der Elemente anhand des Zuverlässigkeitsschaubilds der Struktur, Bild 24, bestimmt. Elemente 1 und 2 bilden eine Parallelstruktur, da beide SDS-Bohrer ausfallen müssen, damit das Teil-System „SDS-Bohrer“ nicht funktioniert. Die Teil-Systeme 12 und 3 bilden eine Serienstruktur, da sowohl das Teil-System „SDS-Bohrer“ als auch das Teil-System „SDS-Bohrfutter“ für ein funktionstüchtiges Sub-System SDS-Bohrfutter/Bohrer erforderlich sind. Entsprechendes gilt auch für das Sub-System Sechskant-Bohrfutter/Bohrer aus den Elementen 4 und 5. Damit schließlich das Gesamtsystem Bohrfutter/Bohrer funktioniert, müssen entweder die Sub-Systeme 123 oder 45 funktionstüchtig sein, welche somit eine Parallelstruktur bilden.

Für die Lösung werden zunächst die Elementarstrukturen im Schaltbild gesucht. Elemente 1 und 2 bilden eine Parallelstruktur, daher gilt

$$R_{12} = 1 - (1 - R_1)(1 - R_2).$$

Im Folgenden werden die Elemente 1 und 2 eliminiert und durch ein fiktives Element 12 mit obiger Überlebenswahrscheinlichkeit ersetzt. Elemente 3 und 12 bilden eine Serienstruktur, ebenso die Elemente 4 und 5, daher gilt:

$$R_{123} = R_3 R_{12} = R_3 (1 - (1 - R_1)(1 - R_2)),$$

$$R_{45} = R_4 R_5.$$

Elemente 3 und 12 werden eliminiert und durch das fiktive Element 123 ersetzt, gleiches gilt für die Elemente 4 und 5, welche durch Element 45 ersetzt werden. Schließlich besitzen die Elemente 123 und 45 eine Parallelstruktur, daher beträgt die Überlebenswahrscheinlichkeit des Systems

$$R = R_{12345} = 1 - (1 - R_{123})(1 - R_{45}) = 1 - (1 - R_3 (1 - (1 - R_1)(1 - R_2)))(1 - R_4 R_5).$$

Der Nachweis ausreichender Zuverlässigkeit des Systems Bohrfutter/Bohrer gilt als erbracht, falls

$$R \geq R_{erf} = 99\%.$$



3.5. Qualitative Methoden

In diesem Abschnitt werden einige Methoden vorgestellt, welche qualitativ zur Bewertung bzw. Erhöhung der Zuverlässigkeit beitragen.

3.5.1. Failure Mode and Effects Analysis (FMEA)

Die FMEA ist eine analytische Methode der präventiven Qualitätssicherung. Sie dient dazu, potentielle Schwachstellen zu finden, deren Bedeutung zu erkennen, zu bewerten und geeignete Maßnahmen zu ihrer Vermeidung bzw. Entdeckung rechtzeitig einzuleiten. Die systematische Analyse und Beseitigung von Schwachstellen führt zur Risikominimierung, zur Reduzierung der Fehlerkosten sowie zu verbesserter Zuverlässigkeit.

Die FMEA ist ein Werkzeug, um Risiken durch Einzelfehler zu analysieren. Dabei werden die einzelnen Risiken gegeneinander gewichtet, um Schwerpunkte zu erkennen. Die FMEA liefert keine Aussage über die absolute Höhe eines Fehlerrisikos. Für die Betrachtung von Fehlerkombinationen ist die Fehlerbaumanalyse besser geeignet.

Folgende Vorteile ergeben sich durch eine zielgerichtete Anwendung der FMEA:

- Vermeiden von Fehlern in Konstruktion und Entwicklung.
- Weniger nachträgliche Produktänderungen und damit Reduzieren der Kosten.
- Vermeiden von Wiederholfehlern durch systematisches Erfassen des Fach-/Fehlerwissens über das Erzeugnis bzw. den Prozess.

Der Aufwand zum Vermeiden von Fehlern zu Beginn des Produktentstehungsprozesses ist mehr als gerechtfertigt, da er die wesentlich höheren Qualitäts-Folgekosten zu einem späteren Zeitpunkt eliminiert.

Die FMEA ist eine systematische Methode. Deren Grundgedanke ist es, für beliebige Systeme, Teilsysteme und Bauteile alle denkbaren Ausfallarten zu ermitteln. Gleichzeitig werden die möglichen Ausfallfolgen- und Ursachen aufgedeckt. Anschließend erfolgt eine Bewertung des Risikos und Festlegung von Optimierungsmaßnahmen. Die FMEA kann also in 5 Schritten durchgeführt werden:

1. Strukturierung
2. Funktionsanalyse
3. Fehleranalyse
4. Risikobewertung
5. Optimierung / Qualitätsverbesserung

Einzelheiten zur Durchführung einer FMEA sind in [9] zu finden.

3.5.2. Design Review Based on Failure Mode (DRBFM)

DRBFM ist ein systematischer, präventiver Ansatz im Produkt-Entstehungsprozess mit dem Ziel potentielle Probleme von vornherein zu vermeiden und die technischen Anforderungen vollständig zu erfüllen. Während FMEA alle denkbaren Schwachstellen durch eine systematische Analyse aufdeckt, also gewissermaßen „in die Breite“ der Bewertung geht, konzentriert sich DRBFM auf einzelne besonders relevante Themen, die jedoch „in die Tiefe“ behandelt werden.

Der wichtigste Nutzen von DRBFM besteht darin:



- potentielle Probleme bereits in der Entwurfsphase systematisch aufzuspüren, die zugrunde liegenden Sachverhalte in der Auslegung geeignet zu berücksichtigen und so die Probleme zu vermeiden.
- das Inhaltliche Arbeiten zu treiben, Verständnis über Wirkzusammenhänge und Einflussparameter zu erlangen.
- Wissenslücken systematisch sichtbar zu machen.
- Mitarbeiter zu qualifizierter Sachdiskussion zu befähigen.
- Vorgesetzte in Design Reviews zu integrieren und sie anzuregen, inhaltlich zu führen.
- Ausfallraten und Fehlerkosten zu senken.

DRBFM ist eine Methode, die auf Bedenken fokussiert, welche durch Änderungen an einem Referenzdesign ausgelöst werden. Die Referenz gilt als inhaltlich verstanden, robust und im Feld bewährt. Eine solche Referenz kann von Vorgängerprodukten oder auch aus einem anderen Anwendungsbereich stammen.

Die Methode besteht im Wesentlichen aus zwei Elementen:

- der entwicklungsbegleitenden Analyse und Verbesserung des Designs und
- dem Design Review.

Die Umsetzung erfordert einen Entwicklungsprozess mit Schwerpunkt in der frühen Phase des Designs („front loading“) und verlangt die Einbeziehung technischer Experten. Sie ist in die tägliche Entwicklungsarbeit integriert.

DRBFM folgt der GD³-Philosophie:

- **Good Design:** Ein gutes Design ist die Grundlage für ein hervorragendes, wettbewerbsfähiges und einfach zu produzierendes Produkt. Ein gutes Design ist immer ein robustes Design. Ein gutes Design wird nicht ohne triftigen Grund und ohne tiefgehende Analyse geändert.
- **Good Discussion:** Gute Diskussionen werden bereits in der Frühphase der Entwicklung durchgeführt. Unter Einbeziehung des SE-Teams, technischer Experten, der Produktion, der Lieferanten usw. werden unterschiedliche Sichtweisen genutzt. Die Diskussionen sind offen, konstruktiv und ursachenorientiert und werden respektvoll geführt.
- **Good Design Review:** Gründliche und detaillierte Prüfung des Entwurfs durch ein interdisziplinäres Team von Experten und Führungskräften. Der/die Entwickler/in erläutert seinen/ihren Entwurf und stellt ihn zur Diskussion. Dabei werden Zeichnungen, reale Teile, sowie Versuchsergebnisse und Felddaten herangezogen.

Weitere Details zu diesem Thema finden sich in der Committed BES Practice „Design Review Based on Failure Mode (DRBFM)“.

3.5.3. Fault Tree Analysis (FTA)

Die Fehlerbaumanalyse (engl. Fault Tree Analysis, FTA) ist ein deduktives, analytisches Verfahren, das dazu dient, Kombinationen von Ausfällen (Primärereignisse) einzelner Funktionselemente einer Betrachtungseinheit zu finden, die zu einem unerwünschten Ereignis, dem „top event“, führen. Dazu wird auf Grundlage der Booleschen Algebra mit Hilfe entsprechender Symbole eine graphische Darstellung, der Fehlerbaum, erstellt, der das logische Zusammenwirken der Primärereignisse beschreibt. Werden Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse hinterlegt, kann auch die Wahrscheinlichkeit des TOP-Ereignisses daraus berechnet werden. Insofern können mit dieser Methode nicht nur qualitative sondern auch quantitative Bewertungen durchgeführt werden.



In einem zweiten Schritt wird der Fehlerbaum in logische Ausdrücke übersetzt, mit deren Hilfe alle Ereigniswiederholungen eliminiert und die kürzesten Ereignispfade, die zum „top event“ führen (Minimalschnitte) ermittelt werden können.

Eine FTA wird in folgenden Schritten durchgeführt:

- Vorbereitung inklusive Systemanalyse,
- Definition des Unerwünschten Ereignisses (Top Event),
- Festlegen der Analyse-Zielgrößen,
- Erstellen des Fehlerbaums (qualitative Beschreibung),
- Qualitative Auswertung,
- Ermittlung der Zuverlässigkeitskenngrößen der Basisereignisse (quantitative Beschreibung),
- Quantitative Auswertung,
- Festlegung Handlungsbedarf, Maßnahmen, Erfolgskontrolle,
- Dokumentation.

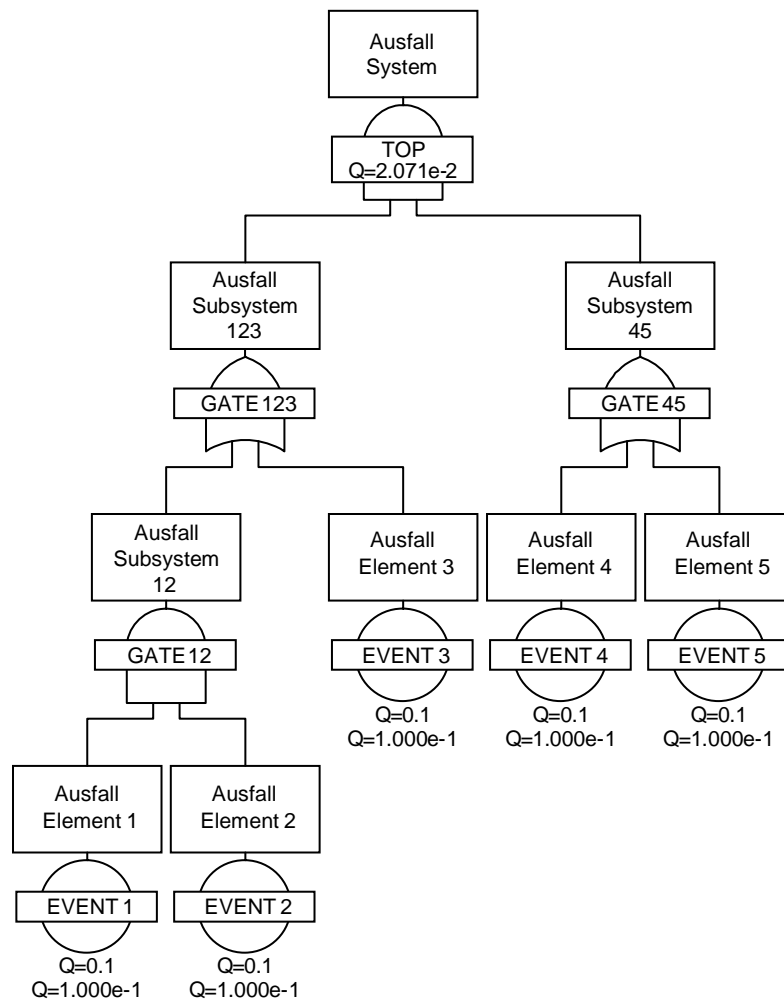


Bild 25: Fehlerbaum für das Beispiel in Kapitel 3.4.6 erzeugt mit dem Tool FaultTree+. Ausfallwahrscheinlichkeit Q des TOP-Ereignisses „Systemausfall“, in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Einzelemente $Q_i = 0,1$.



4. Verifizierung & Validierung

4.1. Erprobung und Qualität

Bereits bei Serienanlauf muss die Qualität und Zuverlässigkeit von Produkten insbesondere in der Automobilindustrie sichergestellt sein, was bei der aktuellen Reduzierung von Entwicklungszeiten auf 3 Jahre beim entsprechenden kostenmäßigen Druck keine triviale Aufgabe ist. Praktisch alle relevanten Normen, Regelwerken, Richtlinien z.B. [7,8] fordern dazu, dass noch während der Entwicklung Produkte erprobt werden.

Unter Erprobung wird dabei der Versuch an einem technischen Erzeugnis zur Verifizierung und Validierung von Qualitäts-Merkmalen, u.a. der Zuverlässigkeit, verstanden.

Nach DIN EN ISO 9000 ist die Verifizierung die Bestätigung durch Bereitstellung eines objektiven Nachweises, dass festgelegte Forderungen erfüllt worden sind. Die Validierung ist nach obiger Norm hingegen die Bestätigung durch Bereitstellung eines objektiven Nachweises, dass die Forderungen für einen spezifischen beabsichtigten Gebrauch oder Anwendung erfüllt worden sind.

Mit Erprobung soll also bestätigt werden, dass die gestellte Anforderung erfüllt und die Zuverlässigkeit des Erzeugnisses nachgewiesen wurde. Letzteres trägt auch explizit dem Aspekt Produkthaftung Rechnung. Darüber hinaus soll die Erprobung Erkenntnisse über diverse Einflüsse (z.B. Umwelteinflüsse) auf Produkte und Prozesse bringen und insbesondere die Aussagesicherheit erhöhen.

In [7] heißt es wörtlich „Mit der Bestätigung oder Verbesserung von Konzepten nach der Konstruktion durch Versuche wird die Basis für ein qualitätsgerechtes Produkt gelegt.“ Die Erprobung wird somit als zentraler Bestandteil der Qualitätssicherung verstanden. Andererseits führen die erwähnten verkürzten Entwicklungszeiten und der verstärkte Kostendruck zu einem gewissen Paradigmenwechsel: Die Erprobung wird nicht mehr als einziges Nachweismittel angesehen. In [7] wird dazu empfohlen, dass „... die Erprobungsschwerpunkte auf neue Komponenten bzw. Technologien gelegt werden. Bisher übliche Erprobungsumfänge müssen kritisch betrachtet und ggf. reduziert werden ... Durch eine konstruktive Optimierung können dann in vielen Fällen Erprobungen vermieden werden.“ Allerdings bleibt nach wie vor klar, dass „Erprobungen überall da notwendig sind, wo geforderte technische Merkmale während der Entwicklung nicht oder nur unzulänglich durch theoretische Verfahren ermittelt werden können,“ und dass „Bauteile mit verbleibendem hohem Risiko einer genauen Absicherung durch Erprobung bedürfen“ [7].

Folgende Prinzipien stellen die Grundlagen der Erprobung dar:

- Mit der Erprobung muss so früh wie möglich begonnen werden. Es ist allerdings auch klar, dass in sehr frühen Stadien der Produktentwicklung, bei denen noch keine Prototypen vorhanden sind, nicht erprobt werden kann. Daraus ergibt sich eine iterative Vorgehensweise, bei der immer mit dem jeweiligen neuesten Prototypenstand erprobt wird.
- Die Prüflinge selbst, sowie die Bedingungen der Erprobung, müssen so weit wie möglich den festgelegten und abzusichernden Anforderungen entsprechen (Verifizierung). Daraus ergibt sich eine Vorgehensweise, bei der immer mit dem neuesten Prototypenstand unter Einsatz relevanter Erprobungsbedingungen wie Lasten oder Medien erprobt wird. Die Auswertung von Felddaten bereits in Serie befindlicher Produkte bietet schließlich die Möglichkeit, Rückschlüsse auf die Relevanz der festgelegten Anforderungen zu ziehen (Validierung).
- Wichtiges Grundprinzip ist die Arbeit mit Standard-Prüfverfahren, welche in Regelwerken beschrieben werden, z.B. DIN IEC 68 „Grundlegende Umweltprüfverfahren“ oder VDI 4005 „Einflüsse von Umweltbedingungen auf die Zuverlässigkeit technischer Erzeugnisse“. Die



individuelle produktspezifische Prüfschärfe wird jedoch zwischen Auftraggeber und Kunde abgestimmt. Die freigaberelevanten Prüfverfahren werden pro Erzeugnis in einem Erprobungsblatt zusammengefasst.

Zwei Erprobungsphilosophien mit entsprechenden Vor- und Nachteilen stehen obigen Prinzipien gegenüber:

- “test to pass” bezeichnet jene Vorgehensweise, bei der eine bestimmte Erprobung ohne Beeinträchtigung des Erzeugnisses bestanden werden muss, damit die Prüfung positiv bewertet werden kann. Aus den Ergebnissen dieser Prüfung ist allerdings nur eine untere Grenze für die Zuverlässigkeit des Erzeugnisses abzuleiten, der tatsächliche Abstand zwischen Belastung und ertragbarer Belastbarkeit bleibt unklar, was deutliche Risiken für den späteren Einsatz birgt. Eng damit verbunden ist eine Entwicklungsphilosophie, bei der die Erprobung als Erfüllung von Kundenforderungen gesehen wird, denn eine solche Erprobung ist stets vom Kunden vorzugeben. Oft basieren solche Anforderungen auf übergeordneten Regelwerken, so dass das Erzeugnis nach Bestehen der Erprobung als „fit for standard“ angesehen werden kann. Die Vorteile einer solchen Vorgehensweise sind eine breite Akzeptanz der Ergebnisse und eine gewisse Sicherheit, da man sich stets auf das Bestehen einer vorgeschriebenen Erprobung berufen kann. Die Nachteile liegen jedoch ebenfalls klar auf der Hand: Oft ist die Feldrelevanz einer solchen Prüfung unklar und es kann trotz bestandener Erprobung zu Feldproblemen kommen.
- “test to failure” bezeichnet eine Vorgehensweise, bei der in einer verschärften Erprobung die Grenzen des Erzeugnisses in einem end-of-life-Test ermittelt werden und es in der Regel zur deutlichen Beeinträchtigung bis hin zum Ausfall kommen kann. Die Erprobung wird hier als eine wichtige Entwicklungstätigkeit verstanden, durch welche Risiken erkannt und Verbesserungen herbeigeführt werden sollen. Eine direkte „Bewertung“ des Erzeugnisses erfolgt nicht durch die Erprobung selbst, sondern wird in einer besonderen Betrachtung vorgenommen, bei der die Ergebnisse der Erprobung und die feldrelevanten Einsatzbedingungen mit einfließen. Das Bestehen vorgeschriebener Tests nimmt hier eine untergeordnete Stellung ein: diese sind für die Zufriedenstellung des Kunden wichtig, aber sonst von begrenzter Aussagekraft. Da auf Feldrelevanz bei dieser Betrachtung großen Wert gelegt wird, kann nach positiver Bewertung das Erzeugnis hier als „fit-for-use“ eingestuft werden. Als klarer Vorteil soll erwähnt werden, dass es bei richtiger Anwendung hier nicht zu Feldproblemen kommen kann, da die Grenzen des Erzeugnisses und die feldrelevanten Einsatzbedingungen bekannt, und der Abstand zwischen Beiden als ausreichend eingestuft wurde. Die größte Schwierigkeit dürfte in der Ermittlung der feldrelevanten Einsatzbedingungen bestehen, die in der Regel mit dem Kunden abzustimmen sind.

Allgemein kann festgestellt werden, dass aufgrund der erwähnten Vorteile gegenwärtig ein klarer Trend von der ersten zur zweiten Erprobungsphilosophie besteht. Somit ist für alle Erzeugnisse über die Einhaltung vereinbarter Spezifikationen hinaus, „Fitness for intended use“ als Qualitätsziel anzustreben, einschließlich der Entwicklung von Testverfahren für relevante Feldbelastungen.

Detaillierte Vorgaben an den Erprobungsprozess werden in Verfahrensanweisungen spezifiziert. Zur systematischen Festlegung erforderlicher Prüfungen mit Angaben zu

- Prüffart (Fahrzeugerprobung, Erprobung beim Kunden, statische, klimatische, dynamische, sonstige Prüfungen, Prüfstandsdauerläufe),
- Prüfdauer (z.B. in Form eines Erprobungsblatts) und
- vorgesehener Musterzahl

wird ein Erprobungsplan verwendet. Zur Erstellung des Erprobungsplans wird i.d.R. ein Auswahlblatt verwendet, auf dem die für das jeweilige Erzeugnisgebiet in Frage kommenden Prüffarten aufgelistet sind.



4.2. Testplanung

4.2.1. Anzahl Prüflinge und Prüfdauer für einen Success Run Test

Für die Bestimmung der Anzahl erforderlicher Prüflinge kann nach [1], S.267f folgendes Verfahren auf der Basis der Binomialverteilung verwendet werden.

Es werden n identische Prüflinge betrachtet, welche zum Test-Zeitpunkt t die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ besitzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass *alle* Prüflinge diesen Zeitpunkt überleben ist nach dem Produkt-Gesetz $R(t)^n$. Daraus ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit, bis zum Zeitpunkt t zufällig mindestens einen Ausfall zu beobachten $P_A = 1 - R(t)^n$ ist.

Aus der Umkehrung dieser Überlegung kann festgestellt werden, dass wenn sich beim Test einer Stichprobe vom Umfang n bis zum Zeitpunkt t kein Ausfall ereignet, die Mindest-Überlebenswahrscheinlichkeit (und somit die Zuverlässigkeit) eines Prüflings gleich $R(t)$ ist, mit einer Aussagewahrscheinlichkeit P_A . Daraus folgt, dass

$$R(t) = (1 - P_A)^{1/n} \tag{4.1}$$

und entsprechend

$$n = \frac{\ln(1 - P_A)}{\ln(R(t))} \tag{4.2}$$

Diese Testplanung wird „Success Run“ bezeichnet, da sie sich auf einen Versuch ohne Ausfälle bezieht. Die Abhängigkeit der Anzahl Prüflinge von der geforderten Zuverlässigkeit bei einer gegebenen Aussagewahrscheinlichkeit ist in Bild 26 dargestellt. Es ist deutlich ersichtlich, dass der experimentelle Nachweis bei hohen Zuverlässigkeiten zunehmend aufwändiger wird.

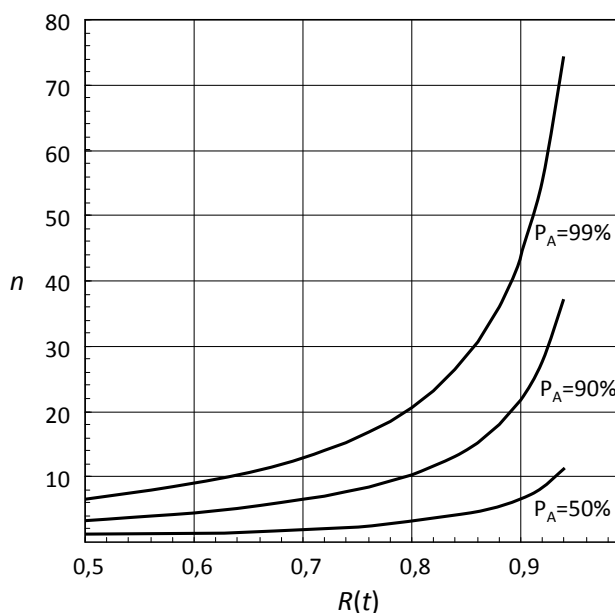


Bild 26: Anzahl Prüflinge n für einen Success Run Test, in Abhängigkeit der nachzuweisenden Zuverlässigkeit eines Prüflings $R(t)$ und der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit P_A .

Falls nun eine Zuverlässigkeitsaussage über einen Zeitpunkt $t_0 \neq t$ gemacht werden soll und eine Weibull-Verteilung der Lebensdauer mit Parameter b, T vorausgesetzt wird, so folgt für die zwei Zeiten t und t_0 dass

$$R(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{T}\right)^b\right), \quad R(t_0) = \exp\left(-\left(\frac{t_0}{T}\right)^b\right) \tag{4.3}$$



Nach logarithmieren und dividieren beider Gleichungen folgt daraus (siehe auch [1], S.268):

$$\frac{\ln(R(t))}{\ln(R(t_0))} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^b = L_V^b, \tag{4.4}$$

mit dem Lebensdauererhältnis $L_V = t/t_0$. Folglich ist $R(t) = R(t_0)^{L_V^b}$. Einsetzen in Gl. (4.2) führt zu:

$$n = \frac{\ln(1 - P_A)}{L_V^b \ln(R(t_0))}. \tag{4.5}$$

Bei konstanter nachzuweisender Zuverlässigkeit $R(t_0)$ und Aussagewahrscheinlichkeit P_A führt also die Erhöhung der Prüfdauer t zu einer Verringerung der Anzahl Prüflinge n und umgekehrt.

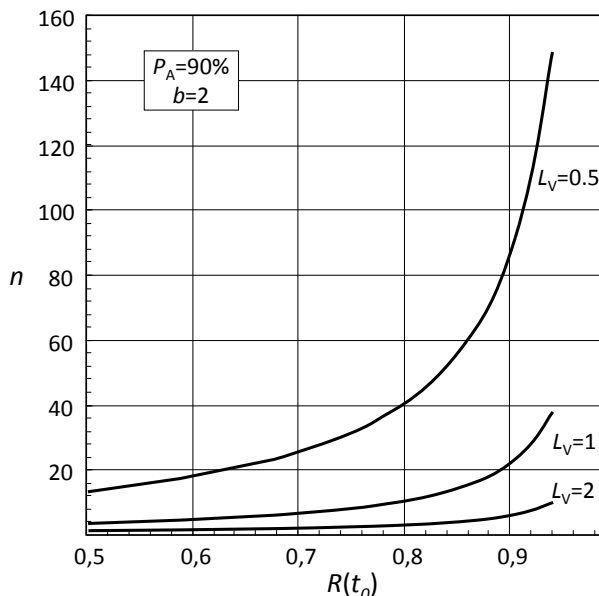


Bild 27: Anzahl Prüflinge n für einen Success Run Test, in Abhängigkeit der nachzuweisenden Zuverlässigkeit eines Prüflings $R(t_0)$ bei unterschiedlichen Lebensdauererhältnissen L_V (Aussagewahrscheinlichkeit $P_A = 90\%$, $b = 2$).

4.2.2. Berücksichtigung von Ausfällen

In obige Gleichungen können Ausfälle während der Prüfzeit folgendermaßen berücksichtigt werden. Für die Aussagewahrscheinlichkeit gilt allgemein nach [1], S. 272 die Binomialverteilung:

$$P_A = 1 - \sum_{i=0}^x \binom{n}{i} (1 - R(t))^i R(t)^{n-i}, \quad R(t) = R(t_0)^{L_V^b}, \tag{4.6}$$

mit x - Anzahl der Ausfälle im Prüfzeitraum t und n - Anzahl der Prüflinge. Im Allgemeinen kann diese Gleichung nicht explizit nach n aufgelöst werden, sondern muss iterativ bestimmt werden. Dies kann durch eine graphische Auswertung anhand des Larson – Nomogramms vermieden werden, Details dazu werden hier nicht aufgeführt und sind in [1] zu finden.

4.2.3. Berücksichtigung von Vorinformationen

Die Bayes'sche Statistik (Thomas Bayes, 1702-1761) behandelt Schätz- und Testverfahren unter Berücksichtigung von Vorinformationen. Bekanntlich schätzt man die unbekannt Parameter μ (Mittelwert) und σ (Standardabweichung) einer Verteilung durch die aus den Ergebnissen einer Stichprobe ermittelten Größen \bar{x} und s . Man kann zu beiden Parametern Vertrauensbereiche (Intervalle um \bar{x} bzw. s) angeben, welche die unbekannt Werte μ und σ überdecken, siehe Kap. 6.1.3.4. Die Breiten dieser Intervalle hängen vom Stichprobenumfang und der gewählten



Aussagewahrscheinlichkeit ab. Sofern über μ und σ „geeignete Vorinformationen“ vorliegen, können im Rahmen der Bayes-Theorie Schätzwerte berechnet werden, deren Vertrauensbereiche kleiner sind als diejenigen, die man ohne Berücksichtigung der Vorinformationen erhält.

Allgemein gesagt liefert die Verknüpfung von Vorinformationen (in Form einer „a priori-Verteilung“) über das Verhalten einer Zufallsgröße mit zusätzlichen, aus Versuchsergebnissen gewonnenen Erkenntnissen eine verbesserte Information („a posteriori-Verteilung“) über die Zufallsgröße.

Das oben genannte Beispiel ist nur eines von vielen Anwendungsbeispielen der Bayes - Theorie, zeigt aber bereits deren Problematik auf: was bedeutet „geeignete Vorinformation“?

Übertragen auf das Problem der Schätzung der charakteristischen Lebensdauer T und der Ausfallsteilheit b der Weibull-Verteilung könnte man versuchen, Vorinformationen über das Ausfallverhalten eines Erzeugnisses zu nutzen, um die anhand der Ergebnisse einer aktuellen Lebensdaueruntersuchung ermittelte Schätzung von b und T zu verbessern. Sofern die Vorinformation Ergebnisse von Versuchen an einer Stichprobe von Prüflingen sind, die mit den im aktuellen Test untersuchten Prüflingen vergleichbar sind, so liefert die Bayes - Theorie erwartungsgemäß das gleiche Ergebnis, das man auch findet, wenn man beide Stichproben zu einer einzigen zusammenfasst.

Beziehen sich die Vorinformationen dagegen auf einen anderen Musterstand oder ein ähnliches Erzeugnis, so ist ihre Verwendbarkeit abhängig vom Grad der Ähnlichkeit der Prüfobjekte. Die Subjektivität einer diesbezüglichen Entscheidung ist einer der Gründe dafür, dass die Bayes - Theorie in der Fachwelt kontrovers diskutiert wird und ihre praktische Anwendbarkeit umstritten ist. Eine detaillierte Diskussion zu diesem Thema findet sich in [17].

4.2.4. Beschleunigte Lebensdauerprüfung

In vielen Fällen sind die zum Nachweis von Zuverlässigkeitsforderungen notwendigen Prüfzeiten bei „normaler“ Beanspruchung im Verhältnis zur Gesamtzeit, die zur Entwicklung eines Erzeugnisses zur Verfügung steht, inakzeptabel lang. Man versucht daher, Methoden anzuwenden, die die Prüfzeiten herabsetzen oder begrenzen. Dabei sind u.a. folgende Untergruppen zu unterscheiden:

- Parallelprüfung: Falls die Anlagentechnik es erlaubt, ist die einfachste Vorgehensweise die gleichzeitige Erprobung von Prüflingen. Dabei ist zu beachten, dass die tatsächlichen Ausfallzeiten der parallel geprüften Teile erfasst werden müssen und der Ausfall eines einzelnen Teiles auf das Ausfallverhalten der restlichen Teile keinen Einfluss haben darf. Da diese Anforderungen manchmal schwer zu erfüllen sind, kann eine Kombination der Parallelprüfung mit den Auswertetechniken für unvollständige Tests angebracht sein.
- Unvollständige Tests: Verfahren, bei denen die Prüfzeit oder die Anzahl der Ausfälle vor dem Test festgelegt wird (z.B. Sudden-Death-Test, Degradationstest), und bei denen eine spezielle Auswertung die „Unvollständigkeit“ der erfassten Lebensdauern berücksichtigt.
- Raffung: Verfahren, bei dem aus Erprobungsergebnissen auf einem überhöhten Belastungsniveau unter Anwendung eines physikalisch begründbaren Modells auf die Lebensdauer bei „normaler“ Belastung geschlossen wird. Ein solcher Schluss ist selbstverständlich nur unter der Annahme gerechtfertigt, dass durch die Laststeigerung keine Änderung des Ausfallmechanismus' verursacht wird.

Für die Durchführung von Parallelprüfungen bedarf es keinen weiteren Ausführungen. Die Auswertung von unvollständigen Tests wird in Kap. 4.3 näher erläutert. Eine Raffung bedarf hingegen einer näheren Diskussion.

Die einfachste Raffungsmöglichkeit besteht darin, die Belastungsintensität zu erhöhen, ohne die Belastungshöhe zu ändern, z.B. Stillstandszeiten wegzulassen, Belastungsfrequenzen zu erhöhen usw. Es ist jedoch generell Vorsicht geboten, denn hier können unerwartete Phänomene auftreten, wie



z.B. eine deutliche Erwärmung nach Erhöhung der Belastungsfrequenz, welche zur Minderung der Lebensdauer führt.

Eine Raffung kann auch dadurch erreicht werden, dass nicht die Belastung, sondern die Beanspruchung durch Variation eines Kontrollfaktors (z.B. Wanddicke) erhöht wird. Hier müssen ebenfalls unerwünschte Nebeneffekte (z.B. veränderte Oberflächeneigenschaften nach Wanddickenbearbeitung) berücksichtigt werden.

Liegt eine Beanspruchung P (z.B. Temperatur, Beschleunigung, Spannung) an, so tritt nach einer bestimmten Zeit t (allg. Wert des Lebensdauermerkmals, z.B. Betriebszeit, Anzahl von Lastwechseln, von Impulsen usw.) an dem Objekt, auf das sie einwirkt, ein bestimmter Schädigungsgrad auf. Häufig lässt sich der Zusammenhang zwischen P und t durch einen Ausdruck der Form

$$t \cdot f(P) = const. \tag{4.7}$$

beschreiben. Wird Gl. (4.7) einmal für t, P und einmal für t_0, P_0 aufgestellt und werden beide Gleichungen dividiert, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\frac{t}{t_0} = \frac{f(P_0)}{f(P)}. \tag{4.8}$$

Bei Gültigkeit einer solchen Beziehung, kann man also erwarten, dass eine erhöhte Beanspruchung P innerhalb der verkürzten Zeit t die gleiche Schädigung (gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit) hervorruft wie die ursprüngliche Beanspruchung P_0 innerhalb der ursprünglichen Zeit t_0 .

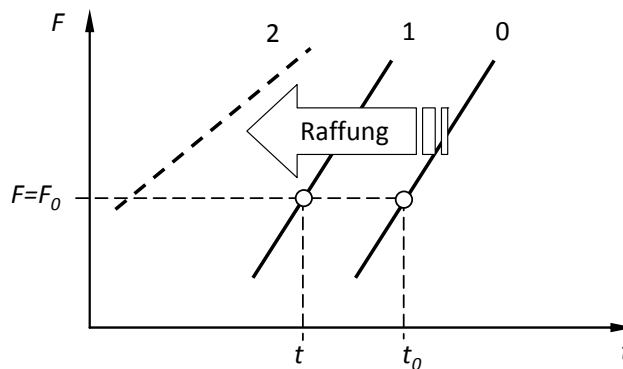


Bild 28: Raffung im Wahrscheinlichkeitspapier (schematisch). Linie 0 – Ausgangs-Ausfallwahrscheinlichkeitsverteilung, Linie 1 – Verteilung nach einer zulässigen Raffung, Linie 2 – Verteilung nach einer unzulässig - hohen Raffung, welche zu einem geänderten Ausfallmechanismus führt.

Beispiele für Zusammenhänge nach Gl. (4.7) sind die Arrhenius - Gleichung (Temperatur T als Beanspruchungsparameter P)

$$t \cdot \exp\left(-\frac{c}{T}\right) = const. \tag{4.9}$$

und die Coffin-Manson-Formel (Anzahl der Lastwechsel N als Lebensdauermerkmal t)

$$N \cdot P^k = const., \tag{4.10}$$

wobei mit c und k Konstanten bezeichnet wurden.

Für die Coffin-Manson-Beziehung folgt aus Gl. (4.8), dass

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{P_0}{P}\right)^k, \tag{4.11}$$



dies ist auch die typische Darstellungsform einer Wöhlerlinie, wie sie zur Beschreibung z.B. von Ermüdungsausfällen verwendet wird, siehe auch Kap. 3.4.3. Bei einer erhöhten Beanspruchung $P > P_0$ folgt somit eine um den Faktor

$$\left(\frac{P_0}{P}\right)^k =: \frac{1}{\kappa_{CM}} \quad (4.12)$$

verkürzte Lebensdauer $N < N_0$. Der Faktor κ_{CM} heißt Coffin-Manson-Beschleunigungsfaktor und wird häufig zur Raffung von Lebensdauerversuchen unter mechanischer Belastung verwendet.

In der physikalischen Chemie wird die Temperaturabhängigkeit einer Reaktionsgeschwindigkeit v durch die Arrhenius-Gleichung beschrieben:

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{c}{T}\right). \quad (4.13)$$

Mit c wurde dabei das Verhältnis von Aktivierungsenergie und Boltzmann-Konstante E_a/K bezeichnet, allgemein kann c aber auch als eine freie Konstante aufgefasst werden, welche an Versuchsergebnissen angepasst werden muss. v_0 bezeichnet eine Reaktionskonstante.

Falls die Modellvorstellung entwickelt wird, dass bei der Schädigung durch Temperatureinwirkung ein physikalisch-chemischer Prozess abläuft, welcher erst nach Erreichung eines kritischen „Stoffumsatzes“ zum Ausfall führt, kann die Zeit bis zur Erreichung dieses Stoffumsatzes als Lebensdauer t interpretiert werden. Damit ist die Lebensdauer umgekehrt proportional zur Reaktionsgeschwindigkeit $t \sim 1/v$ und es folgt, unter Berücksichtigung von Gl. (4.13), unmittelbar Gl. (4.9).

Wird Gl. (4.9) einmal für t, T und einmal für t_0, T_0 aufgestellt und werden diese Gleichungen dividiert, ergibt sich folgende Beziehung:

$$t = t_0 \exp\left(\frac{c}{T} - \frac{c}{T_0}\right). \quad (4.14)$$

Bei höherer Temperatur $T > T_0$ verkürzt sich demnach die Lebensdauer $t < t_0$ um den Faktor

$$\exp\left(\frac{c}{T} - \frac{c}{T_0}\right) =: \frac{1}{\kappa_A}. \quad (4.15)$$

κ_A heißt Arrhenius-Beschleunigungsfaktor und kann sehr effektiv zur Zeitraffung benutzt werden.

Zu beachten ist, dass ein Beschleunigungsfaktor sich auf einen konkreten Ausfallmechanismus bezieht, d.h. unterschiedliche Ausfallmechanismen können unterschiedliche Konstanten c und k aufweisen, so dass deren Beschleunigungsfaktoren ebenfalls unterschiedlich sind. Eine Raffung kann bei der Testplanung dadurch berücksichtigt werden, dass in Gl. (4.5) bzw. (4.6) die Größe L_V durch $\kappa \cdot L_V$ ersetzt wird, mit $L_V = t/t_0$, t – Testdauer (nach Raffung), t_0 – Verweildauer im Feld.

4.2.5. Reliability Growth Management (RGM)

RGM ist ein Konzept zur Planung, Verfolgung und Visualisierung der Zuverlässigkeit von Produkten während der Entwicklung. Das von Duane in den 60er Jahren entwickelte Konzept beruht darauf, dass die Zuverlässigkeit eines Produkts infolge der Anstrengungen während der Entwicklung zunimmt. Duane hat dabei festgestellt, dass ein solcher Zuwachs erfahrungsgemäß nicht beliebig hoch sein kann, sondern sich in gewissen (ggf. organisationseinheitsspezifischen) Grenzen bewegt.

Die Verfolgung, ob der aktuelle Stand der Zuverlässigkeit sich in den besagten Grenzen bewegt, kann als ein Frühindikator für mögliche Probleme benutzt werden. Als Maß für die Zuverlässigkeit verwendet man die statistische Kenngröße MTTF (mittlere Laufzeit bis zum Ausfall während der Erprobung).



Der Duane'sche Ansatz geht davon aus, dass deren doppeltlogarithmische Auftragung gegen die kumulierte Testzeit bei Zuverlässigkeitszunahme eine Gerade mit positiver Steigung ergibt.

Das Vorgehen kann wie folgt zusammengefasst werden:

- In der Planungsphase eines Reliability-Growth-Programms wird aufgrund von vorliegenden Anforderungen eine Ziel-Lebensdauer festgelegt (im Bild: $MTTF_F=3000h$), sowie eine vorgesehene kumulierte Gesamttestdauer T (im Bild: $T=10000h$), nach der dieser Zielwert erreicht sein soll. Diese beiden Werte definieren einen Zielpunkt im RG-Diagramm (die Indizes I und F stehen für Initial und Final).
- Die Anfangszuverlässigkeit $MTTF_I$ ist die am Ende einer ersten Testphase erreichte mittlere Lebensdauer oder ein Schätzwert auf Basis von früheren Entwicklungen (Startpunkt).
- Durch die Verbindungsgerade von Start- und Zielpunkt im RG-Diagramm ist die angestrebte Wachstumsrate der Produktzuverlässigkeit festgelegt. Im Rahmen der Entwicklungstätigkeit muss diese Rate mindestens realisiert werden, wenn das gesetzte Zuverlässigkeitsziel in der vorgesehenen Zeit und mit den zur Verfügung stehenden Ressourcen erreicht werden soll. Die beiden Geraden oberhalb bzw. unterhalb der Sollgeraden entsprechen einer Wachstumsrate von 0,3 (unten) bzw. 0,6 (oben) und kennzeichnen gängiges Zuverlässigkeitswachstum.
- Die anhand von Tests bestimmte, aktuelle Zuverlässigkeit wird im RG-Diagramm aufgetragen. Durch Vergleich mit der in der Planungsphase festgelegten Geraden wird die Abweichung vom geplanten Zuwachs deutlich.

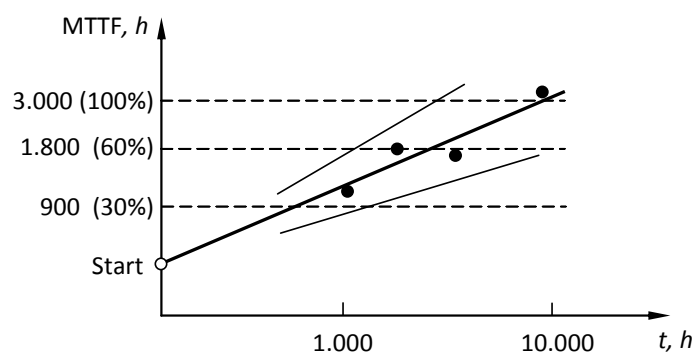


Bild 29: RGM-Diagramm

Das RGM-Konzept ergänzt die Durchführung und Auswertung von Lebensdaueruntersuchungen im Entwicklungsstadium um die Elemente Planung, Verfolgung und Visualisierung des Entwicklungsfortschritts. Es hat aber auch entscheidende Nachteile:

- Es entsteht der Eindruck, dass die Zuverlässigkeit eines Produktes („Zuverlässigkeitswachstum“) automatisch und allein aufgrund der Tatsache steigt, dass Produkte erprobt werden. In Wirklichkeit kann durch eine Erprobung nur die aktuelle Zuverlässigkeit gemessen, bzw. nachgewiesen werden. Die Verbesserung der Zuverlässigkeit ist hingegen auf eine Verbesserung des Designs während der Entwicklung zurückzuführen.
- Das RGM-Konzept berücksichtigt nicht die unterschiedlichen Anstrengungen einer erfolgreichen und einer weniger erfolgreichen Entwicklung. Außerdem basieren die Erfahrungswerte für ein gängiges Wachstum einer Erfahrung aus den 60er Jahren. Seitdem haben sich die Entwicklungszeiten und – Methoden allerdings entscheidend geändert.
- Der Ansatz suggeriert, dass lange Entwicklungszyklen mit aufwendiger Erprobung nach dem „trial and error“ - Schema unausweichlich sind. In Wirklichkeit ist aber ein Optimum erreicht, wenn durch Kenntnis der Wirkzusammenhänge im Rahmen eines präventiven Ansatzes bereits im



Entwurfsstadium ein weitgehend ausgereiftes Design entwickelt wird, welches anschließend nur experimentell verifiziert werden muss.

Aus diesem Grund sollte das RGM-Konzept eher kritisch behandelt und lediglich als Planungs- und Verfolgungsinstrument verwendet werden.

4.3. Auswertung von Lebensdauerdaten

Lebensdauerdaten auszuwerten heißt die Daten an eine bestimmte Verteilung anzupassen und deren Verteilungsparameter zu bestimmen. Generell stellt sich die Frage, wie aus den Daten einer Stichprobe, die Parameter der Grundgesamtheit, aus der diese Daten stammen, ermittelt werden können. Nachfolgend werden die wichtigsten grafischen und analytischen Verfahren vorgestellt.

4.3.1. Vollständige und unvollständige (zensurierte) Daten

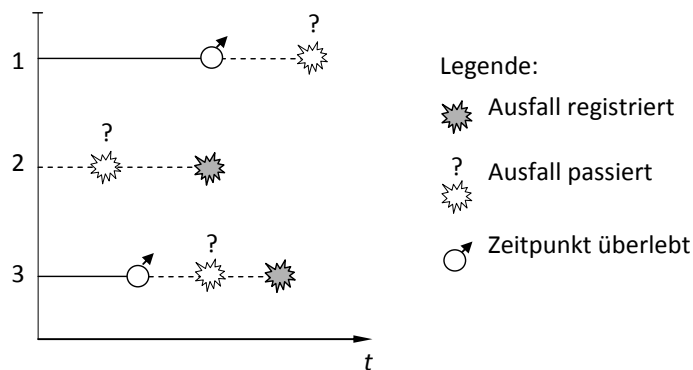


Bild 30: Zensorisierungsarten: Rechts- (1), Links- (2) und Intervall - Zensorisierung (3).

Falls bei einer Lebensdaueruntersuchung eine Stichprobe von n Teilen bis zum Ausfall aller Prüflinge getestet wird, spricht man von einer vollständigen Stichprobe. Werden dagegen einige Prüflinge vor dem Ausfall aus dem Test herausgenommen, wird der Test vor dem Ausfall aller Objekte abgebrochen oder ist der genaue Zeitpunkt des Ausfalls unbekannt, so liegt eine unvollständige Stichprobe vor. In diesem Zusammenhang spricht man von zensurierten Stichproben.

Generell werden drei Arten der Zensorisierung unterschieden, Bild 30:

- **Rechts-Zensorisierung:** Hier ist zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, das ein Prüfling überlebt hat. Zu welchem (späteren) Zeitpunkt dieser Prüfling ausgefallen ist (oder ausfallen wird) ist dagegen unbekannt.
- **Links-Zensorisierung:** Hier ist zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, das ein Prüfling bereits ausgefallen war. Zu welchem (früheren) Zeitpunkt der Ausfall genau passiert ist, bleibt hingegen offen. Dieser Fall tritt beispielsweise auf, wenn keine automatische Ausfallüberwachung durchgeführt wurde und bereits bei der ersten manuellen Inspektion Ausfälle festgestellt wurden, die zu einem beliebigen Zeitpunkt nach Start des Versuchs passiert sein können.
- **Intervall-Zensorisierung:** Diese Art der Zensorisierung ist eine Kombination von den ersten beiden Arten: Hier kann der Ausfall eines Prüflings in einem bestimmten Intervall zwischen zwei Zeitpunkten (z.B. zwischen zwei Inspektionen) erfolgt sein, der genaue Zeitpunkt ist allerdings unbekannt.

Die größte praktische Relevanz hat die Rechts - Zensorisierung. Hier unterscheidet man ebenfalls drei Arten, Bild 31:

- **Typ I Zensorisierung:** Die Untersuchung wird zu einem festen Zeitpunkt t abgebrochen. Die Anzahl der bis zu diesem Zeitpunkt ausgefallenen Prüflinge r , $0 \leq r \leq n$ ist eine Zufallsgröße.



- Typ II Zensorisierung: Die Untersuchung wird nach dem Ausfall einer vorgegebenen Zahl r von Prüflingen abgebrochen. Bei $r = 1$ ergibt sich der sogenannte Sudden-Death-Test. In diesem Fall ist also die Zahl r vor Beginn des Tests bekannt, nicht aber der Zeitpunkt t , zu dem der Ausfall erfolgt. Hier ist die Gesamttestzeit eine Zufallsgröße.
- Gemischte Zensorisierung: Es kommt häufig vor, dass Prüfobjekte vor dem Ausfall aus dem Versuch herausgenommen werden müssen. Anders als bei der Typ I/II Zensorisierung, bei der die überlebenden Durchläufer alle zum gleichen Zeitpunkt aus dem Versuch genommen werden, können sich dabei unterschiedliche Zeitpunkte der „Herausnahme“ ergeben. Dieser Fall tritt dann auf, wenn Erzeugnisse bzgl. einer Ausfallart (z.B. an der Elektronik) untersucht werden sollen und dabei auch weitere Ausfallarten (z.B. an der Mechanik) auftreten.

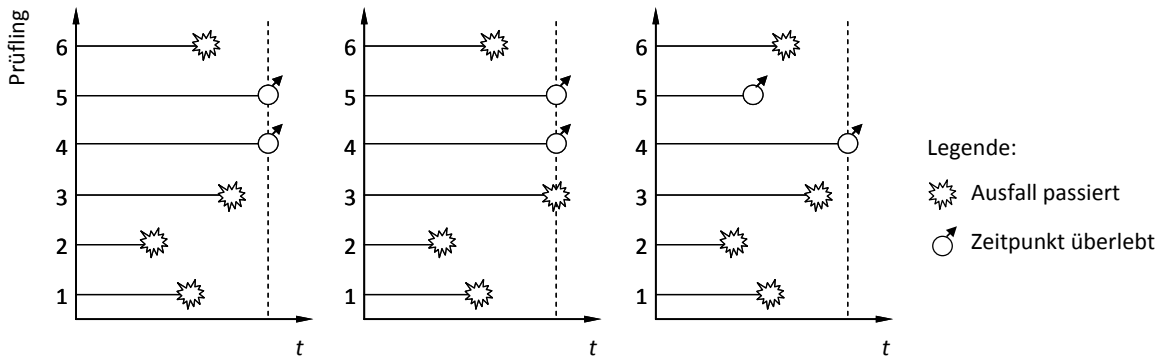


Bild 31: Typen rechts-zensorisierter Daten. Typ I Zensorisierung (links): Versuchstop nach einer fest vorgegebenen Zeit. Prüflinge Nr. 4 und Nr. 5 erreichen das Versuchsende ohne Ausfall. Typ II Zensorisierung (Mitte): Versuchstop nach einer fest vorgegebenen Anzahl Ausfälle, hier 4. Prüflinge Nr. 4 und Nr. 5 sind zum Zeitpunkt des letzten Ausfalls noch intakt. Multiple Zensorisierung (rechts). Prüfling Nr. 4 wird zu einem frühen Zeitpunkt aus dem Versuch entnommen, Prüfling Nr. 5 erreicht das Versuchsende ohne Ausfall.

Zur Auswertung unvollständiger Stichproben werden spezielle mathematische Verfahren angewendet. Zwar liegt von den Prüflingen, die aus dem Test herausgenommen worden sind, keine Ausfallzeit vor, jedoch stellt auch die ohne Ausfall absolvierte Testzeit eine wesentliche Information dar, die bei der Auswertung unbedingt berücksichtigt werden muss.

4.3.2. Grafische Auswertung im Weibull-Netz

Durch zweifaches Logarithmieren der Verteilungsfunktion der Weibull-Verteilung

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{T}\right)^b\right), \tag{4.16}$$

ergibt sich der Ausdruck

$$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right) = b \cdot \ln(t) - b \cdot \ln(T). \tag{4.17}$$

Dies ist eine Geradengleichung der Form $y = a_0 + a_1 \cdot x$, mit $x = \ln(t)$. In einer entsprechend transformierten Grafik („Weibull-Netz“) würde die Verteilungsfunktion der Weibull-Verteilung als Gerade erscheinen. Durch Auftragung von beobachteten Ausfällen im Weibull-Netz und der anschließenden Annäherung mit einer Geraden, können Schätzwerte der beiden Weibull-Parameter b und T bestimmt werden.

Obwohl eine grafische Auswertung heutzutage nicht mehr zeitgemäß erscheint und durch Standardsoftware wie z.B. Weibull++ der Firma Reliasoft erledigt werden kann, ist diese jedoch für



das Verständnis der Zusammenhänge wichtig. Außerdem sind die meisten der hier vorgestellten Verfahren (eventuell modifiziert) auch in den kommerziellen Softwarepaketen implementiert.

4.3.2.1. Vollständige Daten

Dieser Abschnitt beschreibt die Vorgehensweise zur graphischen Ermittlung von Schätzwerten der Parameter charakteristische Lebensdauer T und Formparameter (Ausfallsteilheit) b für vollständige Daten, vgl. auch [1], S.203f.

Vorgehen:

1. Ordnen der n Ausfallzeiten t_i der Größe nach, der kleinste Wert mit Rang 1, der größte Rang n .
2. Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit F_i zu jeder Rangzahl i mit

$$F_i = \frac{i - 0,3}{n + 0,4} \tag{4.18}$$

3. Eintragung der Wertpaare (t_i, F_i) in das Weibull-Wahrscheinlichkeitspapier.
4. Ermittlung einer Ausgleichsgeraden durch die Punkte (grafisch oder analytisch). Liegen die eingezeichneten Punkte hinreichend gut auf der Ausgleichsgerade, so kann die vorliegende Ausfallcharakteristik durch eine Weibull-Verteilung gut beschrieben werden.
5. Der Schnittpunkt der Ausgleichsgerade mit der waagrechten 63,2%-Linie besitzt auf der Zeitachse die charakteristische Lebensdauer T , welche dort abgelesen werden kann.
6. Eintragung einer Parallelen der Ausgleichsgerade durch den Pol-Punkt. Der Formparameter b kann nun an der rechten Formparameter-Skala abgelesen werden (grafische Auswertung). Bei einer analytischen Auswertung entspricht der Formparameter b der Neigung der Ausgleichsgeraden.

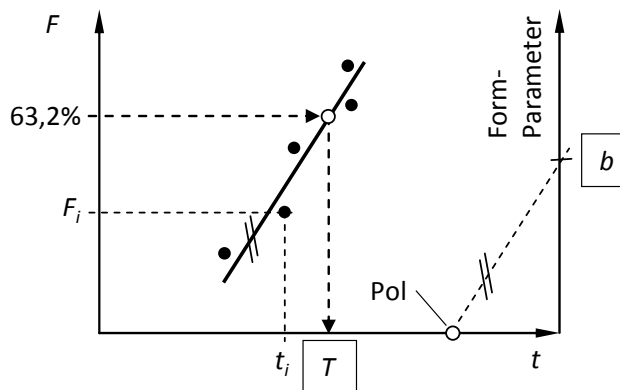


Bild 32: Grafische Bestimmung der Weibull-Parameter im Wahrscheinlichkeitsnetz (schematisch)

ANMERKUNGEN:

Gl. (4.18) ist eine Näherung der exakten Beziehung, welche anhand der Binomial-Verteilung abgeleitet werden kann, siehe dazu Kap. 6.1.3.5 im Anhang.

Fällt man das Lot vom Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden mit der waagrechten 10%-Linie auf die Zeitachse, so kann dort die t_{10} -Lebensdauer abgelesen werden. Analoges gilt für das 50%- und jedes weitere Quantil.

Die Skalierung der logarithmischen Zeitachse (t-Achse) kann durch Multiplikation mit einem geeigneten Skalenfaktor den vorliegenden Ausfallzeiten angepasst werden. Wählt man beispielsweise den Faktor 10h (10 Stunden), so entspricht

<i>die Zahl</i>	<i>1</i>	<i>auf der t-Achse dem Wert</i>	<i>10</i>	<i>Stunden,</i>
<i>die Zahl</i>	<i>10</i>	<i>auf der t-Achse dem Wert</i>	<i>100</i>	<i>Stunden,</i>



die Zahl 100 auf der t-Achse dem Wert 1000 Stunden.

Statt für die Zeit kann die Skalierung beispielsweise auch für die gefahrene Strecke, die Anzahl von Lastwechseln, Schaltvorgängen oder Arbeitszyklen vorgenommen werden.

BEISPIEL:

Eine Stichprobe von 10 Verstellmotoren wurde nach einem festgelegten Prüfzyklus auf einem Dauerlaufprüfstand untersucht. Bis zum jeweiligen Ausfall erreichten die Prüflinge folgende Zyklenzahlen (in aufsteigender Reihenfolge und in Einheiten von 10^5 Zyklen):

Motor Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zyklen bis zum Ausfall, / 10^5	0,41	0,55	0,79	0,92	1,1	1,1	1,4	1,5	1,8	1,9
Ausfallwahrscheinlichkeit, %	6,7	16,3	26,0	35,6	45,2	54,8	64,4	74,0	83,7	93,3

Abgelesen: Charakteristische Lebensdauer $T = 1,3 \cdot 10^5$ Prüfzyklen, Formfaktor $b=2,1$.

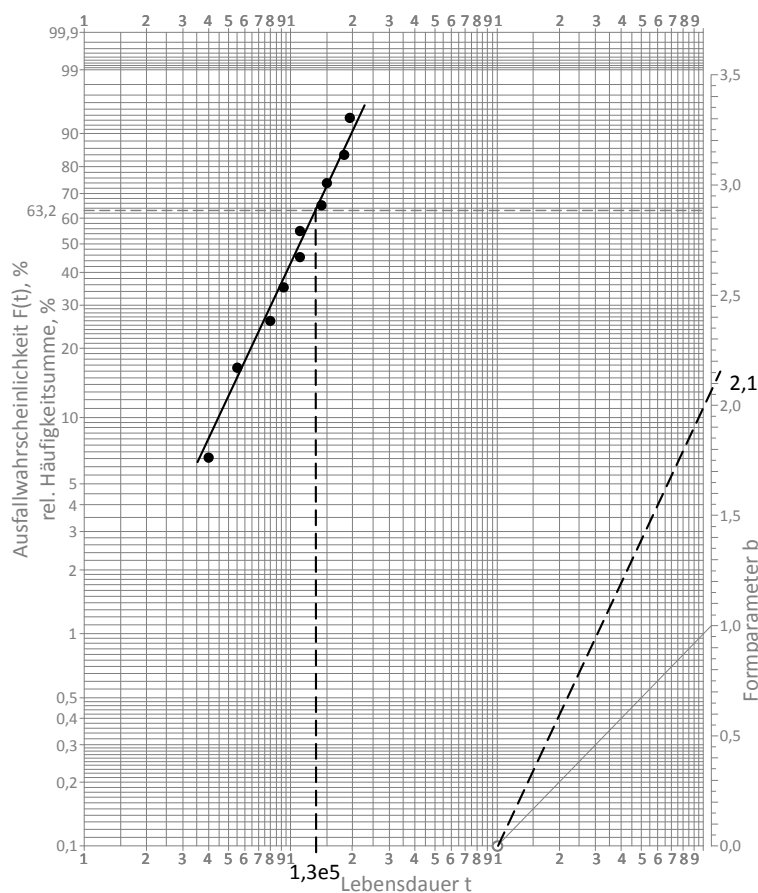


Bild 33: Beispiel im Wahrscheinlichkeitspapier

4.3.2.2. Unvollständige Daten

Unvollständige Daten liegen dann vor, wenn die Ausfallzeiten von manchen Prüflingen unbekannt sind. Die ohne Ausfall absolvierte Testzeit von Prüflingen, die aus einem Test herausgenommen worden sind, oder von solchen, die noch nicht ausgefallen sind, stellt eine wesentliche Information dar, die bei der Auswertung unbedingt berücksichtigt werden muss, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL:

Ein Hersteller hat 100 Einheiten produziert und verkauft. In den ersten drei Monaten nach dem Verkauf werden folgende Ausfälle registriert:



Monat	Anzahl Ausfälle
1	1
2	1
3	2

Welche ist die mittlere Lebensdauer? Eine naive (und falsche!) Auswertung würde den Mittelwert der vorliegenden Lebensdauern zugrunde legen, ohne zu berücksichtigen, dass die überwiegende Mehrheit der Einheiten mindestens 3 Monate überlebt hat:

$$\bar{t} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{4} = 2.25. \tag{4.19}$$

Offensichtlich kann die mittlere Lebensdauer nicht 2.25 Monate betragen, denn zu diesem Zeitpunkt sind nicht nahezu die Hälfte der Einheiten ausgefallen, wie man von der mittleren Lebensdauer erwarten würde.

Geeignete Verfahren zur Berücksichtigung unvollständiger Daten werden in den folgenden Abschnitten gezeigt.

Zensorisierung Typ I und II

In beiden Fällen (Zensorisierung Typ I und II) kann eine Auswertung ähnlich wie bei einer vollständigen Stichprobe vorgenommen werden, siehe Kap. 4.3.2.1. Dabei können die Ausfallwahrscheinlichkeiten für die Eintragung im Weibull-Netz nach der Näherungsformel

$$F_i = \frac{i - 0,3}{n + 0,4} \text{ für } i = 1, 2, \dots, r \tag{4.20}$$

berechnet werden (eine exakte Beziehung findet sich im Anhang, Kap. 6.1.3.5).

Die Tatsache, dass $n - r$ Prüflinge nicht ausgefallen sind, wird also dadurch berücksichtigt, dass in der Näherungsformel n und nicht r im Nenner auftritt.

BEISPIEL (FORTSETZUNG):

Eine korrekte Auswertung des Beispiels aus dem vorigen Kapitel müsste also berücksichtigen, dass 96 Teile 3 Monate überlebt haben (Typ-I Zensorisierung). Nach Gl. (4.20) ergeben sich damit folgende Ausfallwahrscheinlichkeiten:

Ausfall Nr.	Zeitpunkt	F_i [%]
1	1	0,7
2	2	1,7
3	3	2,7
4	3	3,7

Eine grafische Auswertung ist im Bild 34 aufgeführt. Folgende Kennwerte wurden abgelesen: Charakteristische Lebensdauer $T = 35$ Monate, Formparameter $b = 1.4$, Zeitpunkt, zu dem die Hälfte der Teile ausgefallen sein werden (Median): $t_{50} = 27$ Monate.

HINWEIS:

Bei der Auswertung von Versuchen mit Typ-I- oder Typ-II-Zensorisierung ist es meist notwendig, zur Abschätzung der charakteristischen Lebensdauer T die Ausgleichsgerade im Weibull-Netz über den Zeitpunkt des letzten Ausfalls hinaus zu extrapolieren. Dies ist grundsätzlich problematisch, sofern weitere Ausfallmechanismen nicht ausgeschlossen werden können. Im Zweifelsfall darf sich also eine statistische Aussage über das Ausfallverhalten nur auf die Zeit zwischen kleinster und größter beobachteter Lebensdauer beziehen.

Der vorstehende Hinweis lässt sich verallgemeinern: Sowohl bei vollständigen als auch bei unvollständigen Stichproben liefert die Auswertung im Weibull-Netz eine Information über das Ausfallverhalten, die auf den Bereich zwischen kleinstem und größtem Wert des Lebensdauermerkmals beschränkt ist.



2020-04-06 - SOCOS

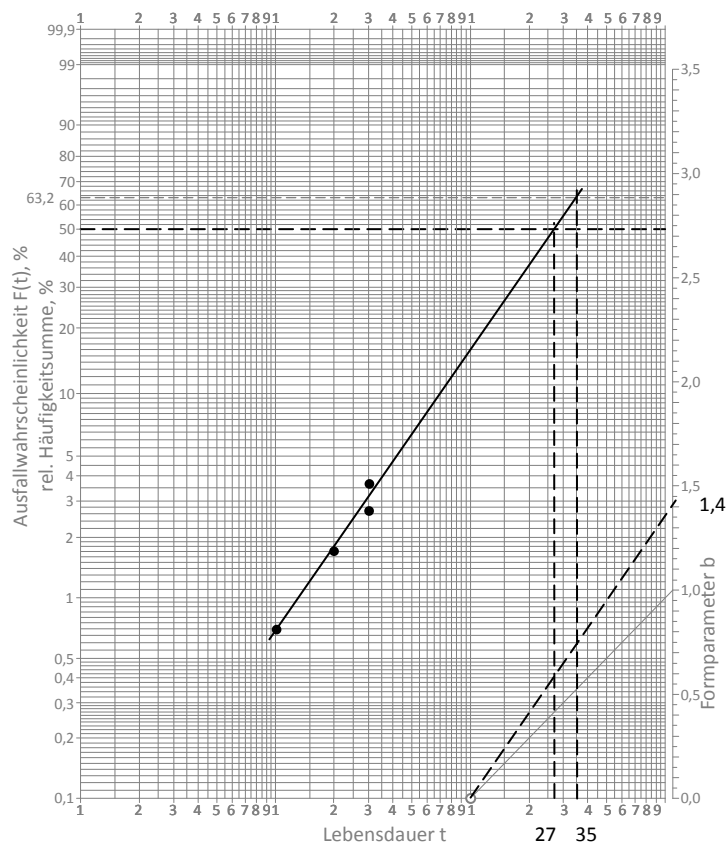


Bild 34: Beispiel Typ-I zensorisierte Daten im Wahrscheinlichkeitspapier

Multiple Zensorisierung

Multiple (oder mehrfache) Zensorisierung liegt vor, wenn vor Versuchsende Prüflinge aus der Prüfung entnommen werden, beispielsweise für eine zerstörende Prüfung, oder wenn Feldteile zu einem Inspektionszeitpunkt intakt waren und danach keine Information mehr über sie vorliegt. In einem weiteren typischen Anwendungsfall liegen gemischte Ausfälle von zwei unterschiedlichen Ausfallmechanismen vor, bei deren Auswertung die Ausfälle des jeweils anderen Mechanismus nicht vernachlässigt, sondern als Durchläufer gewertet werden müssen.

Auswertung nach Johnson

In [8] wird zur Auswertung mehrfach zensorisierter Versuchsergebnisse ein auf Johnson zurückgehendes Verfahren angegeben. Der Hintergrund dieses Verfahrens kann folgendermaßen erklärt werden.

Angenommen, es liegen folgende Versuchsdaten vor:

Zeitpunkt	Ereignis
t_1	Ausfall 1
t_2	Durchläufer 1
t_3	Ausfall 2
t_4	Durchläufer 2

Die Frage, die sich nun stellt ist, welche Ränge den beiden Ausfällen zugeordnet werden können. Der erste Ausfall hat offensichtlich den Rang 1, denn vor ihm ist kein Ereignis passiert. Beim zweiten Ausfall ist die Situation etwas schwieriger. Je nachdem, ob der Durchläufer 1 nach oder vor dem Ausfall 2 ausgefallen wäre, kann der Ausfall 2 den Rang 2 oder 3 aufweisen. Die Idee ist nun, dem



zweiten Ausfall eine (nicht-ganze) Rangzahl zwischen 2 und 3 zuzuweisen. Diese Rangzahl kann aus der Überlegung abgeleitet werden, welche Fälle bei der vorliegenden Datenzusammensetzung möglich sind:

Rang	Möglichkeit 1	Möglichkeit 2	Möglichkeit 3
1	Ausfall 1	Ausfall 1	Ausfall 1
2	Ausfall von Durchl. 1	Ausfall 2	Ausfall 2
3	Ausfall 2	Ausfall von Durchl. 1	Ausfall von Durchl. 2
4	Ausfall von Durchl. 2	Ausfall von Durchl. 2	Ausfall von Durchl. 1

Ausfall 2 hätte demnach in einem Fall die Rangzahl 3 und in zwei Fällen die Rangzahl 2. Seine mittlere Rangzahl wäre damit:

$$j = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{3} = 2,33. \tag{4.21}$$

Mit dieser mittleren Rangzahl kann nun das Vorgehen aus Kap. 4.3.2.1 ab Schritt 2 weiter angewendet werden. Falls die Datenmenge größer wird, kann die Fallunterscheidung komplex werden, lässt sich aber anhand kombinatorischer Zusammenhänge gut formalisieren.

HINWEIS:

Nach diesem Verfahren wird lediglich die Anzahl der Durchläufer berücksichtigt, welche sich zwischen zwei Ausfällen befindet, nicht jedoch der eigentliche Zeitpunkt, der von einem Durchläufer erlebt wurde. So werden Situationen im Beispiel, bei denen t_2 etwas größer als t_1 oder etwas kleiner als t_3 ist, völlig identisch behandelt. Intuitiv müsste jedoch die Lebensdauer im ersten Fall tendenziell kleiner sein als im zweiten. Dieser Umstand stellt einen Nachteil der Methode dar, so dass besonders bei stark zensurierten Daten (wenig Ausfälle, viele ungleichmäßig verteilte Durchläufer) alternative, nicht auf Rangzahlen basierende Verfahren wie Maximum-Likelihood zu bevorzugen sind.

Vorgehen:

1. n Ereignisse (Ausfälle und Durchläufer) in Spalte a, die zugehörigen Ereignis-Zeitpunkte t_j in Spalte b eintragen ($j = 1, \dots, n$).
2. Ereignisse und Ereignis-Zeitpunkte nach t_j sortieren.
3. Fortlaufende Nummer j in Spalte c eintragen, beginnend mit $j = 1$.

Für jede Zeile j :

4. Rangzahl-Zuwachs N_j berechnen und in Spalte d eintragen. Falls das aktuelle Ereignis ein Ausfall ist, gilt:

$$N_j = \frac{n+1-i_{j-1}}{n+2-j}, i_0 = 0, \tag{4.22}$$

mit der vorherigen Rangzahl i_{j-1} . Falls das aktuelle Ereignis ein Durchläufer ist, gilt $N_j = 0$.

5. Die mittlere Rangzahl i_j aus der vorherigen Rangzahl i_{j-1} und dem aktuellen Zuwachs N_j berechnen und in Spalte e eintragen:

$$i_j = i_{j-1} + N_j, i_0 = 0. \tag{4.23}$$

6. Mit Schritt 2 aus Kap. 4.3.2.1 fortfahren.

Auswertung nach Nelson

Alternativ zum Johnson-Verfahren wird hier noch eine von Nelson [8] vorgeschlagene Methode aufgeführt. Die Vorgehensweise bei diesem Verfahren wird verständlich anhand folgender Erläuterungen.



Sei j die Nummer eines Ereignisses (Ausfall oder Durchläufer) in der geordneten Reihenfolge der zugehörigen Zeitpunkte t_j . In dem Augenblick, in dem sich ein Ausfall ereignet, sind einschließlich des „gerade ausfallenden“ noch $r_j = n - j + 1$ Einheiten mit Sicherheit intakt. Frühere Durchläufer, bei denen es unsicher ist, ob sie zu diesem Zeitpunkt noch intakt sind, werden nicht berücksichtigt. Mit anderen Worten wird angenommen, dass Durchläufer zwischen dem letzten und dem aktuellen Ausfall-Zeitpunkt, spätestens jetzt ausgefallen sind. Die Anzahl der noch intakten Einheiten r_j wird manchmal auch irreführend „inverser Rang“ bezeichnet. Das Verhältnis

$$\hat{\lambda}_j = \frac{1}{r_j} \tag{4.24}$$

ist per Definition ein Schätzwert für die momentane Ausfallrate, diese ist durch

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{4.25}$$

definiert. Mit der Definition der Ausfallwahrscheinlichkeitsdichte

$$f(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{d(1-R)}{dt} = -\frac{dR}{dt} \tag{4.26}$$

folgt, dass

$$\lambda(t) = -\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \text{ und } \lambda(t)dt = -\frac{1}{R} dR. \tag{4.27}$$

Die weiteren Berechnungen beruhen auf folgenden Beziehungen für die kumulative Ausfallrate $H(t)$, die sich durch Integration der vorstehenden Gleichung ergibt:

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(\tau) d\tau = -\ln(R(t)) = -\ln(1-F(t)). \tag{4.28}$$

Daraus folgt für die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$F(t) = 1 - \exp(-H(t)). \tag{4.29}$$

Für die praktische Berechnung empfiehlt es sich, die Zwischenschritte systematisch in einer Tabelle mit Spalten a bis h einzutragen.

Vorgehen:

1. Zeilen mit $j = 1, 2, \dots, n$ nummerieren und in Spalte a eintragen.
2. Ereignis-Zeiten der Größe nach geordnet in Spalte b eintragen.
3. Die zu den Ausfallzeiten gehörenden Angaben Ausfall „A“ oder Herausnahme „H“ in Spalte c eintragen.
4. Anzahl der noch intakten Einheiten $r_j = n - j + 1$ in Spalte d eintragen.

Die weiteren Eintragungen werden nur für die Ausfälle („A“) vorgenommen:

5. Kehrwerte der Zahlen aus Spalte d berechnen und in Spalte e eintragen.
6. Summe der Zahlen aus Spalte e von der ersten bis zur j -ten Zeile berechnen und in der j -ten Zeile der Spalte f eintragen. Die Werte \hat{H}_j können größer als 1 werden.
7. Mit Hilfe der Werte \hat{H}_j aus Spalte f die Potenzen $\exp(-\hat{H}_j)$ berechnen und in Spalte g eintragen.
8. Werte aus Spalte g von 1 subtrahieren und Ergebnisse in Spalte h eintragen.
9. Mit Schritt 3 aus Kap. 4.3.2.1 fortfahren.



Das Vorgehen soll anhand des folgenden Beispiels noch einmal verdeutlicht werden:

BEISPIEL:

Als Ergebnis eines Feldversuchs an 40 Erzeugnissen liegen die jeweils bis zum Ausfall absolvierten Betriebsstundenzahlen t_j (Lebensdauern) vor. Der Ausfall der Erzeugnisse erfolgte sowohl aufgrund mechanischer als auch aufgrund elektronischer Defekte. Wir nehmen für das Beispiel an, dass eine Auswertung bezüglich der Elektronik-Ausfälle vorgenommen werden soll („A“ = Ausfall in der Tabelle). Die wegen mechanischer Defekte ausgefallenen Erzeugnisse können also so behandelt werden, als seien sie vor dem Auftritt des interessierenden elektronischen Defekts aus dem Versuch herausgenommen worden („H“ = Herausnahme in Tabelle). Von ihnen ist bekannt, dass sie bis zum jeweiligen mechanischen Ausfall zum Zeitpunkt t_j elektronisch intakt waren. Selbstverständlich kann analog zur beschriebenen Vorgehensweise eine Auswertung der mechanischen Ausfälle vorgenommen werden.

Die Berechnungen sind in Tabelle 4 zusammengefasst.

Die beobachteten Lebensdauern (Ausfälle „A“) werden mit der Ausfallwahrscheinlichkeit aus Spalte h in das Weibull-Netz eingetragen, Bild 35 zeigt das Auswertergebnis für dieses Beispiel. Abgelesen wurden $b \approx 1,4$ und $T \approx 8.000h$. Die offenen Kreise entsprechen den Punkten, die sich ergeben würden, wenn man die Lebensdauern der herausgenommenen Erzeugnisse ignoriert und die beobachteten 8 Ausfälle wie bei einer vollständigen Stichprobe auswertet. In diesem Fall würde man also fälschlicherweise z.B. eine deutlich kleinere charakteristische Lebensdauer als Resultat angeben. Die Tatsache, dass die „H“-Teile bis zu ihrer Herausnahme intakt waren, stellt also eine wesentliche Information dar und muss bei der Auswertung berücksichtigt werden.

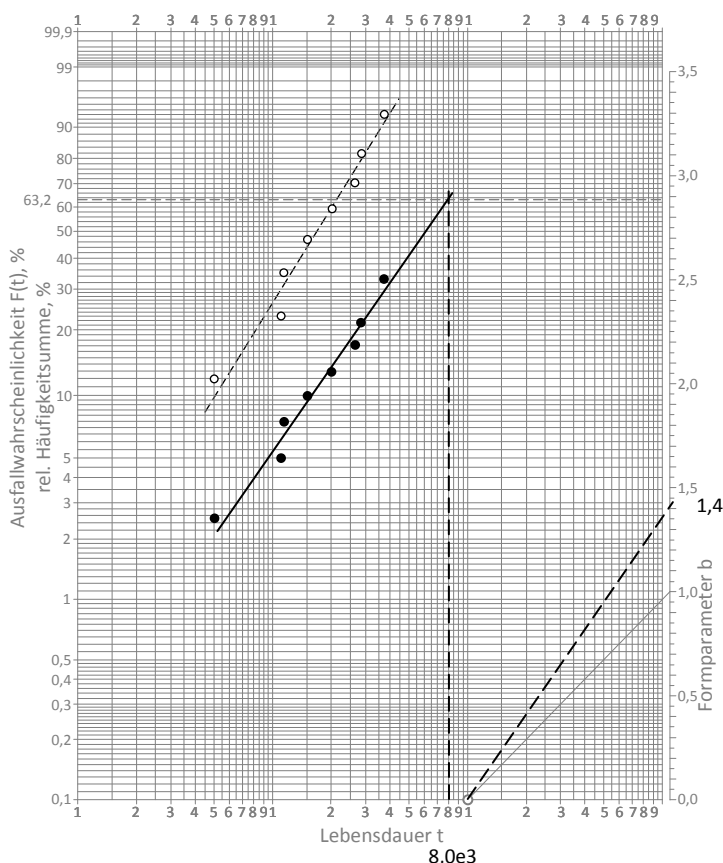


Bild 35: Darstellung der Auswertung nach Nelson im Wahrscheinlichkeitspapier (ausgefüllte Kreise). Die offenen Kreise entsprechen einer (falschen) Auswertung, bei der die Lebensdauern der herausgenommenen Erzeugnisse ignoriert wurden.



a	b	c	d	e	f	g	h
j	t_j , [h]	A/H	r_j	$\hat{\lambda}_j = \frac{1}{r_j}$	$\hat{H}_j = \sum_j \frac{1}{r_j}$	$\hat{R}_j = \exp(-\hat{H}_j)$	$\hat{F}_j = 1 - \hat{R}_j$
1	513	A	40	0,0250	0,0250	0,9753	2,5%
2	1118	A	39	0,0256	0,0506	0,9506	4,9%
3	1186	A	38	0,0263	0,0770	0,9259	7,4%
4	1468	H	37				
5	1520	H	36				
6	1529	A	35	0,0286	0,1055	0,8998	10,0%
7	1688	H	34				
8	1907	H	33				
9	1919	H	32				
10	2094	A	31	0,0323	0,1378	0,8713	12,9%
11	2170	H	30				
12	2201	H	29				
13	2239	H	28				
14	2280	H	27				
15	2345	H	26				
16	2356	H	25				
17	2386	H	24				
18	2483	H	23				
19	2641	A	22	0,0455	0,1832	0,8326	16,7%
20	2724	H	21				
21	2736	H	20				
22	2739	H	19				
23	2796	H	18				
24	2865	A	17	0,0588	0,2421	0,7850	21,5%
25	2912	H	16				
26	2990	H	15				
27	3196	H	14				
28	3353	H	13				
29	3355	H	12				
30	3425	H	11				
31	3472	H	10				
32	3522	H	9				
33	3575	H	8				
34	3696	H	7				
35	3723	A	6	0,1667	0,4087	0,6645	33,6%
36	4319	H	5				
37	4343	H	4				
38	4563	H	3				
39	5360	H	2				
40	7497	H	1				

Tabelle 4: Auswerteschema für „mehrfach zensierte Daten“ nach Nelson



4.3.3. Analytische Auswertung

Drei analytische Verfahren können für die Bestimmung der Parameter einer Verteilung aus experimentellen Daten angewendet werden:

- **Momenten-Methode:** Hier werden aus Kenngrößen der Stichprobe entsprechende Kenngrößen der Grundgesamtheit (sogenannte Momente) wie Erwartungswert (Mittelwert), Varianz, Schiefe etc. geschätzt. Aus den geschätzten Momenten werden anschließend die Parameter der Verteilung berechnet. Diese Abhängigkeit zwischen Parameter und Momente ist zwar theoretisch bekannt, aber in einigen Fällen nicht ganz einfach, beispielsweise bei der 3-parametrischen Weibull-Verteilung.
- Bei der Regressionsmethode werden die Lebensdauerdaten im entsprechenden Wahrscheinlichkeitspapier eingetragen und anschließend durch Regression mit einer Geraden angenähert. Aus der Lage dieser Geraden können nun die Parameter der Verteilung abgeschätzt werden.
- Beim Maximum-Likelihood Verfahren werden die Parameter einer Verteilung derart bestimmt, dass die Wahrscheinlichkeit, gerade die beobachteten Lebensdauerwerte zu beobachten, maximiert wird. Diese Wahrscheinlichkeit wird durch die sogenannte Likelihood-Funktion beschrieben.

Nachfolgend werden die Verfahren näher diskutiert.

4.3.3.1. Momentenmethode

Bei der Momentenmethode werden die gesuchten Parameter einer Verteilung aus deren Momente berechnet. Als Moment k -ter Ordnung m_k werden dabei folgende Kennzahlen bezeichnet:

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \cdot f(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

Darüber hinaus, gibt es noch die zentralen Momente:

$$m_{kz} = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - m_1)^k \cdot f(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

Die bekanntesten Momente sind:

- Erwartungswert (oder Mittelwert) $E(t) = m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) dt,$ (4.32)

- Varianz $\text{Var}(t) = m_{2z} = m_2 - m_1^2,$ (4.33)

- Schiefe $S_3(t) = \frac{m_{3z}}{\sqrt{m_{2z}^2}}.$ (4.34)

Das Vorgehen besteht nun darin, die Momente aus den empirischen Momenten einer Stichprobe zu schätzen:

$$E(t) \approx \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad (4.35)$$

$$\text{Var}(t) \approx s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2, \quad (4.36)$$



$$S_3(t) \approx \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{s^3} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^3, \tag{4.37}$$

und diese mit den Kennwerten einer Verteilung in Verbindung zu bringen. Für die Weibull-Verteilung kann z.B. gezeigt werden, siehe [1] S. 240, dass

$$E(t) = (T - t_0) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) + t_0, \tag{4.38}$$

$$\text{Var}(t) = (T - t_0)^2 \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right) \right], \tag{4.39}$$

$$S_3(t) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{b}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) + 2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{b}\right)}, \tag{4.40}$$

wobei mit $\Gamma(\cdot)$ die Gamma-Funktion bezeichnet wurde. Aus dieser Beziehung können die Parameter T , b und t_0 abgeleitet werden: Zunächst b aus der dritten Gleichung, anschließend T und t_0 aus der ersten und zweiten.

HINWEIS:

Mit Hilfe der Momentenmethode können nur vollständige Stichproben bewertet werden.

4.3.3.2. Regressionsverfahren

Die lineare Regressionsanalyse ist ein Verfahren, mit dem Ausgleichsgeraden für eine mutmaßliche lineare Beziehung zwischen zwei Größen x und y berechnet werden können, wenn experimentelle Daten in Form von Wertepaaren (x_i, y_i) vorliegen. Nehmen wir beispielhaft an, dass n solche Paare vorliegen:

$$(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.41}$$

Für die Abhängigkeit $y = f(x)$ vermuten wir einen linearen Zusammenhang, von dem die streuende Größe y nur geringfügig und zufällig um einen Betrag ε abweicht:

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + \varepsilon_i. \tag{4.42}$$

Bei der Regression geht es nun darum, die Koeffizienten a_0 und a_1 so zu berechnen, dass eine möglichst gute Prognose von y möglich wird. Mit

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 \cdot x_i \tag{4.43}$$

wird dabei der von der Ausgleichsgerade „prognostizierte“ Wert von y an der Stelle x_i bezeichnet. Die „Güte“ der Prognose wird beim üblichen Verfahren der Kleinsten Quadrate sichergestellt, indem die Summe der quadratischen Abweichungen zwischen Versuchswert und Prognose an allen n Stellen x_i minimiert wird:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 \cdot x_i))^2 \rightarrow \min. \tag{4.44}$$

Die notwendige Bedingung für die Minimierung obiger Funktion ist, dass die ersten partiellen Ableitungen bezüglich a_0 und a_1 verschwinden. Mit den Bezeichnungen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \tag{4.45}$$

können daraus die Koeffizienten wie folgt berechnet werden (vgl. auch [1], S.243):



$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad a_0 = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{x}. \quad (4.46)$$

Unter der Voraussetzung, dass

- für jede Einstellung von x , die Größe y normalverteilt ist,
- ein linearer Zusammenhang zwischen x und dem Erwartungswert von y besteht, $E(y) = a_0 + a_1 \cdot x$,
- die Abweichungen zwischen dieser linearen Abhängigkeit nur zufälliger Natur sind, und
- die Standardabweichung welche diese zufällige Streuung charakterisiert konstant über dem untersuchten x -Bereich ist,

kann gezeigt werden, dass die mittels einer linearen Regression berechneten Schätzwerte für die Koeffizienten der Gerade erwartungstreu sind, d.h. deren Mittelwerte über viele Versuche stimmen mit den tatsächlichen Werten überein.

Dieses Verfahren kann dazu verwendet werden, um die Parameter einer Verteilung aus den berechneten Koeffizienten der Ausgleichsgeraden abzuleiten. Dafür muss eine geeignete Transformation durchgeführt werden, welche die Verteilungsfunktion in eine Gerade transformieren kann. Für die zwei-parametrische Weibull-Verteilung ergibt sich z.B. folgende Beziehungen: Durch zweifaches Logarithmieren der Verteilungsfunktion

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{T}\right)^b\right), \quad (4.47)$$

ergibt sich der Ausdruck

$$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right) = b \cdot \ln(t) - b \cdot \ln(T). \quad (4.48)$$

Dies ist eine Geradengleichung der Form $y = a_1 \cdot x + a_0$. Die Parameter der Ausgleichsgeraden ergeben sich aus obiger Gleichung mit

$$y_i = \ln(-\ln(1-F_i)), \quad x_i = \ln(t_i). \quad (4.49)$$

Die Parameter der Verteilung können direkt aus den Parametern der Ausgleichsgeraden abgeleitet werden:

$$b = a_1, \quad T = \exp\left(-\frac{a_0}{a_1}\right). \quad (4.50)$$

HINWEIS:

Mit der Regressionsanalyse können auch unvollständige Stichproben ausgewertet werden. Die für die Auswertung erforderliche Ausfallwahrscheinlichkeit F_i wird mit denselben Ansätzen geschätzt, die bei der grafischen Auswertung vorgestellt wurden, siehe Kapitel 4.3.2.

In machen Softwaretools wird x als abhängige Variable betrachtet, nach der regressiert wird.

4.3.3.3. Maximum-Likelihood Verfahren

Mit dem Maximum-Likelihood Verfahren (MLE, engl. für maximale Wahrscheinlichkeit) können sehr effektiv Parameter einer Verteilung aus den Daten einer Stichprobe geschätzt werden, ohne vorher die a-priori Ausfallwahrscheinlichkeiten schätzen zu müssen, wie bei dem Regressionsverfahren. Das Verfahren wird nachfolgend kurz erläutert, weitere Details sind in [1], S.246ff zu finden.



Angenommen, es liegen n Ausfallzeiten t_i vor, $i = 1, \dots, n$. Die unbekannte Ausfall-Dichtefunktion der Grundgesamtheit, aus der die Beobachtungen stammen, enthält k unbekannte Parameter ψ_j , $j = 1, \dots, k$, (z.B. Parameter b und T der Weibull-Verteilung) und wird mit $f(t, \psi_1, \dots, \psi_k)$ bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass der i -te Ausfall im Bereich $(t_i, t_i+dt]$ stattfindet, also genau dort, wo er beobachtet wurde, ist per Definition $f(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k)dt$. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Ausfälle gleichzeitig dort stattfinden, wo sie beobachtet wurden (logische „und“ - Verknüpfung) ist demnach ein Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Einzel-Ausfälle:

$$P(t_1, \dots, t_n, \psi_1, \dots, \psi_k) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k) dt . \quad (4.51)$$

Diese Wahrscheinlichkeit hängt bei vorgegebenen Ausfallzeiten t_i offensichtlich von der Wahl der Verteilungsparameter ψ_j , ab. Die Idee des Maximum-Likelihood Verfahrens ist nun, die Verteilungsparameter so zu wählen, dass diese Wahrscheinlichkeit maximiert wird. Dazu wird zunächst die sogenannte Likelihood-Funktion

$$L(t_1, \dots, t_n, \psi_1, \dots, \psi_k) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k) \quad (4.52)$$

eingeführt. Da es sich bei dt um eine Konstante handelt, welche nicht von den variablen Parametern abhängt, wird die Wahrscheinlichkeit dort maximal sein, wo auch das Maximum der Likelihood-Funktion liegt. In einem zweiten Schritt wird obige Funktion logarithmiert, was das weitere Vorgehen deutlich vereinfacht. Auch hier gilt: da der Logarithmus eine monotone Funktion ist, wird das Maximum von $\ln(L)$ dort sein, wo auch das Maximum der Funktion L ist. Das Ergebnis lautet:

$$\Lambda(t_1, \dots, t_n, \psi_1, \dots, \psi_k) = \ln[L(t_1, \dots, t_n, \psi_1, \dots, \psi_k)] = \sum_{i=1}^n \ln[f(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k)] . \quad (4.53)$$

$\Lambda(t_1, \dots, t_n, \psi_1, \dots, \psi_k)$ stellt die logarithmische Likelihood-Funktion dar. Deren Maximum (bezüglich den Parametern ψ_j) liegt dort, wo alle partiellen Ableitungen verschwinden:

$$\frac{\partial \Lambda(t_1, \dots, t_n, \psi_1, \dots, \psi_k)}{\partial \psi_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k)} \frac{\partial f(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k)}{\partial \psi_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k . \quad (4.54)$$

Die in (4.54) aufgeführten k Gleichungen, können nun zur Bestimmung der k unbekannt Parameter der Verteilung benutzt werden. Allgemein können diese Gleichungen allerdings nichtlinear in den Parametern sein, so dass in der Regel eine Software mit geeigneten numerischen Optimierungs-Verfahren für deren Lösung erforderlich ist.

Das vorgehen kann ohne weiteres auch auf zensorisierten Daten erweitert werden. Dazu wird die Definition der Likelihood-Funktion in Gl. (4.52) folgendermaßen erweitert, [14], S.309:

$$L(t_1, \dots, t_n, \psi_1, \dots, \psi_k) = \prod_{i=1}^n L_i(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k) , \quad (4.55)$$

wobei mit $L_i(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k)$ folgende Terme bezeichnet werden:

$$f(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k) , \text{ falls } t_i \text{ einen Ausfall,} \quad (4.56)$$

$$F(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k) , \text{ falls } t_i \text{ eine links-zensorisierte Beobachtung,} \quad (4.57)$$

$$R(t_i, \psi_1, \dots, \psi_k) , \text{ falls } t_i \text{ eine rechts-zensorisierte Beobachtung,} \quad (4.58)$$

$$F(t_i^R, \psi_1, \dots, \psi_k) - F(t_i^L, \psi_1, \dots, \psi_k) , \text{ falls } t_i \text{ eine Intervall-zensorisierte Beobachtung} \quad (4.59)$$

darstellt. Diese Definitionen spiegeln direkt die oben beschriebenen Eigenschaften der Likelihood-Funktion wieder. Die Vorgehensweise für bestimmte Zensorisierungstypen und konkrete



Verteilungsfunktionen wie Normal-, Exponential- und Weibull-Verteilung werden hier nicht weiter diskutiert, weitere Details finden sich in [14], S.309ff.

HINWEISE:

MLE braucht im Unterschied zur Regressionsmethode keine Ausfallwahrscheinlichkeit und ist deswegen unabhängig von der Rangverteilung. Zensurierte Daten werden mit ihren exakten Beobachtungszeitpunkten berücksichtigt, und nicht nur mit deren Anzahl, wie bei der Rangregressionsmethode.

MLE kann, insbesondere bei kleineren Stichproben, zu einer systematischen Abweichung der Schätzung von dem wahren Wert (sogenannten Bias) führen.

Aus den obigen Anmerkungen ergibt sich eine Einsatzempfehlung bei größeren Stichproben mit mehr als 30 Ausfällen und stark zensurierten Daten (viele eventuell ungleichmäßig verteilte Durchläufer). Bei kleinen Stichproben oder vollständige Daten sind die Rang-Regressionsmethoden vorzuziehen.

4.3.4. Berücksichtigung endlicher Stichprobenumfänge, Vertrauensbereiche

Wird aus einer Stichprobe ein Parameter der Verteilung einer Grundgesamtheit geschätzt, so ist dies stets mit Unsicherheiten verbunden. Wird beispielsweise ein Mittelwert einer Stichprobe als Schätzung für den Erwartungswert der Grundgesamtheit verwendet, so werden, bei mehrfacher Entnahme der Stichprobe, die Einzelwerte und der aus ihnen berechnete Mittelwert ebenfalls schwanken. Diese Schwankung wird umso höher ausfallen

- je höher die Varianz der Grundgesamtheit ist und
- je kleiner die Stichprobengröße ist.

Zur Berücksichtigung der Unsicherheit bei der Schätzung des Parameters aufgrund der (subjektiv gewählten) Stichprobengröße wird das Konzept des Vertrauensbereichs verwendet.

Unter dem Begriff Vertrauensbereich versteht man ein aus Stichprobenwerten berechnetes Intervall, das den wahren aber unbekanntem Parameter der Verteilung einer Grundgesamtheit mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit genannt Vertrauensniveau P überdeckt. Als Vertrauensniveau wird z.B. $P = 90\%$ gewählt. Diese Wahrscheinlichkeit besagt, dass bei häufiger Entnahme einer Stichprobe, die daraus berechneten Vertrauensbereiche in 90% der Fälle den wahren Parameter überdecken, und ihn in nur in 10% der Fälle nicht erfassen. Die 10% werden als Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art $\alpha = 10\%$ bezeichnet, so dass $P = 1 - \alpha$. Details zu verschiedenen Ansätzen zur Berechnung von Vertrauensgrenzen finden sich im Anhang.

ANMERKUNG:

Häufig wird P als Wahrscheinlichkeit interpretiert, mit der der wahre Parameter der Grundgesamtheit in dem berechneten Vertrauensbereich liegt. Dies ist deswegen nicht korrekt, da der wahre Wert zwar unbekannt aber keine Zufallsgröße, sondern eine Konstante ist. Mit Schwankungen verbunden sind hingegen die Stichproben-Werte und die daraus berechneten Vertrauensbereiche.

Es werden einseitige oder zweiseitige Vertrauensbereiche unterschieden, je nachdem, ob eine untere/obere Grenze oder eine Intervallschätzung für den Parameter der Verteilung gebraucht wird, Bild 36. Für Zuverlässigkeitsbewertungen werden meistens einseitige Intervalle verwendet, da nur eine einseitige Grenze für die Parameter (z.B. *minimale* mittlere Lebensdauer) gebraucht wird.

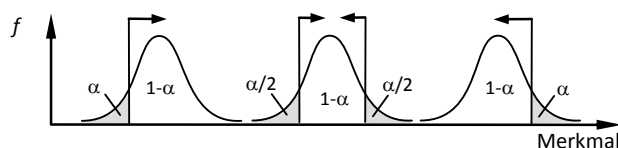


Bild 36: Einseitige (links und rechts) und zweiseitige Vertrauensintervalle (Mitte). Der wahre Parameter der Grundgesamtheit wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $P = 1 - \alpha$ von dem mit einem Pfeil gekennzeichneten Bereich überdeckt.



Vertrauensbereiche können für jeden geschätzten Parameter angegeben werden. In einer Wahrscheinlichkeitspapier-Darstellung von Ausfalldaten, ist der Vertrauensbereich der Ausfallwahrscheinlichkeitsfunktion ein durch gekrümmte Linien (Vertrauensgrenzen) oberhalb und unterhalb der berechneten Ausgleichsgerade begrenzter zweidimensionaler Bereich, Bild 37, rechts. Alle in diesem Bereich denkbaren Geraden entsprechen möglichen, jedoch unterschiedlich wahrscheinlichen Verteilungen der Grundgesamtheit, die zu den beobachteten Ausfällen in der Stichprobe geführt haben könnten. Die Vertrauensgrenzen liegen umso enger beieinander, je höher der Stichprobenumfang (bei gleichem Vertrauensniveau) und je niedriger das Vertrauensniveau (bei gleichem Stichprobenumfang) ist.

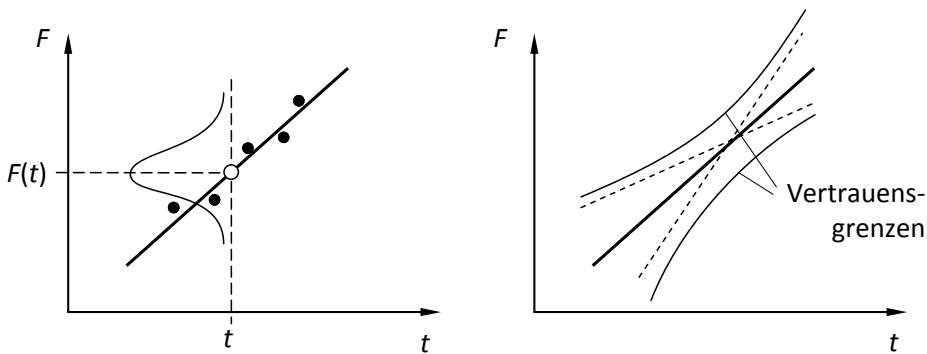


Bild 37: Vertrauensbereich (zweiseitig) im Wahrscheinlichkeitspapier.

Ein Vertrauensniveau wird in einer Auswertung von Lebensdauerdaten typischerweise dadurch berücksichtigt, dass das Quantil der Lebensdauer t_q nicht am Median (50%-Wert), sondern an der Grenze eines bestimmten Vertrauensbereiches abgelesen wird, Bild 38.

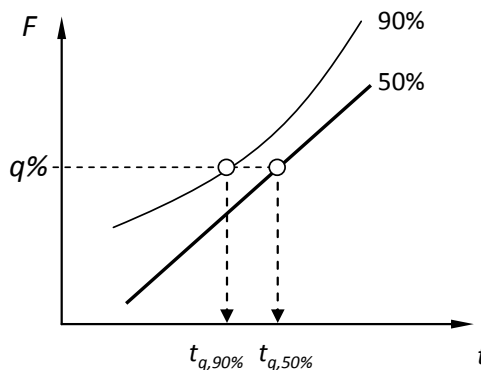


Bild 38: Lebensdauer-Quantil t_q mit Vertrauensniveau 50% bzw. 90% (einseitig)

Falls die Unsicherheit eines begrenzten Stichprobenumfangs nicht berücksichtigt wird, sind weitreichende Folgen zu befürchten, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL:

Ein Hersteller muss zwischen zwei Zulieferern entscheiden, die folgende Angaben für die Zuverlässigkeit des zu liefernden Teils für eine Nutzungsdauer von 3 Jahren gemacht haben:

Zulieferer A	Zulieferer B
$R = 99,4\%$	$R = 99,9\%$

Der Hersteller entscheidet sich für den Zulieferer B, da sein Produkt eine höhere Zuverlässigkeit aufweist. Es kommt allerdings vermehrt zu Ausfällen beim Zulieferteil. Was ist passiert?

Eine Analyse hat ergeben, dass sich obige Angaben auf den Median (Vertrauensniveau 50%) beziehen, da vom Hersteller nichts anderes verlangt wurde. Zulieferer B hat allerdings seine Angaben nur aufgrund der Erprobung mit 5 Teilen gemacht, welche zufällig eine relativ hohe Zuverlässigkeit hatten. Zulieferer A hatte



hingegen 25 Teile erprobt. Hätte der Hersteller Zuverlässigkeitsangaben für ein höheres Vertrauensniveau, z.B. $P=95\%$ (einseitig) verlangt, wäre die Wahl anders ausgefallen:

Zulieferer A	Zulieferer B
$R_{95\%} = 97,1\%$	$R_{95\%} = 69,9\%$

4.4. Besondere Versuche

In diesem Abschnitt werden einige besondere Versuchstechniken vorgestellt. Weitere Details finden sich z.B. in [15], Kapitel 11.

4.4.1. Lebensdauerversuch

Im Gegensatz zum einstufigen Wöhlerversuch, bei dem die Belastung auf einem einzigen Niveau konstant gehalten wird, ist es oft erforderlich auch Versuche mit variablen Lasten durchzuführen, da konstante Belastungen in der Realität selten auftreten. Diese Versuche werden Lebensdauer- oder Gassner-Versuche genannt.

Variable Lasten werden typischerweise als Lastkollektive dargestellt. Ein Lastkollektiv wird gebildet, indem der zeitliche Verlauf der Last zunächst in eine Abfolge von schädigungsrelevanten Einzelereignissen (z.B. Lastamplituden beim Schädigungsmechanismus Ermüdung) zerlegt wird und diese anschließend klassiert werden. Diese Einzelereignisse werden in jeder Klasse durch den Lastparameter P_i beschrieben, welcher eine konstante Höhe innerhalb einer Klasse besitzt. Die Klassen werden als Teilkollektive bezeichnet. Sie werden zur Darstellung des Gesamtkollektivs blockweise von den mehr- zu den weniger-schädigenden Teilen angeordnet. Der Kollektivumfang h_0 stellt die Summe aller Teilhäufigkeiten h_i der einzelnen Kollektivstufen dar. Es ergibt sich typischerweise der in Bild 39 dargestellte Kurvenverlauf. Lastkollektive sind hauptsächlich deswegen von Vorteil, weil sie eine viel kompaktere Darstellung als die ursprüngliche Last-Zeitfolge erlauben. Weitere Details zu unterschiedlichen Klassierungsarten finden sich in [5], Kapitel 2.

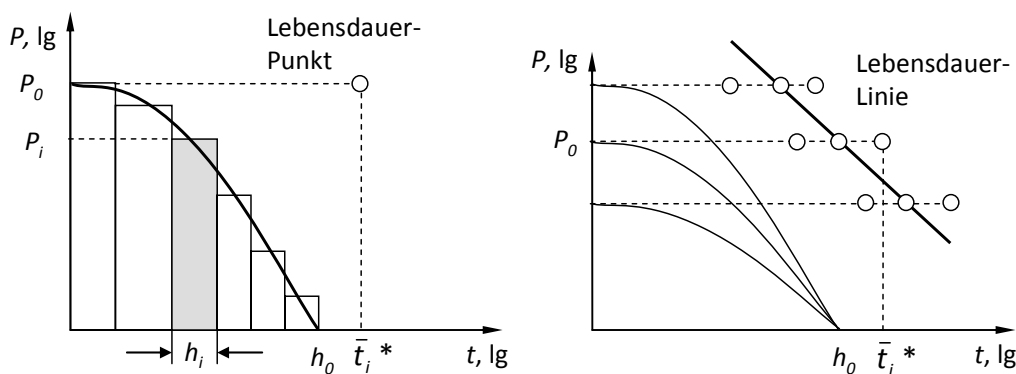


Bild 39: Lastkollektiv und Lebensdauerpunkt (links). Lebensdauerlinie (rechts).

Der Lebensdauerversuch wird durchgeführt, indem die variable Last bis zum Ausfall wiederholt aufgebracht wird. Die zeitliche Aufbringung der Belastung muss allerdings nicht der erwähnten geordneten Blockfolge entsprechen. Die Belastung wird vielmehr durch eine zufällige Abfolge von Lasten unterschiedlicher Höhen aufgebracht, deren Auftretenshäufigkeit der entsprechenden Teilhäufigkeit im Lastkollektiv entspricht. Grund dafür ist die Tatsache, dass eine Aufbringung der Lasten in Blöcken zu Effekten führt, die in der Realität nicht vorkommen.

Ein Lebensdauerpunkt (\bar{t}_i^*, P_0) stellt die Lebensdauer \bar{t}_i^* für eine bestimmte (jedoch zeitlich variable) Belastung dar, wobei die Darstellung auf dem Niveau der höchsten Kollektivstufe P_0 erfolgt, Bild 39 links. Zur Visualisierung der Belastung wird typischerweise zusätzlich das zugehörige Lastkollektiv angegeben.



Zur Erfassung der Streuung der Lebensdauer wird ein Lebensdauer-versuch bei gleicher Belastung und (nominell) gleichen Prüflingen mehrmals wiederholt. Die Auswertung der Lebensdauerdaten erfolgt anhand der gleichen Verfahren, welche in Kapitel 4.3 aufgeführt wurden. Um die Lebensdauer auf einem anderen Lastniveau zu erhalten, werden alle Teilstufen des Lastkollektivs proportional so verändert, dass die höchste Stufe das gewünschte Niveau erreicht. Es ergibt sich analog zur Wöhlerlinie die Lebensdauerlinie (Gassner-Linie), Bild 39 rechts. Diese hat in der doppel-logarithmischen Darstellung oft die Form einer Geraden.

4.4.2. Sudden-Death-Test

Der Sudden-Death-Test (Prüfung bis zum ersten Bruch) ist eine prüfzeitverkürzende Methode zur Untersuchung des Ausfallverhaltens von Teilen im Rahmen von Prüfstandsversuchen.

Die zur Verfügung stehende Gesamtmenge von Prüfobjekten wird in m gleich große Gruppen (Prüflose) zu je k Prüflingen unterteilt. k entspricht der Anzahl der zur Verfügung stehenden Prüfstände, oder der Anzahl der Prüflinge, welche gleichzeitig auf einem Prüfstand erprobt werden können. Die erste Gruppe (Prüflos) wird im Dauerlaufversuch so lange belastet, bis der erste Prüfling dieser Gruppe ausfällt. Die Laufzeit bis zum 1. Ausfall wird festgehalten.

Anschließend wird in gleicher Weise die zweite Gruppe bis zum ersten Ausfall belastet. Der Vorgang wird für alle m Gruppen wiederholt. Auf diese Weise erhält man m Werte erster Ausfälle.

Da jeweils innerhalb eines Prüfloses nach dem 1. Ausfall (1. Bruch) abgebrochen wird, liegt bei dieser Methode ein Spezialfall der Typ-II-Zensorisierung mit $r = 1$ vor.

4.4.2.1. Vereinfachte grafische Auswertung

In [1], S. 221 wird eine vereinfachte grafische Auswertung vorgeschlagen, welche nachfolgend aufgeführt wird.

Die Lebensdauerwerte werden, wie bei der klassischen grafischen Weibull-Auswertung, in aufsteigender Reihenfolge geordnet und ins Weibull-Wahrscheinlichkeitspapier eingetragen. Jedem dieser ersten Ausfälle wird dabei der Median der Ranggrößen anhand der Näherungsbeziehung

$$F(t_i) = \frac{i - 0,3}{m + 0,4} \tag{4.60}$$

zugeordnet. Alternativ kann die exakte Formulierung aus Kap. 6.1.3.5 im Anhang verwendet werden. Im Wahrscheinlichkeitspapier ergibt sich dabei die Gerade der ersten Ausfälle.

Man kann nun zeigen, dass der Formparameter einer Weibull-Verteilung sowohl bei einer Teilmenge einer Stichprobe, als auch bei der gesamten Stichprobe gleich ist. Dies bedeutet, dass der Formparameter der ersten Ausfälle dem Formparameter der Gesamtverteilung entspricht, somit kann aus der Geraden der 1. Ausfälle direkt der gesuchte Formparameter b bestimmt werden.

Zur genauen Darstellung des Ausfallverhaltens und Bestimmung des Lageparameters muss die gerade jedoch korrigiert (nach rechts verschoben) werden. Die Korrektur ergibt sich aus der Tatsache, dass dem ersten Ausfall eines Prüfloses eine Ausfallwahrscheinlichkeit

$$F_1^* = \frac{0,7}{k + 0,4} \tag{4.61}$$

zugeordnet werden kann und dass als einen repräsentativen Wert für diesen Ausfall der Median (50%-Wert) der ermittelten ersten Ausfälle genommen wird. Durch den Schnittpunkt der 50%-Wahrscheinlichkeitslinie mit der Geraden der 1. Ausfälle wird daher eine senkrechte Linie gezeichnet, deren Schnittpunkt mit der F_1^* -Linie einen Punkt der Geraden der Gesamtverteilung ergibt. Die Gerade der 1. Ausfälle muss durch diesen Punkt parallelverschoben werden, Bild 40. Die Kennzahlen der Verteilung können nun wie gewohnt an der verschobenen Gerade abgelesen werden.



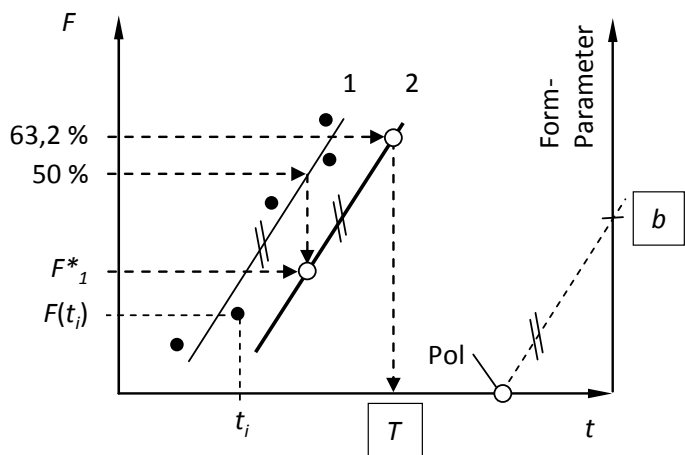


Bild 40: Vereinfachte grafische Auswertung eines Sudden-Death-Tests (schematisch). Linie 1 – Gerade der 1. Ausfälle, Linie 2 – Gerade der gesamten Stichprobe

4.4.2.2. Auswertung nach Nelson

Nachstehend wird die Auswertung von Sudden-Death-Daten nach Nelson gezeigt (Beispiel aus [8]).

BEISPIEL:

In einem Laborversuch wurden n = 54 Teile nach dem Sudden-Death-Verfahren untersucht. Da 6 Prüfstandsplätze zur Verfügung standen, wurden m = 9 Prüflöse zu je 6 Teilen (k = 6) parallel getestet. Jeweils nach dem 1. Ausfall wurde das gesamte Prüflös durch die nächsten 6 Teile ersetzt. In nachstehender Tabelle sind die Lebensdauern der neun ersten ausgefallenen Teile in aufsteigender Reihenfolge aufgelistet (Spalte b). In Spalte c steht A für Ausfall und H für Herausnahme.

Die Auswertung erfolgt entsprechend zu den in Kapitel 4.3.2.2 angegebenen Schritten.

a	b	c	d	e	f	g	h
j	$t_j, [h]$	A/H	r_i	$\hat{\lambda}_j = \frac{1}{r_j}$	$\hat{H}_j = \sum_r \frac{1}{r_j}$	$\hat{R}_j = \exp(-\hat{H}_j)$	$\hat{F}_j = 1 - \hat{R}_j$
1	10	1 A 5 H	54	0,0185	0,0185	0,9816	1,8%
7	14	1 A 5 H	48	0,0208	0,0393	0,9615	3,9%
13	16	1 A 5 H	42	0,0238	0,0631	0,9388	6,1%
19	18	1 A 5 H	36	0,0278	0,0909	0,9131	8,7%
25	20	1 A 5 H	30	0,0333	0,1242	0,8832	11,7%
31	23	1 A 5 H	24	0,0417	0,1659	0,8471	15,3%
37	25	1 A 5 H	18	0,0556	0,2215	0,8013	19,9%
43	28	1 A 5 H	12	0,0833	0,3048	0,7373	26,3%
49	32	1 A 5 H	6	0,1667	0,4715	0,6241	37,6%

Tabelle 5: Auswerteschema zu einem Sudden-Death-Test (Beispiel aus [8])

2020-04-06 - SOCOS



4.4.3. Stark beschleunigte Prüfverfahren

Die nachfolgend aufgeführten Verfahren sind Elemente, welche das Portfolio der Erprobung bzw. Zuverlässigkeitsprüfung ergänzen. Sie eignen sich nicht zur System- oder Komponentenabsicherung, bei der immer die reale Betriebsbelastung berücksichtigt werden muss und können somit die quantitative Zuverlässigkeitsbewertung nicht ersetzen.

4.4.3.1. Laststeigerungsverfahren (Step-Stress)

Bei der Step-Stress-Methode wird die auf den Prüfling einwirkende Belastung nach festgelegten Zeitintervallen erhöht. Man erhofft sich von dieser Vorgehensweise eine Verkürzung der Ausfallzeiten (Prüfzeitverkürzung) unter der Annahme, dass durch die Laststeigerung keine Änderung des Ausfallmechanismus' verursacht wird.

Da bei fester Ausfallsteilheit b jede Laststufe einer Geraden im Weibull-Netz entspricht, müsste anhand der bei höheren Laststufen beobachteten Ausfälle auf die zur „Grundlast“ gehörenden Ausfallgeraden zurückgerechnet werden. Es ergibt sich ein rekursives Verfahren, das jedoch nur funktionieren kann, wenn eine Beziehung zwischen der Laststufe und der charakteristischen Lebensdauer T bekannt ist oder als bekannt angenommen wird.

Aufgrund der notwendigen Annahmen erscheint dieses Verfahren in der beschriebenen Form zumindest problematisch. Das Prinzip ist in Bild 41 dargestellt.

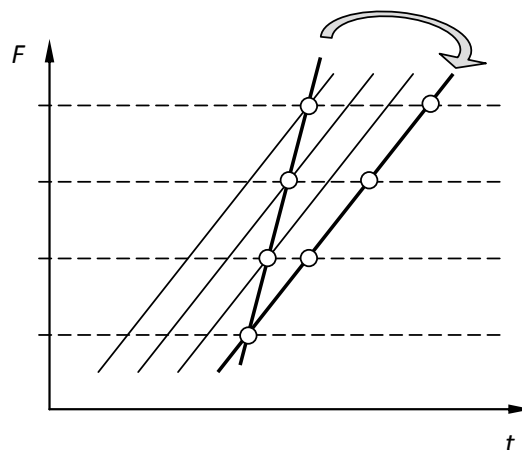


Bild 41: Step-Stress-Methode im Weibull-Wahrscheinlichkeitspapier (schematisch)

4.4.3.2. Highly Accelerated Life Testing (HALT)

HALT steht für Highly Accelerated Life Testing, ein seit 1993 in Literatur diskutiertes Verfahren für beschleunigte Prüfung. Die Methode wird bevorzugt bei elektrischen und elektronischen Komponenten, weniger bei mechanischen Komponenten verwendet [1], S. 284f.

Die Grundidee dieses Testverfahrens ist es, ähnlich wie bei der Step-Stress-Methode, ausgehend von der Nennlast des Erzeugnisses durch schrittweise Laststeigerungen einer einzigen Lastgröße bis zum Ausfall die relevanten Ausfallmechanismen in kürzester Zeit zu ermitteln. Die Stufendauer ist dabei konstant.

Da HALT mit Lasten deutlich über dem relevanten Belastungsniveau im Betrieb arbeitet, handelt es sich allerdings um eine qualitative Methode zur Ermittlung der Einsatzgrenzen; die Ermittlung statistisch relevanter Zuverlässigkeitswerte ist hier nicht möglich. Dies ist auch der Hauptunterschied zur verwandten Step-Stress-Methode. Falls Ausfälle auftreten, ist zunächst sehr kritisch zu prüfen, ob diese auch unter den vorgesehenen „normalen“ Betriebsbedingungen auftreten können.



Der HALT-Prozess beginnt mit der Analyse möglicher Belastungen, z.B. elektrisch, mechanisch, thermisch usw. Diese müssen für jedes Produkt individuell ermittelt und festgelegt werden. Im Folgenden werden iterativ folgende Schritte durchlaufen:

- Test mit schrittweise Laststeigerung,
- Analyse der Testergebnisse, Ermittlung der Root-Causes,
- Optimierung (der Konstruktion, des Materials, der Zulieferer etc.).

Im Rahmen der Versuche werden die Funktionsgrenzen und Zerstörungsgrenzen ermittelt, deshalb ist es wichtig, dass die Prüflinge während der Tests im Betrieb sind und überwacht werden. Bei der Überschreitung der Funktionsgrenzen geht das Prüfobjekt dabei reversibel im Fehlerzustand über, außerhalb der Zerstörungsgrenzen wird es irreversibel (dauerhaft) zerstört.

Die Durchführung von HALT dient:

- der Schwachstellenerkennung in einer frühen Musterphase,
- der Ermittlung der Auslegungsgrenzen des Designs,
- der Ermittlung der Belastungsgrenze, bei der ein Wechsel im Schadensmechanismus einzelner Maschinenelemente erfolgt (diese Grenze ist bei der Definition von QALT und HASS zu berücksichtigen),
- der Ermittlung der Robustheit im Vergleich mit anderen Erzeugnissen (so können die Auswirkungen von Modifikationen effektiv eingeschätzt werden),
- der Erkennung von Misuse im späteren Feld anhand der Schadensbilder im Sinne eines Erkenntnisdauerlaufs.

Eine quantitative Zuverlässigkeitsprognose ist anhand der Daten dieser Versuche allerdings nicht möglich.

4.4.3.3. Quantitative Accelerated Life Testing (QALT)

Ein QALT ist ein Test, der die Dauerhaltbarkeit eines Designelements bezüglich eines einzelnen Fehlermodus nachweist. Es handelt sich hierbei um Tests mit Omission und/oder einer erhöhten Belastung um einen bekannten Ausfallmodus so schnell wie möglich zu erreichen. Die Gesamtbeanspruchung des Designelements bei diesem Fehlermodus wird aus dem Belastungskollektiv des Produktes bestimmt. Diese Gesamtbeanspruchung wird gleichförmig auf das Maschinenelement aufgebracht, wobei auch Belastungen außerhalb der Spezifikation angewendet werden können.

Abhängig von Verständnis und Art des Fehlermodus können verschiedene Methoden zur zeitlichen Raffung genutzt werden:

- Entfall von ungenutzten Zeiten,
- Entfall von nicht schädigenden Zeitanteilen,
- Umrechnung eines niedrigen Beanspruchungsniveaus auf ein höheres mittels eines geeigneten Beschleunigungsfaktors, um schneller Ausfälle zu erreichen.

Die Durchführung von QALTs dient:

- der Zeitraffung in der Erprobung eines spezifischen Designelements,
- als eine Möglichkeit zur Ermittlung von Raffungsfaktoren im Vergleich mit Langzeit-Dauerläufen, Fahrzeugerprobung oder dem Feld,



- bei Kenntnis des Raffungsfaktors der Absicherung / Nachweis der Langzeitstabilität eines Designelements.

4.4.3.4. Stress Screening und Highly Accelerated Stress Screening (HASS)

Die typische Stress-Screening-Definition für elektronische Bauelemente sieht eine 100%-Prüfung unter verschärften Testbedingungen vor, mit anschließender Auslieferung der den Test bestandenen Erzeugnissen an den Kunden. Die Idee dabei ist, fehlerhafte Teile, welche unter den Frühausfällen im ersten Teil der Badewannenkurve leiden, zu entfernen. Sinnvoll ist dieses Vorgehen nur dann, wenn die ausgelieferten Teile durch den Test nicht nennenswert geschädigt werden.

Bei hydraulisch-mechanischen Tests kommt es typischerweise zu einer Schädigung des Testobjekts durch den Test. Daher wird die typische Stress-Screening-Definition für elektronische Bauelemente wie folgt auf die Prüfung von hydraulischen und mechanischen Erzeugnissen übertragen:

- HASS ist eine Komponente der Zuverlässigkeits-Prüfung.
- Ein HASS-Test ist ein QALT, bei dem der bekannte Zielwert so festgelegt wurde, dass ein Erreichen des Zielwerts eine eindeutige Qualitätsaussage zum betrachteten Designelement ermöglicht.
- Ein nicht erreichter Zielwert im HASS hat in der Regel sperrende Wirkung.

Die Durchführung von HASS-Tests dient:

- dem schnellen Vergleich eines spezifischen Maschinenelements in Erzeugnissen aus der laufenden Fertigung mit dem freigegebenen Musterstand,
- als eine notwendige Voraussetzung zur Freigabe von Prozessänderungen in der Serie an einem spezifischen Designelement.

4.4.4. Degradation Test

Es kann vorkommen, dass innerhalb der zur Verfügung stehenden Versuchszeit keine Ausfälle erzeugt und damit auch keine Zuverlässigkeitsaussagen gemacht werden können. Für manche Schädigungsmechanismen kann jedoch eine zeitlich ansteigende Größe, genannt Schädigungsparameter, ermittelt und gemessen werden, welche den Grad der Schädigung charakterisiert. Beispielsweise kann der Verschleiß eines Bauteils anhand der Materialabtragung, oder der Grad der Zerrüttung einer Lötverbindung anhand des elektrischen Widerstands ermittelt werden.

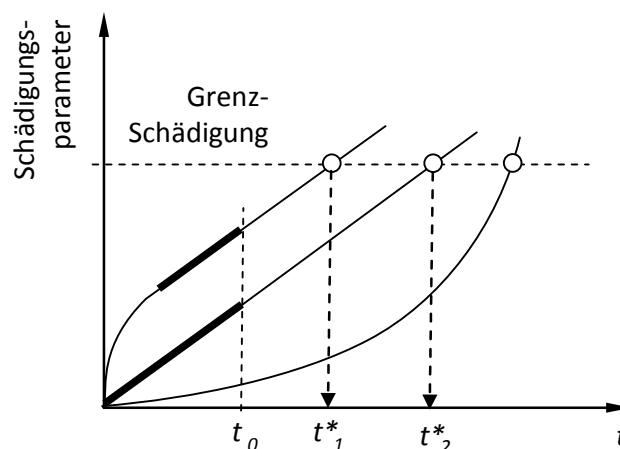


Bild 42: Mögliche Schädigungsverläufe in einem Degradation-Test (schematisch).



Es bietet sich nun an, anhand des während des Versuchs ermittelten Schädigungsverlaufs eine Extrapolation hin zu Werten vorzunehmen, bei denen von einem Versagen des Prüfobjektes ausgegangen werden kann. Dies ist allerdings nur dann möglich, wenn der Verlaufstyp (linear, exponentiell etc.) entweder aus physikalischen Zusammenhängen oder aus früheren Untersuchungen bekannt ist, ansonsten ist eine Extrapolation unzulässig.

Es sind verschiedene Verläufe möglich, die berücksichtigt werden müssen, Bild 42. t_0 bezeichnet die angestrebte bzw. maximal mögliche Versuchsdauer, die fette Linie markiert den sinnvollen Bereich, in dem der Schädigungsparameter aufgenommen und auf die Lebensdauer t^* extrapoliert werden kann. Eine sinnvolle Extrapolation ist oft nur in dem linearen Teil des Verlaufs möglich.

Vorgehen:

1. Den funktionellen Zusammenhang zwischen Schädigungsparameter Y und Lebensdauermerkmal t anhand physikalischer Zusammenhänge oder mehrerer Untersuchungen bis zum Ausfall ermitteln. Dieser Zusammenhang hängt auch von k freien Parametern a_i ab, welche später experimentell anzupassen sind:

$$Y = f(t, a_1, \dots, a_k) . \tag{4.62}$$

2. Grenzschädigung Y^* festlegen, ab welcher mit einem Ausfall zu rechnen ist. Versuchsdauer t_0 , Messzeitpunkte $t_j < t_0, j = 1, \dots, n$ und Anzahl der zu testenden Prüflinge m festlegen.
3. Für den i -ten Prüfling, $i = 1, \dots, m$ die Erprobung durchführen und den Schädigungsparameter Y zu den Zeitpunkten $t_j, j = 1, \dots, n$ messen.
4. Aus den Versuchsdaten des i -ten Prüflings $(t_j, Y_j^i), j = 1, \dots, n$ die k freien Parameter in Gl. (4.62) anhand einer Regression bestimmen. Für den i -ten Prüfling gilt nun:

$$Y^i = f(t, \hat{a}_1^i, \dots, \hat{a}_k^i) . \tag{4.63}$$

5. Die Lebensdauer t^i (Zeitpunkt, zu dem die Grenzschädigung Y^* erreicht wird) des i -ten Prüflings ermitteln:

$$t^i = f^{-1}(Y^*, \hat{a}_1^i, \dots, \hat{a}_k^i) . \tag{4.64}$$

Dazu muss die Umkehrfunktion $t = f^{-1}(Y, a_1, \dots, a_k)$ bestimmt werden.

6. Schritte 3 bis 5 für alle Prüflinge wiederholen.
7. Die Lebensdauern $t^i, i = 1, \dots, m$ wie in Kapitel 4.3 beschrieben auswerten.

Das Vorgehen wird in dem folgenden Beispiel verdeutlicht.

BEISPIEL:

Ein Reifenhersteller weiß aus Erfahrung, dass der Abtrag Y seiner Produkte linear von der zurückgelegten Strecke abhängt:

$$Y = a_1 \cdot t . \tag{4.65}$$

Reifen werden bei diesem Hersteller deshalb aus Zeitgründen nicht bis zur vollständigen Abnutzung erprobt, sondern lediglich bis zu einer Fahrleistung von 10.000 km. Bei diesem Hersteller beträgt der Grenzabtrag 8mm, höhere Werte sind aufgrund gesetzlicher Bestimmungen unzulässig.

Bei der Erprobung eines neuen Produktes wurden nun 5 Reifen untersucht. Ihr Verschleiß wurde jede 1000km gemessen.

Folgende Daten wurden aufgenommen:



Fahrleistung, km	Abtrag in mm bei Reifen				
	1	2	3	4	5
1000	0,16	0,22	0,25	0,18	0,32
2000	0,36	0,49	0,61	0,35	0,57
3000	0,63	0,51	0,63	0,48	0,88
4000	0,83	0,99	1,12	0,86	1,10
5000	1,02	0,92	0,95	0,80	1,25
6000	1,24	1,43	1,62	1,19	1,55
7000	1,37	1,45	1,58	1,12	1,53
8000	1,71	1,69	2,02	1,48	2,34
9000	1,99	2,07	2,14	1,54	2,44
10000	2,27	2,07	2,09	2,00	2,39

Durch eine lineare Regression wurden folgende Werte des Parameters a_1 und der Lebensdauer $t = Y/a_1$ eines jeden Reifens bestimmt, Bild 43:

Parameter	Reifen				
	1	2	3	4	5
a_1 , mm/km	2,28E-04	2,15E-04	2,20E-04	1,87E-04	2,46E-04
t , km	3,50E+04	3,72E+04	3,64E+04	4,27E+04	3,25E+04

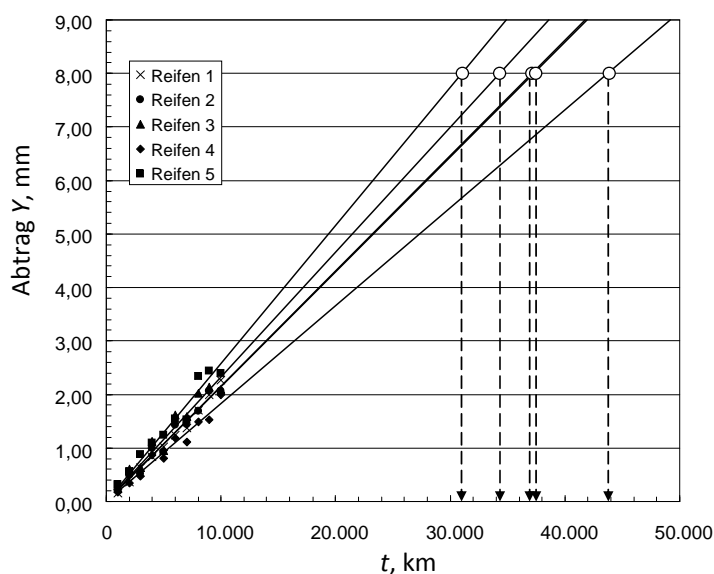


Bild 43: Auswertung des Degradationsversuchs im Beispiel.

4.5. Validierung beim Kunden

Die Validierung ist nach DIN EN ISO 9000 die Bestätigung durch Bereitstellung eines objektiven Nachweises, dass die Forderungen für einen spezifischen beabsichtigten Gebrauch oder Anwendung erfüllt worden sind. Insofern muss eine Erprobung zum Zwecke der Validierung den spezifischen Gebrauch bzw. die vorgesehenen Anwendungen des Produkts berücksichtigen.

Die Validierung beim Kunden hat die Aufgabe, mögliche Fehler zu entdecken, welche durch Wechselwirkungen eines Bauteils mit seiner Umgebung (Gesamtsystem, Medien, Anwendungen etc.) entstehen können und während der Entwicklungsphase nicht vorhersehbar waren. Nach Stand der

2020-04-06 - SOCOS



Technik sind validierende Erprobungen die effektivste Methode solche potentielle Fehler aufzudecken.

Allerdings muss auch die begrenzte statistische Aussagefähigkeit der Versuche erwähnt werden, die i.d.R. nur mit sehr wenigen Teilen bzw. für eine begrenzte Prüfdauer durchgeführt werden können. Daraus ergibt sich, dass nur ganz grobe Fehler mit einer relativ hohen Auftretenswahrscheinlichkeit entdeckt werden können, siehe Bild 26.

Ziel der Validierung ist es, alle Anwendungen des Teils (z.B. unterschiedliche Applikationen) zu überprüfen. Dazu kann es erforderlich sein, die Anwendungen in Gruppen aufzuteilen, in denen kritische Lastfälle repräsentativ für alle Anwendungen in der Gruppe erprobt werden.

Folgende Kriterien zur Auswahl der Anwendungen können verwendet werden:

- Neuheitsgrad,
- Verkaufsvolumen,
- Leistungsdichte.

Die Teile werden sowohl nach bestandener als auch nach nicht-bestandener Prüfung einer Befundung unterzogen. Dabei sollte ein besonderes Augenmerk auf einen unerwarteten Verschleißgrad, ungewöhnliche Fehlerbilder etc. gelegt werden.

Welche Erprobungen durchgeführt werden, muss erzeugnisspezifisch festgelegt werden.

4.6. Produktionsbegleitende Prüfungen

Zuverlässigkeit ist ein Aspekt der Qualität, deshalb sind sämtliche Tätigkeiten im Rahmen eines QM-Systems auch zur Erfüllung der festgelegten bzw. vorausgesetzten Anforderungen bezüglich der Zuverlässigkeit anzusetzen [8], S. 291. Durch regelmäßige Prüfung von Stichproben lieferfertiger Erzeugnisse aus der Serienfertigung (sogenannte Z-Prüfung) soll geprüft werden, ob diese Anforderungen laufend erfüllt werden.

Prüflinge aus der Produktion sind zwar erheblich preiswerter und liegen in größeren Mengen zur Verfügung als Erprobungsmuster in der Entwicklungsphase, trotzdem ist i.d.R. eine Beschränkung des Erprobungsaufwands aufgrund begrenzter Prüfstandskapazitäten erforderlich. Insbesondere die Durchführung von normalen (nicht-gerafften) Dauerläufen würde deutlich zu lange dauern, um kurzfristige Risiken für die Erzeugniszuverlässigkeit zu erkennen.

Zielführende Ansätze bestehen hier darin, beschleunigte Prüfverfahren wie HASS zu verwenden, um einen schnellen Vergleich mit dem abgesicherten und freigegebenen Musterstand zu erreichen bzw. zumindest Veränderungen von zuverlässigkeitsrelevanten Merkmalen zu verfolgen.

Alternativ können auch sogenannte Burn-in-Tests durchgeführt werden. Der Burn-in-Test (engl., wörtlich: Einbrennen) ist eine Form der 100%-Prüfung im Rahmen der Serienfertigung elektronischer Komponenten, bei der durch eine definierte Belastung (z.B. Temperatur, Feuchte, Strom) potentielle Frühausfälle aktiviert und die entsprechenden Erzeugnisse ausgelesen werden. Die Prüfbedingungen müssen so gewählt werden, dass eine ausreichende Selektion zwischen „guten“ und „schlechten“ Erzeugnissen erreicht wird, ohne die „guten“ zu schädigen. In der Regel sind diese Voraussetzungen bei mechanischen Bauteilen jedoch schwer zu erfüllen.



5. Zuverlässigkeit im Feld

5.1. Produkthaftung

Produkthaftung bedeutet nach dem Produkthaftungsgesetz, dass ein Hersteller für Schäden haftet, die Dritten aus Fehlern seiner Produkte entstehen. Fehlerhaft ist ein Produkt, wenn es Sicherheitsdefizite aufweist, das heißt, wenn es nicht die Sicherheit bietet, die der Benutzer des Produkts berechtigterweise erwarten darf. Sicherheitserwartungen können durch Aussagen aller Art (Werbung, Prospekte, Anpreisung) begründet werden. Deshalb ist Vorsicht mit solchen Aussagen angebracht.

Die Produkthaftung ist in erster Linie eine "Gefährdungshaftung". Das bedeutet, dass der Hersteller unabhängig davon haftet, ob er den Fehler verschuldet hat oder nicht. Entscheidend ist allein das Auftreten des Fehlers. Jeder Bereich (Entwicklung, Fremdbezug, Fertigung und Vertrieb) ist im Rahmen seiner Aufgaben dafür verantwortlich, dass Sicherheitsdefizite von Erzeugnissen unter allen Umständen vermieden werden.

Der Hersteller muss, um der Produkthaftung gerecht zu werden, seine auf dem Markt befindlichen Produkte daraufhin beobachten, ob:

- nicht bis dahin unbekannte Fehler auftreten,
- nicht durch eine Verbindung mit gebräuchlichem Zubehör — auch von Fremdherstellern — Gefahren für den Benutzer auftreten können (z.B. durch Anbauteile für das Produkt) und
- nicht häufig Eingriffe oder Veränderungen vorgenommen werden (z.B. Veränderung der Abregelgrenze bei Steuergeräten).

Dem Kunden ist der ordnungsgemäße, gefahrenfreie Gebrauch des Produkts zu erläutern; auf verbleibende Gefahren ist hinzuweisen. Einbauhinweise, Gebrauchsanleitung und Gefahrenhinweise müssen sich am Fachwissen der Zielgruppe (Fachmann/Laie) orientieren, klar und verständlich sein.

5.2. Feldbeobachtung und Aktive Feldbeobachtung (AFB)

Feld- oder auch Marktbeobachtung meint in erster Linie, dass der Hersteller eines Produkts den Verpflichtungen aus der Schuldrechtsreform 2002 bzgl. Sachmängelhaftung, gegenüber dem Geräte- und Produktsicherheitsgesetz (GPSG) sowie gegenüber dem Produkthaftungsgesetz (ProdHaftG) nachkommt. Das heißt, dass bei Vorliegen einer Beanstandung das jeweilige Produkt zu untersuchen ist, um den etwaigen Mangel in Konsequenz dann nachhaltig abzustellen.

Von Herstellern wird darüber hinaus grundsätzlich eine Beobachtung des Marktes gefordert, die eine frühe Erkennung von Sicherheitsmängeln im Zusammenhang mit dem von ihm hergestellten Erzeugnis zulässt. Das bedeutet, dass der Hersteller während der üblichen Nutzungsphase allen Hinweisen auf Beanstandungen nachgehen muss, wenn diese Anlass zur Sorge geben, dass das Produkt nicht die Sicherheit bietet, die die Allgemeinheit berechtigterweise erwarten darf.

Dem gegenüber wird unter AFB die Beobachtung des Produktverhaltens im Feld verstanden, die unabhängig von Beanstandungen, das heißt durch Untersuchungen an funktionierenden Produkten durchgeführt wird. Bei der Analyse von funktionalen Langläufern, d.h. über die gesamte Produktlebensdauer, ergeben sich wertvolle Erkenntnisse zum Verhalten von Modulen und Maschinenelementen des Produkts, die eine Beurteilung der Robustheit unter echter Feldlast ermöglicht.

Im Mittelpunkt des Konzepts der AFB steht die Nutzbarkeit der erzeugten Daten, d.h. der produktbezogene Erkenntnisgewinn hinsichtlich des:

- Verhaltens von Feldlangläufern bzgl. Funktion/Sicherheit/Ausfallwahrscheinlichkeit



- Abgleichs von Erzeugnis-Erprobungen & Tests mit der realen Feldlast
- an die reale Feldbelastung angepassten Produkt-Designs
- Erkennens und Absicherns von Ratiomaßnahmen am Erzeugnis

Die Vorgehensweise dabei ist, ein Erzeugnis virtuell in Module bzw. Maschinenelemente zu zerlegen um aus der Erzeugnisanalyse auch älterer Produktgenerationen aus dem Feld einen erheblichen Erkenntnisgewinn für aktuelle und künftige Erzeugnisse zu gewinnen. Dieses Vorgehen hängt mit der unverzichtbaren Wiederverwendung der Module über Produktplattform-Generationen hinweg zusammen. Beispiele dafür sind Endstufenkonzepte bei Steuergeräten, Materialkombinationen für die Aufbau- und Verbindungstechnik und zum Abdichten von Erzeugnissen sowie alle Werkstoffe und deren Belastungen, die in Designelementen Verwendung finden.

Entsprechend dieser Betrachtungsweise darf die „AFB-Analyse“ der Erzeugnisse im Labor der entsprechenden Entwicklungsabteilung nicht nur nach Funktion stattfinden. Viel mehr sollte durch dedizierte Betrachtung eines Moduls, in Verbindung mit vorhandenen Kfz-Daten zur jeweils erfahrenen Feldlast, die Ermittlung der Robustheit des gesamten Erzeugnisses stattfinden.

5.3. Auswertung von Felddaten

Methoden zur Auswertung von Felddaten werden in [16] detailliert behandelt. An dieser Stelle sein einige ergänzende Anmerkungen dazu gegeben.

Die Hauptschwierigkeit bei der Analyse von Felddaten liegt in deren Unvollständigkeit. Zwar können Daten über das Ausfallverhalten aus Garantiefällen, Inspektionen etc. gesammelt werden, Angaben über das Verhalten nicht-ausgefallener Erzeugnisse sind jedoch i.d.R. schwer zu beschaffen. Für die Analyse der Lebensdauer ist das Einbeziehen von Beobachtungen über intakte Einheiten jedoch sehr wichtig, wie in Kapitel 4.3 gezeigt wurde. Dies ermöglicht erst eine Auswertung mit den Methoden für zensurierte Daten. Aus diesem Grund sind einige spezielle Vorgehensweisen entwickelt worden, welche hier kurz vorgestellt werden.

Die einfachste Möglichkeit besteht darin, die Anzahl der intakten Einheiten aus der Anzahl der in Umlauf gebrachten Einheiten zu schätzen. Wurden beispielsweise bis zu einem Zeitpunkt k Ausfälle registriert, so kann angenommen werden, dass bei n in Umlauf gebrachten Teile $(n-k)$ Teile bis zu diesem Zeitpunkt nicht ausgefallen sind. Eine Auswertung ist mit den Verfahren für rechts-zensurierte Daten Typ I und II möglich. n muss allerdings nicht gleichbedeutend sein mit der Anzahl der verkauften Einheiten, da nicht alle Produkte sofort den Endkunden erreichen. Hier sind Produktspezifische Zusammenhänge zu beachten.

Falls das Lebensdauermerkmal keine Zeit-Größe ist und eine deutlich inhomogene zeitliche Nutzung des Produkts vorliegt, ist das obige Vorgehen nicht direkt anwendbar. Das Lebensdauermerkmal bei einem Fahrzeug ist beispielsweise seine Laufleistung in km, diese kann aus der Tatsache, dass eine bestimmte Anzahl Fahrzeugen nach einem Jahr noch intakt waren, nicht direkt abgeleitet werden, auch wenn die Lebensdauer der ausgefallenen Fahrzeugen exakt festgestellt wurde. Zur Behandlung dieses Problems können zwei Ansätze verfolgt werden:

- Die genauesten Ergebnisse sind zu erwarten, falls die Leistungsverteilung des Produkts (z.B. die Laufleistungsverteilung beim PKW) bekannt ist. In diesem Fall kann die Gesamtanzahl der zu einem Zeitpunkt noch intakten Einheiten je nach Umfang der einzelnen Klassen der Leistungsverteilung heruntergebrochen werden. Wenn z.B. bekannt ist, dass 20%, 30% und 50% der Fahrzeuge entsprechend eine Jahres-Laufleistung von 40Tkm, 25Tkm und 15Tkm haben, so kann gefolgert werden, dass von 1000 Fahrzeugen, welche nach einem Jahr noch nicht ausgefallen waren, 200 eine Laufleistung von 40Tkm, 300 entsprechend eine Laufleistung von 25Tkm und 500 eine Laufleistung von 15Tkm ohne Ausfall überstanden haben. Die Analyse erfolgt in diesem Fall mit den Verfahren für mehrfach zensurierte Daten.



- Eine Leistungsverteilung wird durch langwierige und aufwendige Nutzungsanalysen abgeleitet. Falls eine solche deswegen nicht vorliegt, kann vereinfachend, die Anzahl der intakten Einheiten auf alle Ausfälle „verteilt“ werden. Es wird mit anderen Worten implizit angenommen, dass die Leistungsverteilung und die Ausfallverteilung identisch sind. Ob diese Annahme berechtigt ist, muss im Einzelfall geprüft werden. Die Auswertung kann hier mit dem vereinfachten Auswerteverfahren für einen Sudden-Death-Test vorgenommen werden.

Eine weitere Schwierigkeit liegt in der Komplexität von Felddaten. Damit ist nicht unbedingt die Menge, sondern deren Beschaffenheit gemeint: Oft ist nicht sofort ersichtlich, was genau bei einem Ausfall passiert ist, und ob überhaupt etwas ausgefallen ist. Ausfalldaten können also verzerrt sein und manchmal zu unerwarteten Effekten führen. Es sind Beispiele bekannt, bei denen ein Hersteller aufgrund größerer Mengen an Rückläufern während der Garantiezeit auf eine mangelnde Zuverlässigkeit seiner Produkte geschlossen hatte. Dabei lag das Problem darin, dass das Wartungspersonal nach Anzahl der ausgetauschten Einheiten bezahlt wurde, von denen viele völlig intakt waren. Als Lösung wurde nach einer detaillierten Analyse das Leistungsanzreizsystem für das Wartungspersonal und nicht etwa das Design des Produkts geändert.

Als weiteres Beispiel sei der Fall eines Geländewagenherstellers erwähnt, der in den 60-er Jahren von einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50mph (Meilen per Stunde) für seine SUV's ausging. Nachdem vermehrt Ausfälle festgestellt wurden, ergab eine Analyse, dass die 50mph für Fahrten im Gelände zwar angemessen gewesen wären, dass aber die meisten SUV's wie normale Fahrzeuge benutzt wurden, die wesentlich schneller fahren. Als Ergebnis wurden die Anforderungen für zukünftige Produkte geändert und nicht etwa qualitätssichernde Maßnahmen durchgeführt.

Eine besonders oft anzutreffende Situation ist, dass gemischte Ausfälle vorliegen, beispielsweise einer mechanischen und einer elektronischen Komponente des Erzeugnisses, oder zwei unterschiedliche Ausfallmechanismen an einer einzigen Komponente auftreten. Eine „gemischte“ Auswertung beider Mechanismen ist an dieser Stelle genauso unzulässig, wie das „Ausblenden“ des jeweils anderen Mechanismus. Die korrekte Auswertung erfordert hier die Behandlung der Ausfälle des konkurrierenden Ausfallmechanismus als Durchläufer und die Anwendung der Verfahren für mehrfach-zensorisierte Daten.

Eine ähnliche Situation tritt auf, wenn zu einem bestimmten Zeitpunkt Feldausfälle vorliegen, bei denen es zunächst unklar ist, ob es sich um Frühausfälle aufgrund von Fertigungsfehlern, oder um Verschleiß- und Ermüdungsausfälle handelt. Eine unzutreffende Annahme bei der Auswertung kann zu völlig falschen Ergebnissen führen. Falls beispielsweise 10% der gefertigten Einheiten einen Wärmebehandlungsfehler aufweisen, müssen Feldausfälle aufgrund dieses Fehlers auch auf 10% der Fertigungsmenge bezogen werden, was u.a. bei der Berechnung der intakten Einheiten zu berücksichtigen ist.

Aus den erwähnten Beispielen wird ersichtlich, dass eine detaillierte Befundung und Analyse der Ausfälle meistens unabdingbar ist. Auf keinen Fall sollte man sich nur auf eine Abschätzung der Ausfallrate bzw. des Weibull - Exponenten verlassen, um über konkurrierende Ausfallmechanismen zu entscheiden. Weitere Details zu diesem Thema finden sich in [8,16]



6. Anhang

6.1. Statistische Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige grundlegende statistische Konzepte vorgestellt, welche für das Verständnis der Zuverlässigkeit erforderlich sind.

6.1.1. Definition und Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

In der Ingenieurpraxis treten oft Variationen auf, welche prinzipiell in zwei Kategorien eingeteilt werden können [15], S.45ff:

- deterministische, deren Grund bekannt ist und seine Wirkung exakt prognostiziert werden kann, und
- zufällige, bei denen entweder keine Ursache bekannt ist, oder die Wirkung dieser Ursache nicht ohne Weiteres beschrieben werden kann.

Typisches Beispiel ist im ersten Fall die Bewegung eines Fahrzeugs infolge einwirkender Kräfte und im zweiten Fall die Festigkeit eines Teils infolge unbekannter Einwirkungen beim Herstellungsprozess. Da zufällige Variationen nicht exakt prognostiziert werden können, bedient man sich dem Konzept von *Zufallsvariablen*, denen eine gewisse Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann. Die Festigkeit eines zu produzierenden Teils ist z.B. durch eine Zufallsvariable zu beschreiben, die nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit bestimmte Werte annehmen kann.

Für den Begriff der Wahrscheinlichkeit können unterschiedliche Definitionen verwendet werden. In der „klassischen“ Definition von Laplace wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses definiert durch das Verhältnis

$$P := \frac{r}{n}, \quad 0 \leq r \leq n \quad (6.1)$$

definiert, wobei mit r die Anzahl der günstigen Fälle und mit n die Anzahl aller Fälle bezeichnet wurden. Wenn beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnet werden soll beim Würfeln eine 4 zu erzielen, dann ist diese Wahrscheinlichkeit gleich $1/6$, denn in nur einem von 6 Fällen wäre der Ausgang günstig. Diese Definition wird oft dazu verwendet, zwischen einem relativen Anteil in einer endlichen Grundgesamtheit und einer Wahrscheinlichkeit umzurechnen: Wenn die Aussage gemacht wird, dass 20% von den Teilen einer Charge ausgefallen sind, dann bedeutet dies gleichzeitig, dass die Wahrscheinlichkeit, bei einer Prüfung zufällig ein ausgefallenes Teil zu „ziehen“, 20% beträgt und umgekehrt.

Obige Definition ist allerdings nur bei einer endlichen Anzahl von Ereignissen anwendbar. Abhilfe schafft hier die „statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit nach von Mises. Hier wird von einer unendlich großen Grundgesamtheit ausgegangen, von der eine Stichprobe der Größe n entnommen wird. Falls in dieser Stichprobe in r Fällen das Ereignis stattgefunden hat, wird die Grenze der relativen Häufigkeit r/n für Stichprobengrößen gegen unendlich als Definition für die Wahrscheinlichkeit verwendet:

$$P := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n}, \quad 0 \leq r \leq n. \quad (6.2)$$

Obwohl Gl. (6.1) und (6.2) ähnlich aussehen, ist die Interpretation sehr unterschiedlich: In der ersten steht n für die Größe der (endlichen) Grundgesamtheit, in der zweiten ist n die Größe der Stichprobe einer (unendlichen) Grundgesamtheit. Wenn also in einer Stichprobe 20% von den Teilen ausgefallen sind, dann bedeutet dies *nicht*, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit in der Grundgesamtheit



zwangsläufig 20% betragen muss. Bei der nächsten gezogenen Stichprobe können ganz andere Anteile ausfallen. Hier spielt also die Variation der Stichproben zusätzlich eine entscheidende Rolle.

Gl. (6.2) ist zwar ebenfalls nicht ganz zufriedenstellend, da es sich hierbei im strengen Sinne um eine Schätzung und nicht um eine Definition handelt [1], S.36. Für Zuverlässigkeitsbetrachtungen reicht diese jedoch völlig aus. Nur am Rande sei hier noch die „axiomatische“ Definition von Kolmogoroff erwähnt, welche die Wahrscheinlichkeit nicht definiert, sondern als fundamentale Eigenschaft von Ereignissen betrachtet wird, welche gewisse Axiomen genügen.

Die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse können miteinander in Beziehung stehen. Einige der wichtigsten Zusammenhänge werden hier erläutert, weitere Details finden sich in [15], S.25ff.

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird mit $P(A)$ bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht stattfindet ist gegeben durch $1 - P(A)$.
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A stattfindet, unter der Annahme dass Ereignis B stattgefunden hat, wird mit $P(A|B)$ bezeichnet. Falls die Ereignisse unabhängig sind, gilt $P(A|B)=P(A)$ und $P(B|A) = P(B)$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A und B gleichzeitig stattfinden, wird mit $P(AB)$ bezeichnet und ist gegeben durch $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$. Im Falle unabhängiger Ereignisse gilt die „Produktregel“ $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A oder B stattfindet, wird mit $P(A+B)$ bezeichnet und ist gegeben durch $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Im Falle unabhängiger Ereignisse gilt $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$.
- Satz der totalen Wahrscheinlichkeit: Im Falle von n sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen B_i (d.h. $P(B_1 + \dots + B_n) = P(B_1) + \dots + P(B_n) = 1$) gilt $P(A) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.
- Durch Umformung der letzten Beziehung erhält man den Satz von Bayes: $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$.

Der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit spielt bei Zuverlässigkeitsbetrachtungen eine sehr wichtige Rolle, hier eine Illustration.

BEISPIEL:

Ein Hersteller bezieht Teile von 3 verschiedenen Zulieferern und möchte die Ausfallwahrscheinlichkeit dieser Teile berechnen. Von den Zulieferern sind die gelieferten Teilmengen und die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten bekannt:

	Zulieferer 1	Zulieferer 2	Zulieferer 3
Lieferanteil	20%	30%	50%
Ausfallwahrscheinlichkeit	4%	2%	1%

Für die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit kann der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit herangezogen werden. Dabei bezeichnet A das Ereignis „Ausfall“ und B_i „Lieferung von Zulieferer 1 bis 3“:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) = 0,04 \cdot 0,2 + 0,02 \cdot 0,3 + 0,01 \cdot 0,5 = 1,9\%$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird also wesentlich kleiner sein als beim Zulieferer 1, weil dieser zwar Teile mit der höchsten Ausfallwahrscheinlichkeiten, aber gleichzeitig auch relativ kleine Mengen liefert, welche als „Gewicht“ in der obigen Formel berücksichtigt werden. Wichtig ist allerdings, dass obige Aufstellung alle Zulieferer erfasst, so dass die Summe der Lieferanteile 1 ergibt.



6.1.2. Datenreihen und deren Kennwerte

Auch bei einer sorgfältigen Durchführung wird das Ergebnis eines Versuchs (z.B. die Messung einer Zugfestigkeit) unter gleichbleibenden Bedingungen bei einer mehrmaligen Ausführung unterschiedlich ausfallen, es wird streuen. Eine Datenreihe

$$x_i, i=1, \dots, n, \tag{6.3}$$

mit n -Werten der betrachteten Größe kann im Rahmen der deskriptiven Statistik grundlegend durch folgende Kennwerte charakterisiert werden:

- Mittelwert zu Beschreibung der Lage der Werte

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \text{ sowie} \tag{6.4}$$

- Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \tag{6.5}$$

oder deren Quadratwurzel, die Standardabweichung s , welche die Streuung der Werte um den Mittelwert charakterisieren.

Da die Einzelwerte streuen, werden bei einer mehrmaligen Ermittlung der Datenreihe auch deren Kennwerte unterschiedlich ausfallen. Eine wichtige Erkenntnis ist also, dass der Mittelwert und die Standardabweichung ebenfalls einer Streuung unterliegen. Allerdings ist die Varianz des Mittelwertes deutlich kleiner als die Varianz der Einzelwerte und zwar umso kleiner, je größer der Stichprobenumfang ist. Man kann zeigen (vgl. auch [6], S.122), dass

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n}. \tag{6.6}$$

Datenreihen lassen sich z.B. in Histogrammen darstellen, welche bei der Klassierung der Werte der Datenreihe entstehen. In einem Histogramm werden also Häufigkeiten der auftretenden Merkmalsklassen dargestellt. Durch Aufsummierung der Klassen können Summenhäufigkeiten abgeleitet werden.

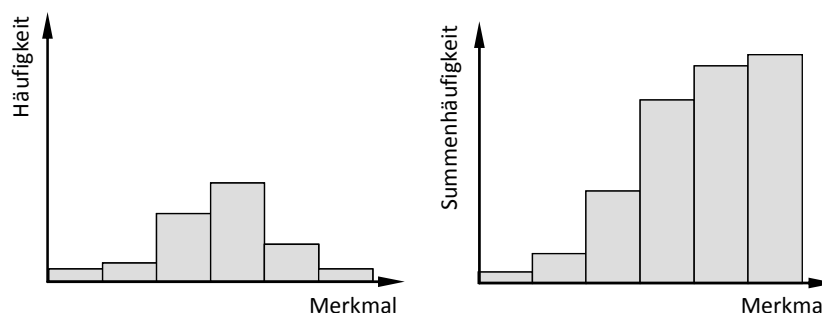


Bild 44: Histogramm und Summenhäufigkeitskurve (schematische Darstellung).

6.1.3. Verteilungen und deren Kennwerte

6.1.3.1. Verteilung und Verteilungsdichte, Momente

Eine etwas andere Sicht der Dinge entsteht, wenn die Daten als Stichprobe aus einer unendlich großen Grundgesamtheit angesehen werden. Wir deuten also

$$x_i, i=1, \dots, n, \tag{6.7}$$



als Realisierungen einer Zufallsvariable X . Als theoretisches Modell für die Beschreibung der Grundgesamtheit aller möglichen Werte der Variable dient die Verteilungsdichtefunktion $f(x)$. Diese ordnet dem Wert x eine Zahl $f(x)$ zu, ähnlich wie in einem Histogramm dem Wert x eine relative Häufigkeit zugeordnet wird. Man kann zeigen, dass falls der Umfang der betrachteten Stichprobe sehr groß und die Klassenbreiten beim Histogramm immer kleiner werden, aus dem Histogramm direkt die Verteilungsdichtefunktion abgeleitet wird, so dass das Histogramm als eine Näherung für die Dichtefunktion angesehen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte im Bereich $(x; x+dx]$ annimmt beträgt

$$P(x < X \leq x + dx) = f(x)dx . \tag{6.8}$$

Aus der Summenhäufigkeitskurve kann durch Grenzübergang gegen unendlich ebenfalls eine Funktion abgeleitet werden, die Verteilungsfunktion $F(x)$. Sie gibt zu jedem Wert x die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine Zufallsvariable X einen Wert kleiner als x annimmt, Bild 45 rechts. Man erhält allgemein die Verteilungsfunktion einer Verteilung, indem man über deren Dichtefunktion integriert:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(v)dv . \tag{6.9}$$

Die unabhängige Variable der Funktion $f(v)$ wird dabei mit v bezeichnet, damit sie von der oberen Integrationsgrenze x unterschieden werden kann. Die Funktion $F(x)$ ist also eine Funktion der oberen Integrationsgrenze, v ist hingegen eine Variable über welche integriert wird.

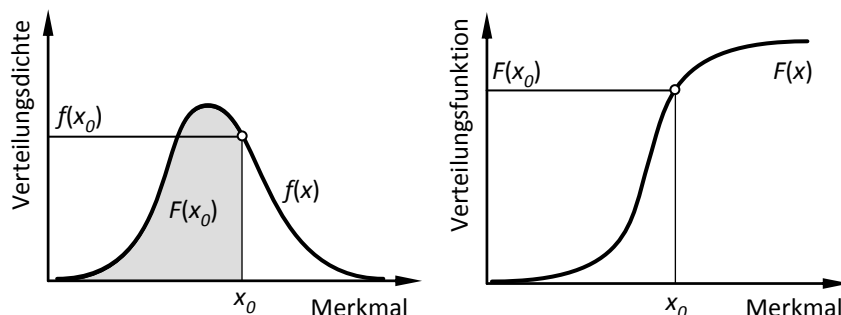


Bild 45: Verteilungsdichte und Verteilungsfunktion (schematische Darstellung).

Die Verteilungsfunktion ordnet dem Wert x der Variablen X eine Wahrscheinlichkeit zu, somit müssen einige Voraussetzungen dafür erfüllt werden, damit eine Funktion als Verteilungsfunktion verwendet werden kann:

- In den Grenzen muss gelten, dass $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, daraus folgt dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)dv = 1 . \tag{6.10}$$

- Für alle $-\infty < x < +\infty$ muss gelten, dass $F(x)$ eine monoton steigende Funktion von x ist.

Die Dichte- und Verteilungsfunktion einer Verteilung haben charakteristische Kennwerte (manchmal auch Momente genannt), welche das Aussehen der Verteilung bestimmen. Die wichtigsten sind:

- der Mittelwert (manchmal auch Erwartungswert genannt)

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \tag{6.11}$$

- und die Varianz



$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx, \tag{6.12}$$

welche die Lage und Breite der Verteilung beschreiben.

6.1.3.2. Beispiele für Verteilungen

Obige Sachverhalte können am einfachsten am Beispiel der Normalverteilung verdeutlicht werden, welche die bekannte „glockenartige“ Verteilungsdichtefunktion besitzt:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right). \tag{6.13}$$

Durch Integration der Dichtefunktion erhält man die s-förmige Verteilungsfunktion der Normalverteilung

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dv. \tag{6.14}$$

Da das Integral nicht analytisch ausgewertet werden kann, lässt sich obige Gleichung auch nicht weiter vereinfachen.

Aus den Gleichungen ist ersichtlich, dass bei der Normalverteilung direkt die Kennwerte Mittelwert und Standardabweichung als Parameter in der Verteilungsfunktion auftreten, man bezeichnet sie oft auch mit $N(\mu, \sigma)$. Dies macht die Arbeit mit ihr besonders einfach. Dass dies aber nicht bei jeder Verteilung so sein muss, zeigt das Beispiel der Exponentialverteilung mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0, \tag{6.15}$$

bei der ein Parameter λ auftritt. Die Beziehung zwischen Parameter und obigen Kennwerten ist gegeben durch folgende Beziehung:

$$\mu = \frac{1}{\lambda}; \quad \sigma^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2. \tag{6.16}$$

Hier ist die Beziehung zwischen Verteilungsparameter und Kennwerten relativ einfach, so dass eine Umrechnung noch problemlos möglich ist. Komplizierter sieht es z.B. bei der Weibull-Verteilung aus, welche bei der Beschreibung von Lebensdauern eine wichtige Rolle spielt; dort ist eine Umrechnung nicht mehr ohne Weiteres möglich. Auf eine Darstellung wird allerdings an dieser Stelle verzichtet.

6.1.3.3. Kennwerte unabhängiger und abhängiger Variablen

Falls eine Variable Y linear von n unabhängigen Zufallsvariablen X_i abhängt:

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i, \tag{6.17}$$

wird Y ebenfalls eine Zufallsvariable sein. Die Verteilungsfunktion von Y wird im Allgemeinen nicht ohne Weiteres zu berechnen sein, insbesondere dann nicht, wenn die Variablen X_i unterschiedliche Verteilungstypen aufweisen. Trotzdem ist es möglich, Kennwerte der Y -Verteilung exakt in Abhängigkeit von Kennwerten der X_i -Verteilungen zu berechnen, siehe [6] S.150:

$$\mu_Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mu_{X_i}, \tag{6.18}$$



$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2. \tag{6.19}$$

Insbesondere gilt für den Mittelwert von n normalverteilten unabhängigen Variablen

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad i=1, \dots, n, \quad X_i \in N(\mu, \sigma), \tag{6.20}$$

dass dieser ebenfalls normalverteilt ist mit

$$\mu_{\bar{x}} = n \cdot \frac{\mu}{n} = \mu \quad \text{und} \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = n \cdot \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{6.21}$$

Falls die Abhängigkeit zwischen Y und den unabhängigen Zufallsvariablen X_i abweichend von Gl. (6.17) nichtlinear ist, so dass allgemein gilt

$$Y = g(X_1, \dots, X_n), \tag{6.22}$$

kann durch eine Taylor-Reihenentwicklung eine Abschätzung 1. Ordnung von Mittelwert und Varianz abgeleitet werden, [6] S.150:

$$\mu_Y = g(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n}), \tag{6.23}$$

$$\sigma_Y^2 = \left(\frac{\partial g(X_1, \dots, X_n)}{\partial X_1} \right)^2 \sigma_{X_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial g(X_1, \dots, X_n)}{\partial X_n} \right)^2 \sigma_{X_n}^2. \tag{6.24}$$

Diese linearisierte Abschätzung ist in der Umgebung von Extrema keine gute Näherung. In diesem Fall kann eine Monte-Carlo-Simulation bessere Ergebnisse liefern. Dafür werden anhand der bekannten Verteilungen der Variablen X_i zufällig größere Stichproben generiert. Für jede Konfiguration der Variablen wird anschließend ein Wert für Y nach Gl. (6.22) berechnet, so dass am Schluss auch eine Stichprobe desselben Umfangs auch für Y vorliegt. Die Kennwerte der Y -Verteilung können nun durch Schätzungen nach Gl. (6.4) und (6.5) aus dieser Stichprobe gewonnen werden. Weitere Details dazu finden sich in [6] Kap. 9.

6.1.3.4. Punkt- und Intervallschätzung des Mittelwertes, Vertrauensbereich

Im Allgemeinen stellt sich die Frage, wie die unbekanntenen Kennwerte der Grundgesamtheit ermittelt werden können. Es kann gezeigt werden, dass

- der Mittelwert einer Stichprobe \bar{x} als Schätzwert für den Mittelwert der Grundgesamtheit μ verwendet werden kann, sowie
- die Varianz einer Stichprobe s^2 als Schätzwert für die Varianz der Grundgesamtheit σ^2 verwendet werden kann.

Beide Schätzwerte sind zudem auch erwartungstreu, d.h. sie nähern sich bei vielen Wiederholungen den Werten der Grundgesamtheit.

Die Güte dieser Punkt-Schätzung ist zunächst allerdings offen, sie kann jedoch durch folgende Vorgehensweise bewertet werden. Falls eine Zufallsvariable X normalverteilt ist, so ist die Variable

$$u = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad X \in N(\mu, \sigma) \tag{6.25}$$

ebenfalls normalverteilt mit dem Mittelwert 0 und der Standardabweichung 1, man nennt diese Verteilung „Standardnormalverteilung“. Eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit P , mit welcher X in einem bestimmten Intervall $\mu - u \cdot \sigma \leq X \leq \mu + u \cdot \sigma$ liegt, kann mit Hilfe des Parameters u erfolgen:

$$P(\mu - u \cdot \sigma \leq X \leq \mu + u \cdot \sigma) = 1 - \alpha. \tag{6.26}$$



Beispielsweise wird die Variable X mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% im Intervall $\mu \pm 1 \cdot \sigma$ liegen. Damit ist klar, dass u gleich dem Merkmalswert der Standardnormalverteilung bei Wahrscheinlichkeiten $(1 - \alpha / 2)$ und $\alpha / 2$ ist.

Wir betrachten nun den Mittelwert von n unabhängigen normalverteilten Variablen

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, X_i \in N(\mu, \sigma), i = 1, \dots, n, \bar{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \quad (6.27)$$

Die Größe

$$u = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \quad (6.28)$$

ist per Definition standard-normalverteilt. Allerdings wird in der Regel die Standardabweichung der Grundgesamtheit unbekannt sein, so dass sie aus einer Stichprobe geschätzt werden muss: $\sigma \approx s$. Man kann jedoch zeigen, dass in diesem Fall die Größe

$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{s} \quad (6.29)$$

nicht mehr normalverteilt ist, deren Verteilung wird durch die sogenannte t-Verteilung (oder Student-Verteilung) beschrieben. Die t-Verteilung zeigt für kleine Werte des Parameters n eine größere Breite und Flankenbetonung als die Normalverteilung, für große Werte von n (ab $n=50$) nähert sie sich der Normalverteilung an.

Eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit P , mit welcher \bar{X} in einem bestimmten Intervall liegt, kann mit Hilfe des Parameters t erfolgen. Umgekehrt, kann als sogenannter indirekter Schluss auch ein Intervall

$$\bar{X} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (6.30)$$

angegeben werden, der den unbekanntem Mittelwert der Grundgesamtheit überdeckt. Die Wahrscheinlichkeit

$$P \left[\bar{X} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha \quad (6.31)$$

wird hier üblicherweise Vertrauensniveau (confidence level) und das Intervall als Vertrauensbereich (confidence interval) bezeichnet. Je sicherer man sein möchte, dass das Intervall den wahren Mittelwert überdeckt, desto höher also das Vertrauensniveau liegt, desto größer ist der Parameter t zu wählen. Tabellarische Werte von t sind in Kap. 6.3.2 zu finden.

Analog kann auch ein Vertrauensintervall für die Varianz angegeben werden; darauf soll hier nicht weiter eingegangen werden. Details hierzu finden sich z.B. in [6].

6.1.3.5. Verteilungsfreie Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit, Vertrauensbereiche

Bei der Auswertung von Lebensdauerdaten müssen oft n zeitlich geordnete Beobachtungen (z.B. Ausfälle) $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ durch eine zunächst unbekannte, theoretische Verteilung beschrieben werden. Dazu stellt sich die Frage, welche Wahrscheinlichkeit der einzelnen Beobachtungen zugeordnet werden kann. Entsprechende Verfahren werden im Folgenden erläutert. Sie werden oft auch als Rang-Schätzverfahren bezeichnet, da sie nur die Anordnung (den Rang) der Beobachtungen berücksichtigen und nicht die eigentlichen Beobachtungszeitpunkte.

Angenommen, zu einem bestimmten Zeitpunkt sind bei einem Versuch 4 von 10 Prüflinge ausgefallen. Die Frage ist, wie aus dieser Beobachtung auf einer bestimmten Ausfall-



wahrscheinlichkeit F geschlossen werden kann. Der einfache Ansatz $F = 4/10 = 40\%$ wäre naiv, da bei einer bestimmten Wahrscheinlichkeit F alle Ausfälle zwischen 0 und 10 möglich, wenn auch unterschiedlich wahrscheinlich sind, Bild 46. Deren Wahrscheinlichkeit kann anhand der Dichtefunktion p der diskreten Binomialverteilung berechnet werden. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Ereignis (z.B. ein Ausfall) genau i -mal in einer Stichprobe des Umfangs n anzutreffen ist, falls die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis F beträgt:

$$p(i) = \binom{n}{i} \cdot F^i \cdot (1-F)^{n-i} \tag{6.32}$$

Aus der Beobachtung von 4 Ausfällen kann also nicht direkt auf einen bestimmten Wert für F geschlossen werden, denn 4 Ausfälle sind bei verschiedenen Werten für F möglich. Die Aufgabe kann aber anders formuliert werden: Es ist ein solcher Wert für F zu wählen, bei dem die Irrtumswahrscheinlichkeit möglichst klein gehalten wird, dass die wahre aber unbekannte Ausfallwahrscheinlichkeit größer ist als die gewählte. Die Wahrscheinlichkeit für eine nicht-konservative Schätzung soll also klein gehalten werden.

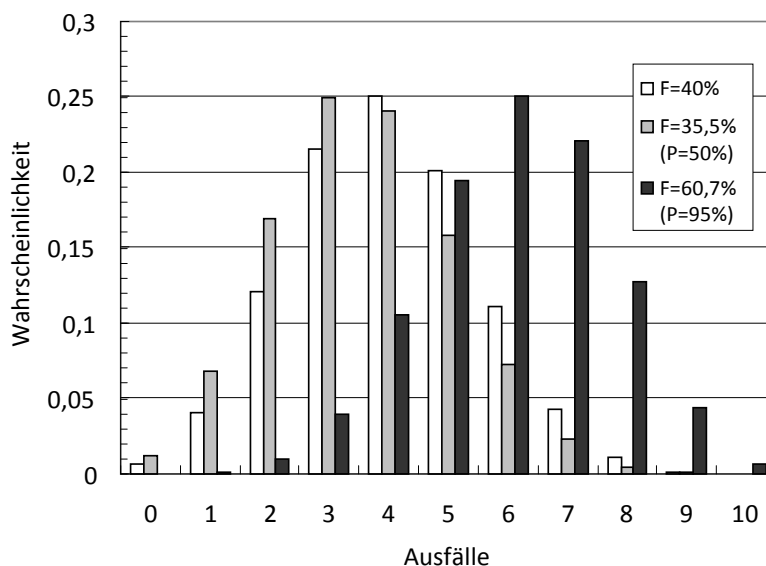


Bild 46: Wahrscheinlichkeit dafür, dass 1 bis 10 Ausfälle in einer Stichprobe von $n=10$ auftreten bei unterschiedlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten F .

Wie aus Bild 46 ersichtlich, werden weniger als 4 Ausfälle mit steigender Ausfallwahrscheinlichkeit F immer unwahrscheinlicher. Mit anderen Worten: Wenn es sehr unwahrscheinlich ist, dass weniger als 4 Ausfälle passieren, gleichzeitig aber 4 Ausfälle beobachtet werden, können die 4 Ausfälle kein Zufall sein, sie würden für eine niedrigere als die abgeschätzte Ausfallwahrscheinlichkeit sprechen. Damit wäre die Abschätzung konservativ, so wie angestrebt. Die Wahrscheinlichkeit, die sich als Summe von Gl. (6.32) für $i = 0, \dots, 3$ ergibt

$$\alpha = \sum_{i=0}^{x-1} \binom{n}{i} \cdot F^i \cdot (1-F)^{n-i} \tag{6.33}$$

ist damit als Restrisiko für eine nicht-konservative Schätzung (Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art α) zu interpretieren, welches klein zu halten ist. Die Wahrscheinlichkeit

$$P = 1 - \alpha = \sum_{i=x}^n \binom{n}{i} \cdot F^i \cdot (1-F)^{n-i} \tag{6.34}$$

stellt ihrerseits das Vertrauensniveau dar.



In den bisherigen Ausführungen wurde von einer bestimmten Ausfallwahrscheinlichkeit F ausgegangen. Die Aufgabe lautet jedoch, F für die i -te Beobachtung zu bestimmen. Das Vorgehen dazu liefert nun Gl. (6.34): Für eine ausreichend kleine Wahrscheinlichkeit α , kann F aus (6.34) bestimmt werden. Diese Gleichung kann entweder iterativ numerisch gelöst, oder nach einem Vorschlag in [14], S.79 umgewandelt werden in

$$F_{BB,1-\alpha} = \frac{i}{i + (n+1-i) \cdot F[2(n+1-i); 2i; 1-\alpha]} \tag{6.35}$$

Dabei wurde mit $F[2(n+1-i); 2i; 1-\alpha]$ das Quantil der Fischer-Verteilung mit Freiheitsgraden $2(n+1-i)$ und $2i$ bezeichnet, welches z.B. mit Hilfe der Microsoft-Excel-Funktion „FINV“ berechnet werden kann. Die nach Gl. (6.35) berechneten Vertrauensgrenzen $F_{BB,1-\alpha}$ sind für $\alpha = 5\%$ in Kap. 6.3.4 tabellarisch aufgeführt. Sie bestimmen den einseitigen Vertrauensbereich $F \leq F_{BB,1-\alpha}$ mit dem zugehörigen Vertrauensniveau

$$P[F \leq F_{BB,1-\alpha}] = 1 - \alpha \tag{6.36}$$

Für $\alpha = 50\%$ ergeben sich aus Gl. (6.35) die exakten Median-Werte der Ausfallwahrscheinlichkeit, eine Aufstellung findet sich in Kap. 6.3.3. Die oft benutzte Gleichung

$$F = \frac{i - 0,3}{n + 0,4} \tag{6.37}$$

stellt lediglich eine (wenn auch verhältnismäßig gute) Näherung dar.

Es existieren auch weitere Schätzer mit zugehörigen Vertrauensbereichen wie Kaplan-Meier, Fisher-Matrix und Likelihood-Verhältnis. Diese Verfahren basieren auf nur asymptotisch korrekte Näherungen und werden hier nicht weiter diskutiert. Details dazu sind z.B. in [14] zu finden.

BEISPIEL:

Für das Beispiel aus Kap. 4.3.2.1 werden die Median-Werte und die einseitigen Vertrauensgrenzen (Vertrauensniveau $P = 90\%$) der Ausfallwahrscheinlichkeit nach Gl. (6.35) wie folgt berechnet:

Motor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_{BB,50\%, \%}$	6,7	16,2	25,9	35,5	45,2	54,8	64,5	74,1	83,8	93,3
$F_{BB,90\%, \%}$	20,6	33,7	45,0	55,2	64,6	73,3	81,2	88,4	94,5	99,0

6.2. Verteilungen als Modell streuender Lebensdauerdaten

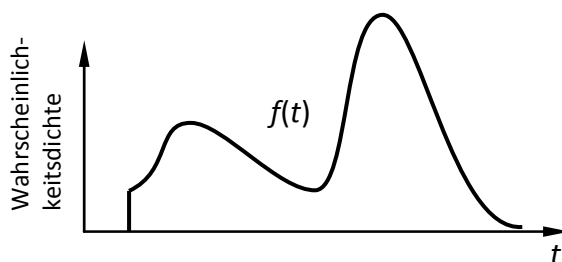


Bild 47: Mögliche Dichtefunktion der Verteilung einer realen Zufallsvariable (schematisch).

Verteilungen sind als Modelle streuender Lebensdauern zu verstehen. Wie bei jedem Modell macht es hier keinen Sinn zu fragen, ob das Modell richtig oder falsch ist, sondern ob es zweckmäßig ist oder nicht. Trotzdem ist beim Umgang mit (vereinfachten) Modellen Vorsicht geboten, denn sie spiegeln nicht die Realität in ihrer gesamten Komplexität wieder:

Zufallsvariablen müssen nicht normalverteilt sein. Die Gauß'sche Normalverteilung nimmt Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an, physikalische Größen sind jedoch oft nur positiv. Hier kann z.B. die



Anwendung der Lognormalverteilung weiterhelfen. Die Normalverteilung hat aber eine theoretische Grundlage, denn man kann zeigen, dass eine Zufallsvariable, welche unendlich vielen additiven und unabhängigen Einflüssen unterliegt, normalverteilt sein muss (zentraler Grenzwertsatz). Ob dies ein sinnvolles Modell für die jeweilige Fragestellung ist, muss im Einzelfall entschieden werden. Analoges gilt auch für die Lognormal- und der Weibull-Verteilung.

Zufallsvariablen müssen nicht einmal einer bekannten analytischen Verteilung entsprechen, denn sie unterliegen verschiedenen komplexen Einflüssen, können damit schief, multimodal oder durch eine Selektion links und rechts „abgeschnitten“ sein, Bild 47. Trotzdem kann es hilfreich sein, bekannte Verteilungen als Modell zu verwenden. Obwohl beispielsweise die Zufallsvariable Druckbelastung offensichtlich nicht Werte bis $+\infty$ annehmen kann, ist es zweckmäßig eine Lognormalverteilung für deren Beschreibung zu verwenden. Denn die Ableitung einer oberen Grenze für den Druck wird sich sehr schwierig gestalten und ist nicht wirklich zielführend: Die exakte „abgeschnittene“ Verteilung ist sehr komplex und kaum händelbar, ein „worst-case“-Ansatz, welcher nur den Maximaldruck berücksichtigt, aber dessen sehr niedrige Eintretenswahrscheinlichkeit vernachlässigt, führt zu Overdesign. Eine „unphysikalische“ Verteilung als vereinfachtes Modell kann hier weiterhelfen.

Dort, wo es erforderlich erscheint, darf aber keine zu stark vereinfachende Modellbildung erfolgen. Wenn z.B. offensichtlich mehrere Mechanismen zum Ausfall geführt haben, sind diese auch mit einem vertretbaren Aufwand mit den Ansätzen für zensierte Daten zu berücksichtigen und nicht durch eine einzige Verteilung anzunähern. Welche Verteilungen für eine Modellbildung zweckmäßig erscheinen, muss also im Einzelfall geprüft werden. Weitere Details finden sich in [14], S.49ff.

6.2.1. Weibull-Verteilung

Der schwedische Ingenieur W. Weibull entwickelte Anfang der 50er Jahre unter ganz allgemeinen Voraussetzungen die universelle Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{T}\right)^b\right), \tag{6.38}$$

von der er rein empirisch zeigen konnte, dass sie in vielen Fällen eine gute Beschreibung der Eigenschaften von realen Objekten wie Zugfestigkeit von Stahl, Partikelgröße von Flugasche, Reißfestigkeit von Baumwollfasern und Ermüdungslebensdauer eines Stahls darstellt.

Weibull selbst war nie der Ansicht, dass diese Funktion immer gültig sein muss. Dennoch hat sich die Weibull'sche Verteilungsfunktion heute bewährt und ist untrennbar mit der Auswertung von Lebensdaueruntersuchungen verbunden. Dies ist auch auf späteren Arbeiten zurückzuführen, welche die theoretischen Hintergründe der Verteilung als sogenannte Extremwertverteilung zeigen konnten. Diese Hintergründe werden im Folgenden kurz skizziert.

Ein Körper kann gedanklich in n Teile zerlegt werden, mit entsprechenden Lebensdauern t_1, \dots, t_n . Falls eine Serienstruktur der einzelnen Elemente angenommen wird, so ist die Lebensdauer des Körpers gleich der Lebensdauer seines schwächsten Elementes:

$$t = \min(t_1, \dots, t_n).$$

Die Lebensdauer des Körpers t entspricht also der geringsten Ausfallzeit (1. Ranggröße) einer Stichprobe von Umfang n . Wenn das Vorgehen an mehreren Körpern wiederholt wird, so wird die 1. Ranggröße immer unterschiedlich ausfallen – sie wird streuen. Die Verteilung, welche diese Streuung beschreibt wird Extremwertverteilung genannt, da die 1. Ranggröße (so wie die n -te Ranggröße) eine „extreme“ Ranggröße darstellt. Es kann gezeigt werden, dass für $n \rightarrow \infty$ sich als Verteilung immer die Weibull-Verteilung ergibt und zwar unabhängig davon, welche Verteilungsart die Lebensdauern der einzelnen Elemente aufweisen. Insofern beschreibt die Weibull-Verteilung theoretisch fundiert das Ausfallverhalten eines Körpers auf Basis des Prinzips des schwächsten Gliedes.



Bei einigen Ausfallursachen muss erst eine bestimmte Zeit t_0 vergehen, bis sich ein Ausfall aufgrund dieser Ursache sich ereignen kann. Beispiele sind Verschleiß (z.B. Bürstenverschleiß bei Elektromotoren) und Korrosion. Als Modell zur statistischen Beschreibung dieser Phänomene dient die drei-parametrische Weibull-Verteilung, welche nach einer Transformation $t \rightarrow t - t_0$ erhalten wird.

Der Erwartungswert (Mittelwert, MTTF) der Weibull-Verteilung ist definiert als

$$E(t) = \text{MTTF} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} T \cdot x^{\frac{1}{b}} \cdot e^{-x} dx = T \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right), \quad (6.39)$$

wobei mit $\Gamma(\cdot)$ die sogenannte Gammafunktion bezeichnet wurde. Es soll an dieser Stelle betont werden, dass der MTTF-Wert (oder Mittelwert) einer wie im Falle Weibull unsymmetrischen Verteilung *nicht* mit dem 50%-Quantil t_{50} (dem Median) identisch ist. Der Zusammenhang zwischen t_q und MTTF kann wie im Folgenden dargestellt angegeben werden. Unter der Voraussetzung, dass die Lebensdauer weibullverteilt ist, gilt für die Zeit t_q , bis zu der der Anteil q einer Grundgesamtheit gleichartiger Erzeugnisse ausgefallen ist:

$$F(t_q) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t_q}{T}\right)^b\right) = \frac{q}{100}, \text{ mit } 0 \leq q \leq 100. \quad (6.40)$$

Folglich ist

$$t_q = T \left[-\ln\left(1 - \frac{q}{100}\right) \right]^{\frac{1}{b}}. \text{ Mit } T = \frac{\text{MTTF}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)} \text{ folgt daraus:} \quad (6.41)$$

$$t_q = \text{MTTF} \frac{\left[-\ln\left(1 - \frac{q}{100}\right) \right]^{\frac{1}{b}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)}. \quad (6.42)$$

Tabelle 6 zeigt einige im Zusammenhang mit der Weibull-Theorie grundlegende Zusammenhänge. Bild 48 zeigt die graphischen Darstellungen der Dichtefunktion, der Verteilungsfunktion und der Ausfallrate. Es ist ersichtlich, dass das „Aussehen“ der Weibull-Verteilung in Abhängigkeit vom Wert der Ausfallsteilheit b stark variiert.

Weibull-Wahrscheinlichkeitspapier

Das Weibull-Wahrscheinlichkeitspapier ist ein Diagramm zur Darstellung von Summenausfallhäufigkeiten über der logarithmierten Ausfallzeit, Bild 49. Die y-Achse ist in diesem Diagramm so gewählt, dass bei der Darstellung einer Weibull-Verteilung eine Gerade entsteht. Durch zweifaches Logarithmieren der Verteilungsfunktion ergibt sich:

$$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right) = b \cdot \ln(t) - b \cdot \ln(T), \quad (6.43)$$

was einer Geradengleichung bezüglich der unabhängigen Variable $\ln(t)$ mit Steigung b und Achsenabschnitt $-b \cdot \ln(T)$ entspricht. Damit kann ein gegebener Datensatz mit Ausfallzeiten von Prüfobjekten graphisch auf Weibull-Verteilung geprüft werden. Liegt die eingetragene Punktefolge näherungsweise auf einer Geraden, so kann man daraus schließen, dass die Werte näherungsweise weibullverteilt sind. Anhand der Darstellung können Schätzwerte für die Parameter b und T bestimmt werden, siehe dazu Kap. 4.3.2.



zwei-parametrische Weibull-Verteilung

$f(t) = \frac{b}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{T}\right)^b\right)$	Ausfalldichtefunktion. $f(t)dt$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Einheit im Zeitintervall $(t, t+dt]$ ausfällt.
$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{T}\right)^b\right)$	Ausfallwahrscheinlichkeitsfunktion. Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Einheit bis zu Zeit t ausfällt.
$R(t) = 1 - F(t)$	Zuverlässigkeitsfunktion. Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Einheit die Zeit t überlebt (Überlebenswahrscheinlichkeit).
$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{b}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{b-1}$	Ausfallrate. $\lambda(t)dt$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Einheit des Restbestands, der bis zum Zeitpunkt t überlebt hat, im Zeitintervall $(t, t+dt]$ ausfällt.
$E(t) = \text{MTTF} = T \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)$	Erwartungswert (Mittelwert).
$t_q = \text{MTTF} \frac{\left[-\ln\left(1 - \frac{q}{100}\right)\right]^{\frac{1}{b}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)}$	q -Quantil der Verteilung. Median der Verteilung für $q = 50$

drei-parametrische Weibull-Verteilung

$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^b\right)$	Ausfallwahrscheinlichkeitsfunktion
$f(t) = \frac{b}{T-t_0} \left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^b\right)$	Ausfalldichtefunktion
$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{b}{T-t_0} \left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^{b-1}$	Ausfallrate

Parameter der Weibull-Verteilung

t	Lebensdauerparameter
b	Formparameter bzw. Weibull-Exponent. Bestimmt die Steigung der Geraden im Weibull-Netz (dies erklärt die Bezeichnung „Ausfallsteilheit“) und ist charakteristisch für die Art des Ausfalls.
T	Lageparameter bzw. charakteristische Lebensdauer. Gibt die Zeit an, bis zu der ca. 63,2% der Erzeugnisse einer Grundgesamtheit ausgefallen sind, da $F(T) = 0,632$. Bestimmt die relative Lage der Ausfallwahrscheinlichkeitsfunktion bezüglich der t -Achse
t_0	Ausfallfreie Zeit

Tabelle 6: Parameter und Kennwerte der Weibull-Verteilung.



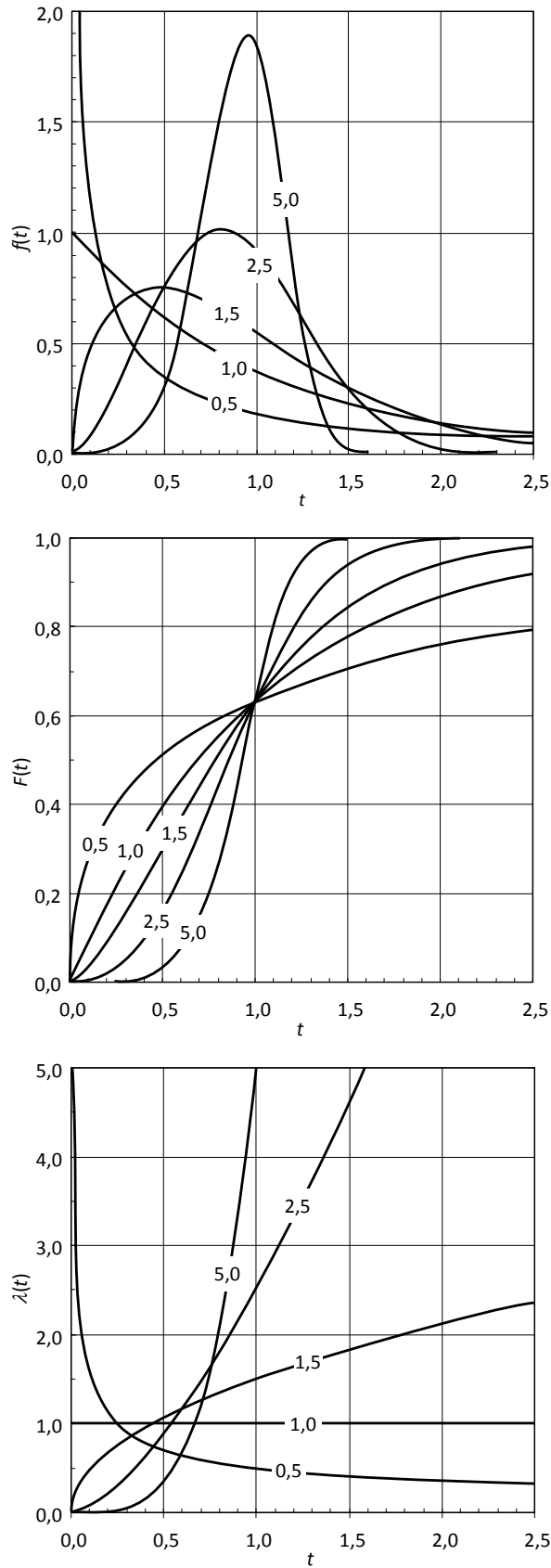


Bild 48: Graphische Darstellung der Dichtefunktion (oben), Verteilungsfunktion (Mitte) und der Ausfallrate der Weibull-Verteilung (unten) in Abhängigkeit des Formparameters b .



2020-04-06 - SOCOS

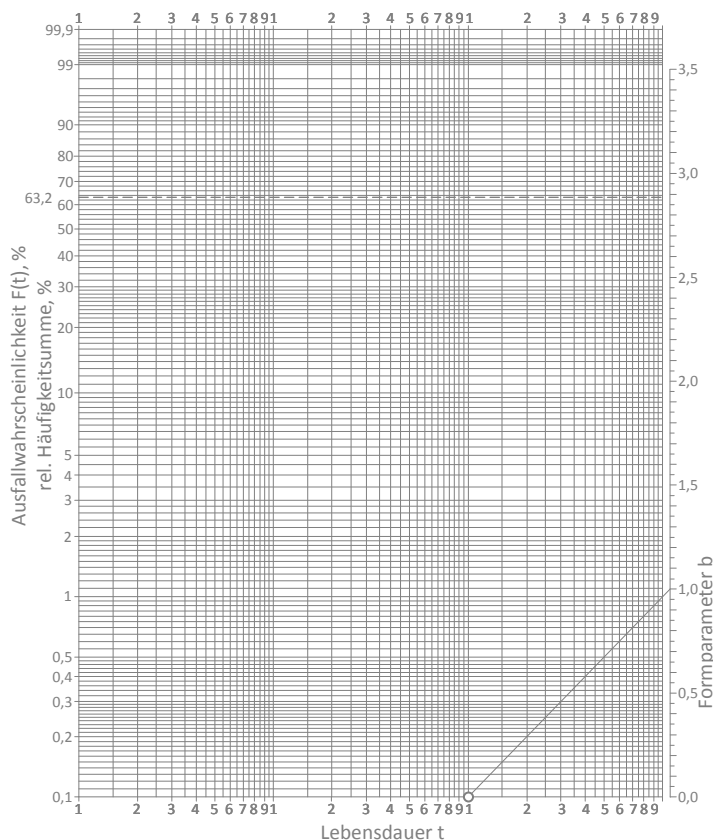


Bild 49: Weibull - Wahrscheinlichkeitspapier

6.2.2. Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist ein Verteilungsmodell zur Beschreibung von Zufallsausfällen, das beispielsweise bei elektronischen Komponenten häufig zugrundegelegt werden kann. Diese Verteilung ergibt sich als Spezialfall der Weibull-Verteilung mit Formparameter $b = 1$. Ihre Verteilungsfunktion lautet

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t), \tag{6.44}$$

wobei mit λ der Parameter der Verteilung bezeichnet wurde. Die Verteilungsdichtefunktion ergibt sich nach Ableitung der Verteilungsfunktion nach t :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda \cdot \exp(-\lambda t). \tag{6.45}$$

Die Ausfallrate von exponentialverteilten Ausfällen ist

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\lambda \exp(-\lambda t)}{\exp(-\lambda t)} = \lambda. \tag{6.46}$$

Der Parameter der Verteilung ist somit gleich der (konstanten) Ausfallrate, so dass die Bezeichnung λ sinnvoll erscheint.

Die Exponentialverteilung hat sich hervorragend bewährt zur Beschreibung radioaktiver Zerfälle (Altersbestimmung durch ^{14}C -Methode). Die Gültigkeit des Zerfallsgesetzes ist in unzähligen physikalischen Experimenten immer wieder bestätigt worden. Im Zusammenhang mit Lebensdaueruntersuchungen kann die Exponentialverteilung dagegen nur in einem begrenzten Zeitraum Gültigkeit haben (im Bereich II der „Badewannenkurve“), da jedes technische Erzeugnis nach genügend langer Zeit durch Verschleiß, Alterung, Ermüdung ausfallen wird (die Ausfallrate λ wird dann zeitabhängig).



Bei der Auswertung eines Datensatzes im Weibull-Netz wird sich praktisch nie exakt der Wert $b = 1$ ergeben. Für praktische Anwendungen kann auch im Falle $0,8 \leq b \leq 1,2$ von „Zufallsausfällen“ ausgegangen werden.

Im Rahmen der Prüfung elektronischer Bauelemente und Komponenten wird meist eine feste Anzahl n von Prüflingen sowie eine feste Prüfzeit t vorgegeben und die Anzahl k der bis zu diesem Zeitpunkt ausgefallenen Einheiten bestimmt (die einzelnen Ausfallzeiten sind unbekannt und ausgefallene Einheiten werden nicht ersetzt). Ein Schätzwert für λ ist dann:

$$\lambda \approx -\frac{1}{t} \cdot \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right). \tag{6.47}$$

Zur Schätzung von λ bei anderen Prüf- und Auswertebedingungen (z.B. fest vorgegebene Anzahl von Ausfällen, Typ-II-Zensorisierung) siehe Kapitel 4.3.2.2.

Der Erwartungswert der Exponentialverteilung (Weibull-Verteilung mit $b = 1$) ist:

$$E(t) = \text{MTTF} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t \cdot \exp(-\lambda t) dt = -\frac{\exp(-\lambda t)}{\lambda} (\lambda t + 1) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \tag{6.48}$$

Wie auch bei der Weibull-Verteilung, ist es auch bei der Exponentialverteilung sinnvoll, den Zusammenhang zwischen t_q und MTTF zu ermitteln. t_q ist die Zeit, bis zu der der Anteil q einer Grundgesamtheit gleichartiger Erzeugnisse ausgefallen ist:

$$F(t_q) = 1 - \exp(-\lambda t_q) = \frac{q}{100}, \text{ mit } 0 \leq q \leq 100. \tag{6.49}$$

Daraus folgt, dass

$$\ln\left(1 - \frac{q}{100}\right) = -\lambda t_q \text{ und mit } \text{MTTF} = \frac{1}{\lambda} \text{ ergibt sich} \tag{6.50}$$

$$t_q = -\text{MTTF} \cdot \ln\left(1 - \frac{q}{100}\right). \tag{6.51}$$

Die nachstehende Tabelle zeigt einige grundlegende Zusammenhänge.

Exponentialverteilung	
$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$	Ausfalldichtefunktion
$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$	Ausfallwahrscheinlichkeitsfunktion
$\lambda(t) = \lambda$	Ausfallrate
$E(t) = \text{MTTF} = 1/\lambda$	Erwartungswert (Mittelwert) der Verteilung
$\text{Var}(t) = 1/\lambda^2$	Varianz der Verteilung
$t_q = -\text{MTTF} \cdot \ln\left(1 - \frac{q}{100}\right)$	q -Quantil der Verteilung. Median der Verteilung für $q = 50\%$.
Parameter der Normalverteilung	
t	Lebensdauerparameter
λ	Form- und Lageparameter, $\lambda = 1/E(t)$

Tabelle 7: Parameter und Kennwerte der Exponentialverteilung.



6.2.3. Normalverteilung

Wenn von einer Normalverteilung die Rede ist, assoziiert man diesen Begriff meist mit der Gaußschen Glockenkurve. Die Gaußsche Glockenkurve ist eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung, Bild 50:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right). \quad (6.52)$$

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung gibt zu jedem Wert t die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen $-\infty$ und t annimmt. Man erhält sie, indem man über die oben angegebene Dichtefunktion integriert, Bild 50:

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dv. \quad (6.53)$$

$F(t)$ entspricht der Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve bis zum Wert t . Die Gesamtfläche unter der Glockenkurve hat den Wert eins.

Die besondere Bedeutung der Normalverteilung in der Statistik ist durch den zentralen Grenzwertsatz begründet. Etwas frei formuliert besagt er, dass durch das zufällige Zusammenwirken (Addition) vieler unabhängiger Zufallsvariablen sich eine resultierende Zufallsvariable ergibt, die näherungsweise normalverteilt ist.

Die Normalverteilung ist durch die beiden Parameter μ und σ eindeutig festgelegt. Der erste bestimmt die Lage der Verteilung auf der Merkmals-Achse, der zweite bestimmt ihre Breite, Bild 50. Der Umgang mit der Normalverteilung ist u.a. deswegen so einfach, da diese Parameter identisch sind entsprechend zum Erwartungswert (Mittelwert) bzw. zur Standardabweichung der Verteilung.

Eine normalverteilte Zufallsgröße X mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ wird durch die Transformation

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (6.54)$$

in eine ebenfalls normalverteilte Zufallsgröße U überführt. Der Mittelwert von U ist Null, ihre Standardabweichung ist Eins. Die spezielle Normalverteilung $N(0,1)$ heißt Standardnormalverteilung.

Die Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\Phi(u)$ sind in Kap. 6.3.1 tabellarisch vorgegeben. Mit Hilfe der tabellierten Standardnormalverteilung können beispielsweise Überschreitungsanteile einer beliebigen Normalverteilung bezüglich vorgegebener Grenzwerte berechnet werden.

Die Normalverteilung spielt bei Zuverlässigkeitsbetrachtungen nur indirekt eine Rolle. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass hier ein Merkmal einen bestimmten Grenzwert nicht unter- (z.B. Rautiefe, Exzentrizität, Rundheit) bzw. überschreiten kann (z.B. Fördermenge, Härte). Beispielsweise kann eine Belastung oder eine Belastbarkeit (entsprechendes gilt auch für die Beanspruchung und Beanspruchbarkeit) lediglich Werte größer Null annehmen.

Tabelle 8 zeigt einige grundlegende Zusammenhänge.



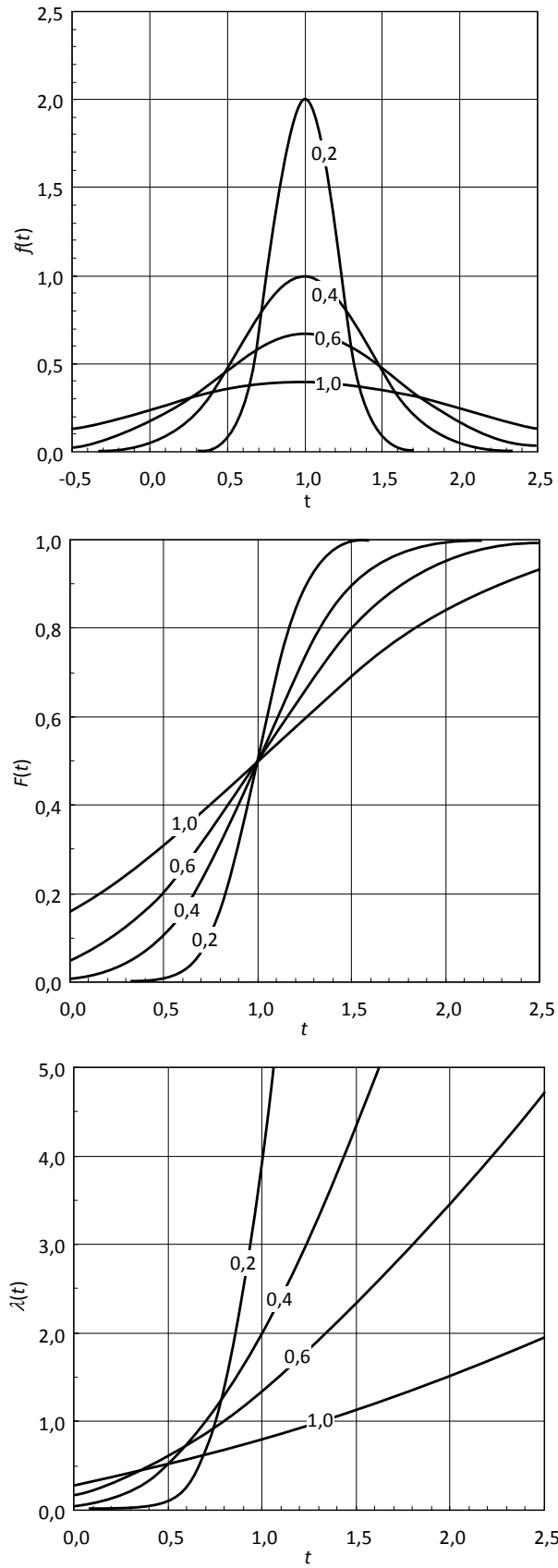


Bild 50: Graphische Darstellung der Dichtefunktion (oben), Verteilungsfunktion (Mitte) und der Ausfallrate der Normalverteilung (unten) in Abhängigkeit des Streuparameters σ , bei $\mu = 1$.



Normalverteilung	
$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	Ausfalldichtefunktion
$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dv$	Ausfallwahrscheinlichkeitsfunktion
$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$	Ausfallrate (nicht weiter zu vereinfachen)
$E(t) = \text{MTTF} = \mu$	Erwartungswert (Mittelwert) der Verteilung
$\text{Var}(t) = \sigma^2$	Varianz der Verteilung
$t_{50} = \mu$	Median der Verteilung (50%-Ausfallwahrscheinlichkeit)
Parameter der Normalverteilung	
t	Lebensdauerparameter
μ	Lageparameter, $\mu = E(t)$
σ	Formparameter, $\sigma^2 = \text{Var}(t)$

Tabelle 8: Parameter und Kennwerte der Normalverteilung.

6.2.4. Lognormalverteilung

Um aus den Vorteilen der Normalverteilung wie bekannte Eigenschaften, relativ einfache Darstellung usw. auch im Kontext der Zuverlässigkeit Gebrauch zu machen, kann folgendes Vorgehen benutzt werden: Logarithmiert man die Werte einer unsymmetrisch verteilten Zufallsvariable wie die Lebensdauer, so sind diese logarithmierten Werte annähernd normalverteilt. Das Logarithmieren überführt den Zahlenbereich zwischen 0 und 1 in den Bereich $-\infty$ bis 0, der linke Teil der Verteilung wird also stark gestreckt, der rechte Teil stark gestaucht.

Eine stetige Zufallsvariable X heißt logarithmisch normalverteilt (lognormalverteilt), wenn $\ln(X)$ normalverteilt ist. Die Dichtefunktion der Lognormalverteilung ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{t\zeta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t)-\eta}{\zeta}\right)^2\right), \tag{6.55}$$

deren Verteilungsfunktion ergibt sich entsprechend zu

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{v\zeta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(v)-\eta}{\zeta}\right)^2\right) dv. \tag{6.56}$$

Die Verteilungsfunktion kann analytisch nicht weiter vereinfacht werden. Einige Beispiele für Dichte- und Verteilungsfunktion der Lognormalverteilung finden sich in Bild 51.

Im Gegensatz zur Normalverteilung kann mit der Lognormalverteilung sehr unterschiedliches Ausfallverhalten gut beschrieben werden, so wie mit der Weibull-Verteilung. Außerdem können alle Erkenntnisse und Verfahren der Normalverteilung einfach auf der Lognormalverteilung übertragen werden. Ein wesentlicher Nachteil besteht jedoch darin, dass die Ausfallrate der Lognormalverteilung mit steigender Lebensdauer zunächst ansteigt, nach Erreichung eines Maximums wieder abfällt und für sehr große Lebensdauern gegen Null strebt. Die monoton ansteigende Ausfallrate von Ermüdungs- und Verschleißausfällen kann damit nur bedingt korrekt beschrieben werden.

Während bei einem additiven Zusammenwirken von vielen Einflussfaktoren sich eine resultierende Zufallsvariable als normalverteilt ergibt, sind bei der Lognormalverteilung die Zufallsfaktoren



multiplikativ verknüpft, sie sind also proportional voneinander abhängig. Falls angenommen wird, dass ein Bruch stufenweise entsteht und der Risszuwachs auf jeder Stufe als eine Zufallsvariable angesehen wird, die der erreichten Risslänge proportional ist, ergibt sich mit dem zentralen Grenzwertsatz die Lognormalverteilung als Modell zur Beschreibung eines solchen Ausfallverhaltens, [1], S.58. Dies stellt eine theoretische Begründung für die Verwendung der Lognormalverteilung im Umfeld der Zuverlässigkeit dar.

Die nachstehende Tabelle 9 zeigt einige grundlegende Zusammenhänge. Als Basis für den Logarithmus kann außer e auch 10 benutzt werden, dies ist insbesondere im Bereich Festigkeit üblich. In diesem Fall sind jeweils die Ausdrücke $\ln(\cdot)$ durch $\lg(\cdot)$ und $\exp(\cdot)$ durch $10^{(\cdot)}$ zu ersetzen.

Lognormalverteilung	
$f(t) = \frac{1}{t\zeta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t)-\eta}{\zeta}\right)^2\right)$	Ausfalldichtefunktion
$F(t) = \int_0^t \frac{1}{v\zeta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(v)-\eta}{\zeta}\right)^2\right) dv$	Ausfallwahrscheinlichkeitsfunktion
$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$	Ausfallrate (nicht weiter zu vereinfachen)
$E(t) = \text{MTTF} = \exp\left(\eta + \frac{\zeta^2}{2}\right)$	Erwartungswert (Mittelwert) der Verteilung
$\text{Var}(t) = \exp(2\eta + \zeta^2)(\exp(\zeta^2) - 1)$	Varianz der Verteilung
$t_{50} = \exp(\eta)$	Median der Verteilung (50%-Ausfallwahrscheinlichkeit)
Parameter der Lognormalverteilung	
t	Lebensdauerparameter
η	Lageparameter, $\eta = \ln(E(t)) - \frac{\zeta^2}{2}$
ζ	Formparameter, $\zeta^2 = \ln\left(\frac{\text{Var}(t)}{E^2(t)} + 1\right)$

Tabelle 9: Parameter und Kennwerte der Lognormalverteilung.



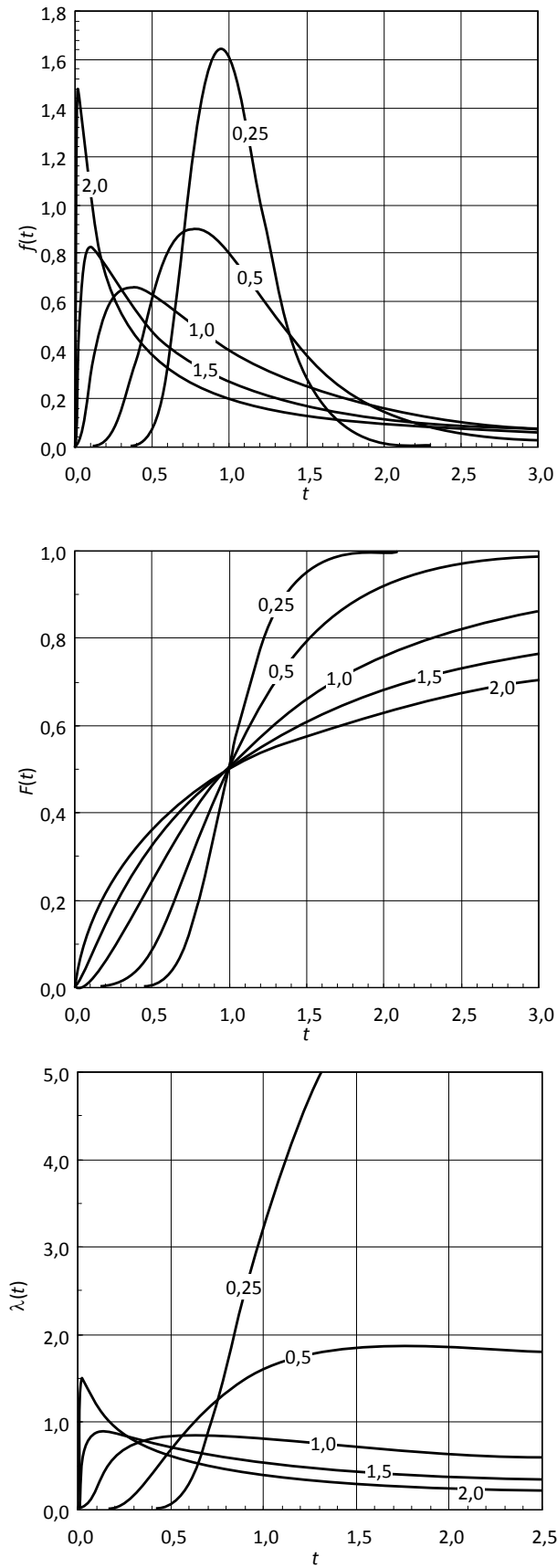


Bild 51: Graphische Darstellung der Dichtefunktion (oben), Verteilungsfunktion (Mitte) und der Ausfallrate der Lognormalverteilung (unten) in Abhängigkeit des Streuparameters ζ , bei $\eta = 0$.



6.2.5. Mischverteilung

Eine Mischverteilung von Ausfallzeiten entsteht, wenn Erzeugnisse zu einer Grundgesamtheit zusammengefasst werden, die unterschiedlichen Ausfallmechanismen unterliegen, z.B. wegen unterschiedlicher Fertigungsbedingungen oder Materialchargen. Dies bedeutet, dass beispielsweise die 1. Gruppe nur aufgrund Ursache A und die 2. Gruppe nur aufgrund Ursache B ausfällt. Im Weibull'schen Modell entsprechen diesen beiden Ausfallmechanismen unterschiedliche Formparameter b_1 und b_2 und/oder unterschiedliche charakteristische Lebensdauern T_1 und T_2 .

Bei Auftragung einer solchen Mischverteilung im Weibull-Netz ergibt sich demzufolge i.a. keine Gerade sondern meist eine nach oben gekrümmte Kurve. Sofern die Ausfallursache für jedes Teil festgestellt werden kann, ist es möglich, nach entsprechender Trennung der Daten beider Gruppen eine separate Weibull-Analyse vorzunehmen.

Mischt man zwei Grundgesamtheiten vom Umfang n_1 bzw. n_2 deren Verteilungsfunktionen $F_1(t)$ bzw. $F_2(t)$ sind, so ergibt sich als Verteilungsfunktion der Mischung (mit $n = n_1 + n_2$) nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$F(t) = \frac{n_1}{n} \cdot F_1(t) + \frac{n_2}{n} \cdot F_2(t). \quad (6.57)$$

Allgemein gilt:

$$F(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot F_i(t), \text{ mit } n = \sum_{i=1}^k n_i. \quad (6.58)$$

Bezogen auf die Dichtefunktionen (relative Häufigkeiten) ist analog dazu:

$$f(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot f_i(t). \quad (6.59)$$

Eine andere Situation liegt vor, wenn ein individuelles Erzeugnis aus unterschiedlichen Gründen ausfallen *kann*, ohne dass die Eintretenswahrscheinlichkeit der einzelnen Ausfallursachen bekannt ist. Man spricht in diesem Fall von konkurrierenden Ausfallmechanismen. Die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ eines Teils ist dann gleich dem Produkt der Überlebenswahrscheinlichkeiten bzgl. der einzelnen k Ausfallursachen:

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdots R_k(t). \quad (6.60)$$

Die Weibull-Analyse eines Datensatzes, dem nicht unterscheidbare konkurrierende Ausfallmechanismen zugrundeliegen (die also nicht durch Untersuchung der Teile unterscheidbar sind), ist nur in Einzelfällen mit Rechnerhilfe möglich.



6.3. Tabellen

6.3.1. Standardnormalverteilung

Verteilungsfunktion $F(u_0)$ der Standardnormalverteilung nach Gl. (3.12)

u_0	+0,01	+0,02	+0,03	+0,04	+0,05	+0,06	+0,07	+0,08	+0,09
0,0	0,5039894	0,5079783	0,5119665	0,5159534	0,5199388	0,5239222	0,5279032	0,5318814	0,5358564
0,1	0,5437953	0,5477584	0,5517168	0,5556700	0,5596177	0,5635595	0,5674949	0,5714237	0,5753454
0,2	0,5831662	0,5870644	0,5909541	0,5948349	0,5987063	0,6025681	0,6064199	0,6102612	0,6140919
0,3	0,6217195	0,6255158	0,6293000	0,6330717	0,6368307	0,6405764	0,6443088	0,6480273	0,6517317
0,4	0,6590970	0,6627573	0,6664022	0,6700314	0,6736448	0,6772419	0,6808225	0,6843863	0,6879331
0,5	0,6949743	0,6984682	0,7019440	0,7054015	0,7088403	0,7122603	0,7156612	0,7190427	0,7224047
0,6	0,7290691	0,7323711	0,7356527	0,7389137	0,7421539	0,7453731	0,7485711	0,7517478	0,7549029
0,7	0,7611479	0,7642375	0,7673049	0,7703500	0,7733726	0,7763727	0,7793501	0,7823046	0,7852361
0,8	0,7910299	0,7938919	0,7967306	0,7995458	0,8023375	0,8051055	0,8078498	0,8105703	0,8132671
0,9	0,8185887	0,8212136	0,8238145	0,8263912	0,8289439	0,8314724	0,8339768	0,8364569	0,8389129
1,0	0,8437524	0,8461358	0,8484950	0,8508300	0,8531409	0,8554277	0,8576903	0,8599289	0,8621434
1,1	0,8665005	0,8686431	0,8707619	0,8728568	0,8749281	0,8769756	0,8789995	0,8809999	0,8829768
1,2	0,8868606	0,8887676	0,8906514	0,8925123	0,8943502	0,8961653	0,8979577	0,8997274	0,9014747
1,3	0,9049021	0,9065825	0,9082409	0,9098773	0,9114920	0,9130850	0,9146565	0,9162067	0,9177356
1,4	0,9207302	0,9221962	0,9236415	0,9250663	0,9264707	0,9278550	0,9292191	0,9305634	0,9318879
1,5	0,9344783	0,9357445	0,9369916	0,9382198	0,9394292	0,9406201	0,9417924	0,9429466	0,9440826
1,6	0,9463011	0,9473839	0,9484493	0,9494974	0,9505285	0,9515428	0,9525403	0,9535213	0,9544860
1,7	0,9563671	0,9572838	0,9581849	0,9590705	0,9599408	0,9607961	0,9616364	0,9624620	0,9632730
1,8	0,9648521	0,9656205	0,9663750	0,9671159	0,9678432	0,9685572	0,9692581	0,9699460	0,9706210
1,9	0,9719334	0,9725711	0,9731966	0,9738102	0,9744119	0,9750021	0,9755808	0,9761482	0,9767045
2,0	0,9777844	0,9783083	0,9788217	0,9793248	0,9798178	0,9803007	0,9807738	0,9812372	0,9816911
2,1	0,9825708	0,9829970	0,9834142	0,9838226	0,9842224	0,9846137	0,9849966	0,9853713	0,9857379
2,2	0,9864474	0,9867906	0,9871263	0,9874545	0,9877755	0,9880894	0,9883962	0,9886962	0,9889893
2,3	0,9895559	0,9898296	0,9900969	0,9903581	0,9906133	0,9908625	0,9911060	0,9913437	0,9915758
2,4	0,9920237	0,9922397	0,9924506	0,9926564	0,9928572	0,9930531	0,9932443	0,9934309	0,9936128
2,5	0,9939634	0,9941323	0,9942969	0,9944574	0,9946139	0,9947664	0,9949151	0,9950600	0,9952012
2,6	0,9954729	0,9956035	0,9957308	0,9958547	0,9959754	0,9960930	0,9962074	0,9963189	0,9964274
2,7	0,9966358	0,9967359	0,9968333	0,9969280	0,9970202	0,9971099	0,9971972	0,9972821	0,9973646
2,8	0,9975229	0,9975988	0,9976726	0,9977443	0,9978140	0,9978818	0,9979476	0,9980116	0,9980738
2,9	0,9981929	0,9982498	0,9983052	0,9983589	0,9984111	0,9984618	0,9985110	0,9985588	0,9986051
3,0	0,9986938	0,9987361	0,9987772	0,9988171	0,9988558	0,9988933	0,9989297	0,9989650	0,9989992
3,1	0,9990646	0,9990957	0,9991260	0,9991553	0,9991836	0,9992112	0,9992378	0,9992636	0,9992886
3,2	0,9993363	0,9993590	0,9993810	0,9994024	0,9994230	0,9994429	0,9994623	0,9994810	0,9994991
3,3	0,9995335	0,9995499	0,9995658	0,9995811	0,9995959	0,9996103	0,9996242	0,9996376	0,9996505
3,4	0,9996752	0,9996869	0,9996982	0,9997091	0,9997197	0,9997299	0,9997398	0,9997493	0,9997585
3,5	0,9997759	0,9997842	0,9997922	0,9997999	0,9998074	0,9998146	0,9998215	0,9998282	0,9998347
3,6	0,9998469	0,9998527	0,9998583	0,9998637	0,9998689	0,9998739	0,9998787	0,9998834	0,9998879
3,7	0,9998964	0,9999004	0,9999043	0,9999080	0,9999116	0,9999150	0,9999184	0,9999216	0,9999247
3,8	0,9999305	0,9999333	0,9999359	0,9999385	0,9999409	0,9999433	0,9999456	0,9999478	0,9999499
3,9	0,9999539	0,9999557	0,9999575	0,9999593	0,9999609	0,9999625	0,9999641	0,9999655	0,9999670
4,0	0,9999696	0,9999709	0,9999721	0,9999733	0,9999744	0,9999755	0,9999765	0,9999775	0,9999784
4,1	0,9999802	0,9999811	0,9999819	0,9999826	0,9999834	0,9999841	0,9999848	0,9999854	0,9999861
4,2	0,9999872	0,9999878	0,9999883	0,9999888	0,9999893	0,9999898	0,9999902	0,9999907	0,9999911
4,3	0,9999918	0,9999922	0,9999925	0,9999929	0,9999932	0,9999935	0,9999938	0,9999941	0,9999943
4,4	0,9999948	0,9999951	0,9999953	0,9999955	0,9999957	0,9999959	0,9999961	0,9999963	0,9999964
4,5	0,9999968	0,9999969	0,9999971	0,9999972	0,9999973	0,9999974	0,9999976	0,9999977	0,9999978
4,6	0,9999980	0,9999981	0,9999982	0,9999983	0,9999983	0,9999984	0,9999985	0,9999986	0,9999986
4,7	0,9999988	0,9999988	0,9999989	0,9999989	0,9999990	0,9999990	0,9999991	0,9999991	0,9999992



6.3.2. t - Verteilung

$\alpha / 2$ - Quantil der t - Verteilung mit Freiheitsgrad f (zweiseitig) nach Gl. (6.31)

	$\alpha=0,05$	0,01	0,001
$f=1$	12,71	63,66	636,62
2	4,30	9,92	31,60
3	3,18	5,84	12,92
4	2,78	4,60	8,61
5	2,57	4,03	6,87
6	2,45	3,71	5,96
7	2,36	3,50	5,41
8	2,31	3,36	5,04
9	2,26	3,25	4,78
10	2,23	3,17	4,59
11	2,20	3,11	4,44
12	2,18	3,05	4,32
13	2,16	3,01	4,22
14	2,14	2,98	4,14
15	2,13	2,95	4,07
16	2,12	2,92	4,01
17	2,11	2,90	3,97
18	2,10	2,88	3,92
19	2,09	2,86	3,88
20	2,09	2,85	3,85
25	2,06	2,79	3,73
30	2,04	2,75	3,65
35	2,03	2,72	3,59
40	2,02	2,70	3,55
45	2,01	2,69	3,52
50	2,01	2,68	3,50
100	1,98	2,63	3,39
200	1,97	2,60	3,34
300	1,97	2,59	3,32
400	1,97	2,59	3,32
500	1,96	2,59	3,31
100000	1,96	2,58	3,29



6.3.3. Median-Werte der Ausfallwahrscheinlichkeit

Werte für $F_{BB,1-\alpha}$ für $\alpha = 50\%$, Rang i und Stichprobenumfang n nach Gl. (6.35)

	$n=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i=1$	0,500000	0,292893	0,206299	0,159104	0,129449	0,109101	0,094276	0,082996	0,074125	0,066967
2		0,707107	0,500000	0,385728	0,313810	0,264450	0,228490	0,201131	0,179620	0,162263
3			0,793701	0,614272	0,500000	0,421407	0,364116	0,320519	0,286237	0,258575
4				0,840896	0,686190	0,578593	0,500000	0,440155	0,393085	0,355100
5					0,870551	0,735550	0,635884	0,559845	0,500000	0,451694
6						0,890899	0,771510	0,679481	0,606915	0,548306
7							0,905724	0,798869	0,713763	0,644900
8								0,917004	0,820380	0,741425
9									0,925875	0,837737
10										0,933033

	$n=11$	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$i=1$	0,061069	0,056126	0,051922	0,048305	0,045158	0,042397	0,039953	0,037776	0,035824	0,034064
2	0,147963	0,135979	0,125791	0,117022	0,109396	0,102703	0,096782	0,091506	0,086775	0,082510
3	0,235786	0,216686	0,200449	0,186474	0,174321	0,163654	0,154218	0,145810	0,138271	0,131474
4	0,323804	0,297576	0,275276	0,256084	0,239393	0,224745	0,211785	0,200238	0,189885	0,180550
5	0,411890	0,378529	0,350163	0,325751	0,304520	0,285886	0,269400	0,254712	0,241543	0,229668
6	0,500000	0,459507	0,425077	0,395443	0,369670	0,347050	0,327038	0,309207	0,293220	0,278805
7	0,588110	0,540493	0,500000	0,465147	0,434833	0,408227	0,384687	0,363714	0,344909	0,327952
8	0,676196	0,621471	0,574923	0,534853	0,500000	0,469408	0,442342	0,418226	0,396603	0,377105
9	0,764214	0,702424	0,649837	0,604557	0,565167	0,530592	0,500000	0,472742	0,448301	0,426262
10	0,852037	0,783314	0,724724	0,674249	0,630330	0,591773	0,557658	0,527258	0,500000	0,475420
11	0,938931	0,864021	0,799551	0,743916	0,695480	0,652950	0,615313	0,581774	0,551699	0,524580
12		0,943874	0,874209	0,813526	0,760607	0,714114	0,672962	0,636286	0,603397	0,573738
13			0,948078	0,882978	0,825679	0,775255	0,730600	0,690793	0,655091	0,622895
14				0,951695	0,890604	0,836346	0,788215	0,745288	0,706780	0,672048
15					0,954842	0,897297	0,845782	0,799762	0,758457	0,721195
16						0,957603	0,903218	0,854190	0,810115	0,770332
17							0,960047	0,908494	0,861729	0,819450
18								0,962224	0,913225	0,868526
19									0,964176	0,917490
20										0,965936



Fortsetzung: Werte für $F_{BB,1-\alpha}$ für $\alpha = 50\%$, Rang i und Stichprobenumfang n nach Gl. (6.35)

	$n=21$	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$i=1$	0,032468	0,031016	0,029687	0,028468	0,027345	0,026307	0,025345	0,024451	0,023618	0,022840
2	0,078644	0,075124	0,071906	0,068952	0,066231	0,063717	0,061386	0,059221	0,057202	0,055317
3	0,125313	0,119704	0,114576	0,109868	0,105533	0,101526	0,097813	0,094361	0,091145	0,088141
4	0,172090	0,164386	0,157343	0,150879	0,144925	0,139422	0,134323	0,129583	0,125166	0,121041
5	0,218905	0,209107	0,200147	0,191924	0,184350	0,177351	0,170864	0,164834	0,159216	0,153968
6	0,265740	0,253844	0,242968	0,232986	0,223791	0,215294	0,207419	0,200100	0,193279	0,186909
7	0,312584	0,298592	0,285798	0,274056	0,263241	0,253246	0,243983	0,235373	0,227350	0,219857
8	0,359434	0,343345	0,328634	0,315132	0,302695	0,291203	0,280551	0,270651	0,261426	0,252809
9	0,406288	0,388102	0,371473	0,356211	0,342153	0,329163	0,317123	0,305932	0,295504	0,285764
10	0,453143	0,432860	0,414315	0,397292	0,381614	0,367125	0,353696	0,341215	0,329585	0,318721
11	0,500000	0,477620	0,457157	0,438375	0,421075	0,405088	0,390271	0,376500	0,363667	0,351680
12	0,546857	0,522380	0,500000	0,479458	0,460537	0,443053	0,426847	0,411785	0,397749	0,384639
13	0,593712	0,567140	0,542843	0,520542	0,500000	0,481018	0,463423	0,447071	0,431833	0,417599
14	0,640566	0,611898	0,585685	0,561625	0,539463	0,518982	0,500000	0,482357	0,465916	0,450559
15	0,687416	0,656655	0,628527	0,602708	0,578925	0,556947	0,536577	0,517643	0,500000	0,483520
16	0,734260	0,701408	0,671366	0,643789	0,618386	0,594912	0,573153	0,552929	0,534084	0,516480
17	0,781095	0,746156	0,714202	0,684868	0,657847	0,632875	0,609729	0,588215	0,568167	0,549441
18	0,827910	0,790893	0,757032	0,725944	0,697305	0,670837	0,646304	0,623500	0,602251	0,582401
19	0,874687	0,835614	0,799853	0,767014	0,736759	0,708797	0,682877	0,658785	0,636333	0,615361
20	0,921356	0,880296	0,842657	0,808076	0,776209	0,746754	0,719449	0,694068	0,670415	0,648320
21	0,967532	0,924876	0,885424	0,849121	0,815650	0,784706	0,756017	0,729349	0,704496	0,681279
22		0,968984	0,928094	0,890132	0,855075	0,822649	0,792581	0,764627	0,738574	0,714236
23			0,970313	0,931048	0,894467	0,860578	0,829136	0,799900	0,772650	0,747191
24				0,971532	0,933769	0,898474	0,865677	0,835166	0,806721	0,780143
25					0,972655	0,936283	0,902187	0,870417	0,840784	0,813091
26						0,973693	0,938614	0,905639	0,874834	0,846032
27							0,974655	0,940779	0,908855	0,878959
28								0,975549	0,942798	0,911859
29									0,976382	0,944683
30										0,977160



6.3.4. Vertrauensgrenzen der Ausfallwahrscheinlichkeit

Werte für $F_{BB,1-\alpha}$ für $\alpha = 5\%$ (einseitig), Rang i und Stichprobenumfang n nach Gl. (6.35)

	$n=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i=1$	0,950000	0,776393	0,631597	0,527129	0,450720	0,393038	0,348164	0,312344	0,283129	0,258866
2		0,974679	0,864650	0,751395	0,657408	0,581803	0,520703	0,470679	0,429136	0,394163
3			0,983048	0,902389	0,810745	0,728662	0,658739	0,599689	0,549642	0,506901
4				0,987259	0,923560	0,846839	0,774678	0,710759	0,655059	0,606624
5					0,989794	0,937150	0,871244	0,807097	0,748632	0,696463
6						0,991488	0,946624	0,888887	0,831250	0,777559
7							0,992699	0,953611	0,902253	0,849972
8								0,993609	0,958977	0,912736
9									0,994317	0,963229
10										0,994884

	$n=11$	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$i=1$	0,238404	0,220922	0,205817	0,192636	0,181036	0,170750	0,161566	0,153318	0,145869	0,139108
2	0,364359	0,338681	0,316340	0,296734	0,279396	0,263957	0,250124	0,237661	0,226374	0,216106
3	0,470087	0,438105	0,410099	0,385390	0,363442	0,343825	0,326193	0,310263	0,295802	0,282619
4	0,564374	0,527327	0,494650	0,465657	0,439784	0,416572	0,395641	0,376679	0,359426	0,343664
5	0,650188	0,609138	0,572619	0,540005	0,510752	0,484396	0,460549	0,438883	0,419120	0,401028
6	0,728750	0,684762	0,645201	0,609585	0,577444	0,548347	0,521918	0,497828	0,475797	0,455582
7	0,800424	0,754700	0,712951	0,674972	0,640435	0,608988	0,580295	0,554046	0,529967	0,507818
8	0,864925	0,818975	0,776045	0,736415	0,700014	0,666626	0,635991	0,607845	0,581936	0,558035
9	0,921180	0,877149	0,834341	0,793927	0,756273	0,721397	0,689170	0,659402	0,631885	0,606415
10	0,966681	0,928130	0,887334	0,847282	0,809135	0,773308	0,739886	0,708799	0,679913	0,653069
11	0,995348	0,969540	0,933950	0,895953	0,858336	0,822234	0,788092	0,756039	0,726054	0,698046
12		0,995735	0,971947	0,938897	0,903342	0,867889	0,833637	0,801047	0,770279	0,741349
13			0,996062	0,974001	0,943153	0,909748	0,876229	0,843656	0,812496	0,782931
14				0,996343	0,975774	0,946854	0,915355	0,883574	0,852530	0,822689
15					0,996586	0,977321	0,950102	0,920305	0,890094	0,860446
16						0,996799	0,978682	0,952975	0,924706	0,895919
17							0,996987	0,979889	0,955535	0,928646
18								0,997154	0,980967	0,957831
19									0,997304	0,981935
20										0,997439



Fortsetzung: Werte für $F_{BB,1-\alpha}$ für $\alpha = 5\%$, Rang i und Stichprobenumfang n nach Gl. (6.35)

	$n=21$	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$i=1$	0,132946	0,127305	0,122123	0,117346	0,112928	0,108830	0,105019	0,101466	0,098145	0,095034
2	0,206725	0,198122	0,190204	0,182892	0,176121	0,169831	0,163974	0,158507	0,153392	0,148596
3	0,270552	0,259467	0,249249	0,239801	0,231040	0,222894	0,215300	0,208205	0,201561	0,195326
4	0,329211	0,315913	0,303638	0,292273	0,281723	0,271902	0,262739	0,254170	0,246139	0,238598
5	0,384408	0,369091	0,354932	0,341807	0,329608	0,318242	0,307626	0,297691	0,288372	0,279615
6	0,436976	0,419800	0,403899	0,389139	0,375405	0,362595	0,350620	0,339402	0,328873	0,318971
7	0,487389	0,468495	0,450975	0,434691	0,419520	0,405354	0,392098	0,379670	0,367996	0,357009
8	0,535936	0,515457	0,496435	0,478728	0,462209	0,446767	0,432302	0,418728	0,405966	0,393947
9	0,582801	0,560868	0,540456	0,521423	0,503642	0,486998	0,471392	0,456731	0,442936	0,429934
10	0,628099	0,604844	0,583155	0,562893	0,543933	0,526162	0,509478	0,493789	0,479012	0,465073
11	0,671891	0,647456	0,624606	0,603215	0,583162	0,564337	0,546640	0,529979	0,514270	0,499439
12	0,714200	0,688736	0,664852	0,642436	0,621378	0,601576	0,582931	0,565355	0,548765	0,533086
13	0,755006	0,728687	0,703907	0,680579	0,658611	0,637911	0,618387	0,599956	0,582536	0,566055
14	0,794250	0,767276	0,741757	0,717644	0,694870	0,673358	0,653028	0,633803	0,615608	0,598371
15	0,831824	0,804437	0,778364	0,753611	0,730147	0,707918	0,686861	0,666910	0,647995	0,630052
16	0,867552	0,840059	0,813656	0,788434	0,764414	0,741576	0,719880	0,699275	0,679704	0,661107
17	0,901156	0,873966	0,847520	0,822039	0,797622	0,774300	0,752066	0,730889	0,710729	0,691536
18	0,932194	0,905891	0,879785	0,854314	0,829696	0,806040	0,783383	0,761729	0,741056	0,721330
19	0,959900	0,935404	0,910191	0,885089	0,860525	0,836718	0,813780	0,791758	0,770660	0,750474
20	0,982809	0,961776	0,938324	0,914115	0,889944	0,866226	0,843181	0,820923	0,799504	0,778941
21	0,997560	0,983602	0,963485	0,940992	0,917709	0,894404	0,871478	0,849149	0,827535	0,806692
22		0,997671	0,984326	0,965047	0,943437	0,921014	0,898515	0,876331	0,854678	0,833674
23			0,997772	0,984988	0,966480	0,945688	0,924064	0,902318	0,880831	0,859815
24				0,997865	0,985597	0,967801	0,947767	0,926886	0,905845	0,885013
25					0,997950	0,986158	0,969022	0,949692	0,929506	0,909126
26						0,998029	0,986677	0,970153	0,951480	0,931944
27							0,998102	0,987159	0,971204	0,953145
28								0,998170	0,987606	0,972184
29									0,998233	0,988024
30										0,998292



7. Literatur

- [1] B. Bertsche, G. Lechner: Zuverlässigkeit im Fahrzeug- und Maschinenbau, 3. Auflage, Springer, 2004
- [2] Bosch Product Engineering System: Committed BES Practice Zuverlässigkeitsgestaltung von Designelementen, 2010
- [3] Norm IEC 60050-191: Internationales Elektrotechnisches Wörterbuch, Kapitel 191: Zuverlässigkeit und Dienstgüte, 1990
- [4] J. C. Laprie (ed.): Dependability: Basic Concepts and Terminology. In: Dependable Computing and Fault-Tolerant Systems, Vol. 5, Springer, 1992
- [5] E. Haibach: Betriebsfestigkeit, VDI-Verlag, 1989
- [6] A. Haldar, S. Mahadevan: Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design, John Wiley, 2000
- [7] VDA Reihe Qualitätsmanagement in der Automobilindustrie, Band 4 „Sicherung der Qualität während der Produktrealisierung – Methoden und Verfahren“, Kapitel 2 „Entwicklungsabläufe“
- [8] VDA Reihe Qualitätsmanagement in der Automobilindustrie, Band 3 „Zuverlässigkeitssicherung bei Automobilherstellern und Lieferanten“, Kapitel 2 „Zuverlässigkeitsmethoden und Hilfsmittel“
- [9] Schriftenreihe Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe, Heft Nr. 14 Fehler-Möglichkeiten- und Einfluss-Analyse FMEA
- [10] MIL-HDBK-217F (Notice 2): Reliability Prediction of Electronic Equipment, U.S. Department of Defense, 1995.
- [11] Bosch Product Engineering System: Leitfaden PE, 2010
- [12] G. Yang: Life Cycle Reliability Engineering, John Wiley, 2007
- [13] B. Bertsche, P. Göhner, U. Jensen, W. Schinköthe, H.-J. Wunderlich: Zuverlässigkeit mechatronischer Systeme, Springer, 2009
- [14] G. S. Wasserman: Reliability Verification, Testing, and Analysis in Engineering Design, Dekker, 2003
- [15] P.D.T. O'Connor: Practical Reliability Engineering, 4th Edition, Wiley, 2002
- [16] Schriftenreihe Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe, Heft Nr. 6 Auswerten von Felddaten
- [17] A. Krolo: Planung von Zuverlässigkeitstests mit weitreichender Berücksichtigung von Vorkenntnissen, Bericht 110 der IMA, Universität Stuttgart, 2004



8. Index

AFB.....	79	Fehler 1. Art	67, 90
Anforderungen	17	Feldbeobachtung	79
Applikation	37	Felddatenauswertung.....	80
Arrhenius	26, 49	FEM	22
Ausfallquote	10	FIT	13
Ausfallrate	10, 36	fit for standard.....	45
Ausfallratenkatalog	12	fit for use.....	45
Ausfallwahrscheinlichkeit.....	9	FMEA.....	41
allg. Verteilung	31	Formparameter	54
einfache	28	Frühausfälle	11, 36
wahre.....	26	FTA	42
Auslegung		Funktionsfähigkeit	4
erfahrungsbasiert	14	Gassner-Versuch.....	69
normbasiert.....	14	HALT.....	72
overdesignbasiert.....	14	HASS.....	74, 78
testbasiert	14	Histogramm	84
Badewannenkurve.....	11, 96	Instandhaltbarkeit	4
Bayes	48, 83	Instandhaltungsbereitschaft.....	4
Beanspruchbarkeit	6, 24	Intervall-Schätzung	88
Beanspruchung.....	6, 20	Johnson-Verfahren	58
Beanspruchungsdauer.....	5, 20, 22	Katalogware	18, 24
Beanspruchungskollektiv.....	24	Klassieren.....	24
Beanspruchungsparameter	21	Konzept	
Belastbarkeit.....	6	global	6
Belastung	6	lokal.....	6
Betriebsdauer	4	Larson-Nomogramm.....	47
Binomialverteilung	46	Lastkollektiv	22
Boole'schen Systemtheorie.....	34	Last-Zeit-Verlauf	21
Burn-in Test	78	Lebensdauer	5, 10
charakter. Lebensdauer.....	54	Lebensdauer-Versuch	69
Coffin-Manson.....	25, 50	Likelihood-Funktion	66
Daten		Lognormalverteilung.....	100
unvollständig	56	Maximum-Likelihood	65
vollständig	54	Median.....	10
Dauerfestigkeit	25	Median-Rang	90
Degradation	11	Mehrachsigkeit	37
Degradation Test.....	75	Militärhandbuch	12
Designelement	4	Miner-Regel	32
DIN IEC 68	44	Mischverteilung	103
DMS	22	Misuse.....	17
DRBFM.....	41	Mittelwert.....	10, 84, 85, 87
end of life.....	45	MKS.....	37
Ermüdung	11	Momentenmethode	63
Erprobung.....	44	Monte-Carlo Simulation	87
Erwartungswert.....	85	MTTF	10
Exponentialverteilung	35, 86, 96	Nelson-Verfahren	59
Extremwertverteilung	92	Normalverteilung.....	86, 98
Fahrmanöver	37	Nutzungsdauer	4
Fahrstrecke	37	Omission	73



Parallelprüfung	48	Varianz	84, 86, 87
Parallelstruktur	34	Variation	82
Pol-Punkt	54	VDI 4005	45
Produkthaftung	79	Verfügbarkeit	4
Punkt-Schätzung	87	Verifizierung	44
QALT	73	Verlässlichkeit	4
QFD	18	Versagensort	22
Qualität	4, 44	Verschleiß	11
Raffung	48	Verteilung	9
Rangregression	64	Verteilungsdichte	85
RGM	51	Verteilungsfunktion	85
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit	38, 83	Vertrauensbereich	67, 88
Schadensakkumulation	32	beta-binomial	90
Schädigung	7, 32	Fisher-Matrix	90
Schädigungsmechanismus	5, 20, 37	Kaplan-Meier	90
Schädigungsparameter	7	Likelihood-Verhältnis	90
Serienstruktur	34	Vertrauensniveau	67, 88, 90
Sicherheit	4	Vertraulichkeit	4
Sicherheitsfaktor	29	Wahrscheinlichkeit	82
Stand der Technik	19	bedingte	83
Standardabweichung	84	Eigenschaften	83
Standardnormalverteilung	98	Wahrscheinlichkeitspapier	93
Step Stress	72	Weibull	
Stillstandsdauer	4	Netz	54
Stress Screening	74	Parameter	54
Streumaß	30	Verteilung	86, 91
success run	46	Wöhler-Linie	8
Sudden-Death-Test	70, 81	Zensorisierung	66
Teilanwendung	37	Arten	52
Teilschädigung	32	multiple	57, 81
test to failure	45	Typ I und II	56, 80
test to pass	45	Zentraler Grenzwertsatz	98
Total Life Cycle Cost	19	Z-Prüfung	78
Überlebenswahrscheinlichkeit	10	Zufallsausfälle	11, 36
unvollständiger Test	48	Zufallsvariable	82, 85
Use-Case-Analyse	18	Zuverlässigkeit	4
Use-Groups-Analyse	18	Zuverlässigkeitsgestaltung	5, 14
Validierung	44, 77	Zuverlässigkeitsmaß	18



Robert Bosch GmbH

C/QMM

Postfach 30 02 20

D-70442 Stuttgart

Germany

Phone +49 711 811-4 47 88

Fax +49 711 811-2 31 26

www.bosch.com

